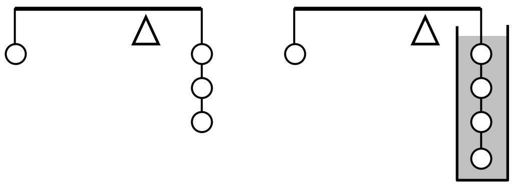
Варианты вступительных работ по физике в 8 класс

2008 год

1. Два муравья безостановочно ползают туда-сюда по линейке длиной 15 см. Скорость первого муравья 3 см/мин, а второго 5 см/мин. Стартуют они с противоположных концов линейки.
   а) На одном и том же графике нарисуйте зависимости координаты от времени для обоих муравьев.
   б) Сколько раз муравьи встретятся за один час?

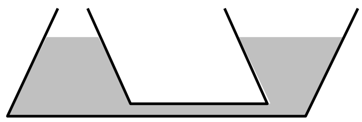
2. В воздухе на некотором рычаге один левый шарик уравновешивается тремя шариками справа. При погружении правого края рычага в воду левый шарик уравновешивается уже четырьмя шариками справа. Найдите плотность шариков. Все шарики одинаковы.



3. В большой сосуд налили 1 литр чая (плотность чая такая же, как у воды, то есть 1 г/см^3), и начали медленно добавлять молоко (плотность 1,5 г/см^3).
   а) Какова будет плотность чая с молоком в тот момент, когда в чай добавят 1000 г молока?
   б) Постройте график зависимости плотности чая с молоком от массы наливаемого молока.

4. Два пробковых кубика разного размера – большой и маленький – всплывают со дна глубокого водоема. Как вы думаете, какой из них всплывет раньше?
   а) Если не учитывать силу сопротивления воды.
   б) Если учитывать силу сопротивления воды. (Считайте силу сопротивления пропорциональной площади грани кубика.)

5. Куда потечет вода, налитая в сосуды одинакового объема такой формы, соединенные тонкой трубкой, если воду нагреть?



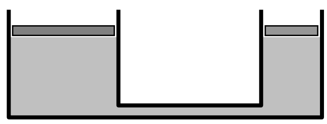
2009 год

1. Школьники Митя и Паша, боясь опоздать на урок, одновременно стартовали примерно из одной точки. Митя разгонялся 1 секунду, набрал скорость 6 м/с и дальше бежал постоянно с этой скоростью. Паша же равномерно увеличивал темп бега в течение 6 секунд и далее бежал с достигнутой постоянной скоростью. Ровно через 8 секунд после старта бегуны одновременно врезались в стоявшего перед кабинетом учителя.
   а) Найдите скорость, набранную Пашей.
   б) Найдите длину дистанции, которую пробежали Митя и Паша.
   в) Нарисуйте на одном графике примерную зависимость координат школьников от времени.
   Считайте, что по коридору до учителя Митя и Паша бегут по прямой.

2. Костя и Ваня очень любят физику, а еще у них есть легкие шарики-леденцы одинакового объема, но разного состава. Друзья обнаружили, что Костины леденцы плавают, погружаясь в воду наполовину, а Ванины – на 3/4 своего объема. Тогда ребята слепили из некоторого количества своих леденцов "конфету дружбы", и обнаружили, что конфета плавает, погружаясь в воду на 2/3 своего объема. Сколько Костиных и сколько Ваниных леденцов может быть в конфете? Считайте, что леденцы у друзей хорошие (т.е. не растворяются во время опыта).

3. Две небольших круглых черепашки сидят на доске длиной 1,8 метра. Диаметр одной черепашки ровно в 2 раза больше диаметра другой. На каком расстоянии от первой черепашки нужно расположить опору для доски, чтобы вся система могла быть в равновесии:
   а) Если доска легкая и практически ничего не весит?
   б) Если доска весит столько же, сколько маленькая черепашка?

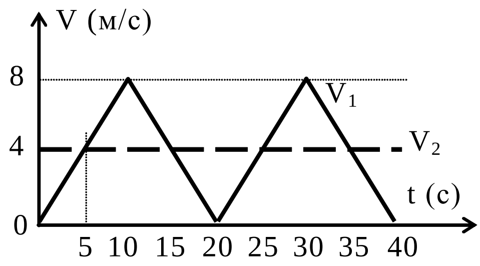
4. Марику на день рождения подарили "гидравлические подушки" – два сообщающихся сосуда с водой, прикрытых легкими поршнями. Площади поршней 1 м^2 и 2 м^2. Когда Марик сел на один из поршней, тот опустился под ним на 4 см.



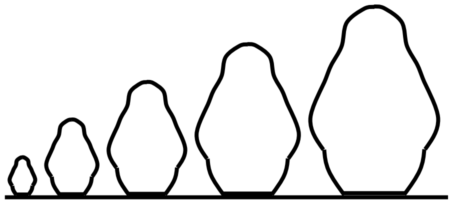
   а) Найдите массу мальчика.
   б) На сколько сантиметров опустится другой поршень, если Марик пересядет на него?

2010 год

1. Два спортсмена на тренировке, стартуя рядом, бегают по одной беговой дорожке. Наблюдающий за ними тренер нарисовал график зависимости скоростей обоих спортсменов от времени. Помогите тренеру:
   а) Определить моменты времени, в которые средние скорости обоих спортсменов совпадают.
   б) Нарисовать график зависимости координат обоих спортсменов от времени.



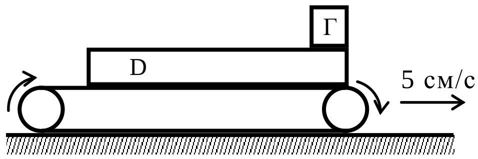
2. Вставляемые друг в друга матрешки имеют тонкие корпуса одинаковой толщины, сделанные из одной породы дерева. Если их поставить в ряд "по росту", начиная с самой маленькой, их высоты будут относиться друг к другу как 1:2:3:4:5 (например, самая высокая в 5:1=5 раз выше самой маленькой, третья в 3:1=3 раза выше самой маленькой и т. д.). Известно, что самая маленькая матрешка весит 18 г. Сколько весят все они вместе?



3. Металлический нагреватель погрузили в ведро с холодной водой (температурой 20°С) и затем включили. Нарисуйте примерный график зависимости температуры нагревателя от времени. Обоснуйте свой ответ.

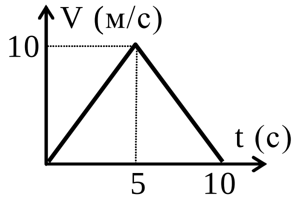
4. Водолаз в костюме имеет среднюю плотность 1,2 г/см^3 и массу 72 кг. Кроме того, он использует в качестве утяжеляющего балласта сетку с камнями массой 8 кг и плотностью 4 г/см^3,а для подъема – пробковый шар. Известно, что водолаз ходил по дну, имея балласт и шар, а затем выбросил балласт и всплыл на поверхность водоема. Каким мог быть объем пробкового шара? (Укажите, по возможности, все допустимые значения. Плотность пробки равна 0,2 г/см^3.)

5. Ленточный транспортер начинает двигаться по ровной дороге с постоянной скоростью 5 см/с. На ленте лежит доска D длиной 6 м, шириной 0,5 м, толщиной 2 см. Плотность материала доски 0,5 г/см^3. На переднем крае доски лежит груз Г массой 10 кг, причем ни груз относительно доски, ни доска относительно ленты не скользят.
   а) С какой скоростью двигается груз?
   б) Через какое время доска с грузом начнут терять равновесие? (Начальное положение системы указано на рисунке).



2011 год

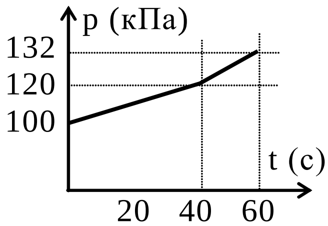
1. Во время небольшой пробежки скорость спортсмена менялась так, как показано на графике.
   а) Постройте график зависимости координаты спортсмена от времени.
   б) Постарайтесь как можно точнее определить, в какой момент времени средняя скорость спортсмена была максимальна.

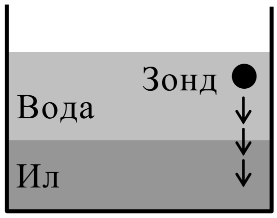


2. Два шарика, первый из железа ($\rho_ж$=7,5 г/см^3), второй из серебра (считайте $\rho_с$=10,5 г/см^3), были уравновешены в воздухе на легкой 30-сантиметровой линейке с делениями. В эксперименте школьник погрузил первый шарик в бензин ($\rho_б$=0,7 г/см^3), а второй в воду ($\rho_в$=1 г/см^3). Нарушилось ли равновесие, и если да, то какой шарик перевесил в случае:
   а) шарики имели одинаковую массу;
   б) шарики имели одинаковый объем?

3. Небольшая старинная серебряная монета весит 4 г. Чтобы ее лучше изучать, из покрытого серебром алюминия сделали ее точную копию, с увеличенными в 3 раза всеми размерами. Оказалось, что копия весит 30 г. Плотность алюминия 2,7 г/см^3, серебра 10,8 г/см^3.
   а) Монета или ее копия оказывает на пол большее давление?
   б) Какова масса серебра в копии?

4. Зонд представляет собой небольшой прибор, меряющий давление вокруг себя. Зонд начинает погружаться с постоянной скоростью в глубину озера и измерять давление. Про это озеро известно, что над дном в нем есть широкий слой жидкого ила. По графику измеренной зависимости давления от времени определите: А) скорость погружения зонда; Б) плотность ила.



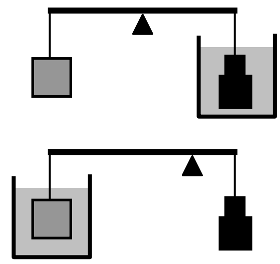


5. Винни-Пух и Пятачок устроили заплыв вдоль реки от пункта А до пункта Б. Не умея плавать, Пятачок лег на надувной матрас и, загорая, сплавлялся по реке до Б, а Винни-Пух проплыл по реке до Б, развернулся и поплыл к другу. Встретившись с Пятачком, Винни затем опять разворачивался, доплывал до Б, затем опять к Пятачку и т.д. Когда друзья закончили заплыв, они подсчитали, что Винни-Пух проплыл в 3 раза больше, чем Пятачок. Найдите скорость течения реки, если относительно воды Винни всегда плыл с постоянной скоростью 4,5 км/ч.

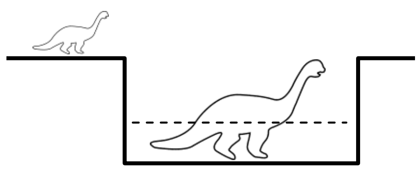
2012 год

1. Вова сидел на заднем сиденье трамвая и смотрел в окно. В какой-то момент он увидел, что обогнал Диму, который ехал в ту же сторону на велосипеде с постоянной скоростью 27 км/ч. Через 10 сек после обгона Вове пришло в голову тоже заняться спортом: он сделал по пустому салону две пробежки вперед и назад со скоростью 5 м/с (относительно салона) и сел на место. Считайте, что мальчики двигаются вдоль одной прямой, и Вова, когда бегает, меняет свою скорость мгновенно. Трамвай же все время двигается с постоянной скоростью 36 км/ч.
   а) Когда Вова сел, расстояние между мальчиками вдоль улицы составляло 85 м. Найдите длину салона трамвая.
   б) Постройте график зависимости скорости Вовы относительно Димы от времени.

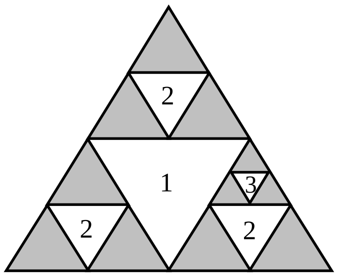
2. Куб со стороной 5 см и плотностью материала 1600 кг/м^3 уравновесили на рычаге с одинаковой длиной плеч небольшой гирей, полностью погруженной в воду (рис. 1). Когда же гирю вынули из воды, а куб наоборот, полностью в воду погрузили, то для сохранения равновесия точку опоры пришлось сдвинуть так, чтобы плечо, на котором висел куб, составило 4/5 от всей длины рычага (рис. 2). Зная это, определите плотность гири. Плотность воды 1000 кг/м^3.



3. Известно, что самые крупные наземные динозавры, чтобы не проваливаться, вынуждены были бродить, частично погруженные в воду.
   а) Почему динозаврам это помогало?
   б) На рисунке маленький динозавр стоит на суше, а такой же формы большой, все размеры которого в 3 раза больше, стоит на половину своего объема погруженный в воду. Плотность динозавра примерно равна плотности воды. Какой из динозавров своими ногами создает большее давление на дно? Во сколько раз?

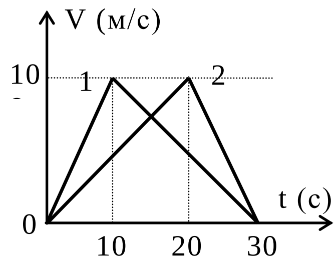


4. Школьники решили вырезать из белой бумаги "треугольную снежинку". Они взяли большой белый бумажный треугольник, на первом этапе аккуратно вырезали треугольную "сердцевину" из него (аккуратность нужна, чтобы все не распалось). Затем, на втором этапе аккуратно вырезали сердцевины из всех оставшихся меньших треугольников, на третьем – сердцевины из всех оставшихся меньших и т.д. (На рисунке отмечены все треугольники, вырезавшиеся на первом и втором этапе и один из треугольников, вырезанных на третьем). Школьникам удалось провести пять этапов вырезания. Какова масса получившейся ажурной треугольной снежинки, если вес исходного белого треугольника был равен 102,4 г (примерно 1 Н)?

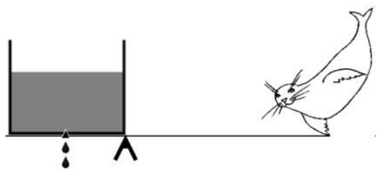


2013 год

1. Два спортсмена совершали разминочные пробежки по одной дорожке, а тренер нарисовал графики зависимости их скоростей от времени (см. рис.). Стартовали спортсмены одновременно из одной точки.
   а) Сравните средние скорости спортсменов за все время разминки.
   б) В какой момент времени расстояние между спортсменами было наибольшим? Кто при этом был впереди?
   в) Чему равнялось это расстояние?

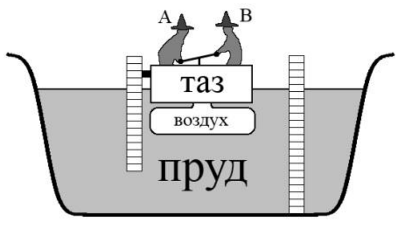


2. На легкой доске общей длиной 5 м, на одном конце с самого края находился тюлень, а с другой стороны размещался квадратный сосуд площади 1x1 $м^2$, в который была налита вода. Масса тюленя 50 кг, а стенки сосуда можно считать невесомыми. Точка опоры располагалась ровно возле угла сосуда.
   а) Какова была высота уровня воды в сосуде, если все находилось в равновесии?
   б) Из сосуда вынули легкую пробку, после чего вода стала вытекать из него со скоростью 2 л/сек. С какой скоростью должен начать перемещаться тюлень, чтобы равновесие не нарушилось?

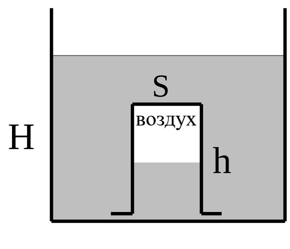


3. Незнайка обнаружил, что если смазать железную иголку водоотталкивающим веществом (например, парафином), то она может лежать на поверхности воды. После этого Незнайка натер себя парафином и лег на воду загорать, но провалился вглубь. Почему, в отличие от иголки, Незнайка не может лежать на поверхности воды?

4. Два мудреца в одном тазу пустились в плаванье в пруду. К тому же таз протекал, и мудрецы заспорили – как изменится (увеличится, уменьшится или сохранится) уровень воды в пруду, когда они с тазом утонут.
   а) Ответьте мудрецам на их вопрос.
   б) Перестав спорить, мудрецы стали надувать под тазом спасательную воздушную подушку и одновременно измерять изменение уровня воды в пруду с помощью линеек. Причем мудрец A закрепил свою линейку неподвижно относительно таза, а мудрец B установил свою на дне пруда. Как будет изменяться уровень воды относительно линейки каждого из мудрецов? Считайте, что пруд небольшой, а линейки у мудрецов точные.



5. Шляпа-цилиндр массы m=1 кг из очень тонкого сверхплотного водонепроницаемого материала стоит на дне водоема глубины H=2 м. Для подъема шляпы под нее закачивается воздух. Высота шляпы h=2,5 м, площадь ее верха S=0,01 $м^2$. Плотность воздуха считайте малой по сравнению с плотностью обычной воды, которая у дна может свободно протекать под шляпу.
   а) При каком объеме воздуха под шляпой она начнет всплывать?
   б) Каким будет в этот момент давление воздуха в ней?

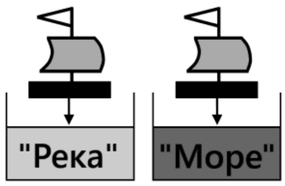


2014 год

1. Почему при реальном падении с большой высоты человеку, чтобы не разбиться, нужен парашют, а муравью нет? Физически обоснуйте свой ответ.

2. В тридесятом царстве, в серебряном государстве, где серебро ничего не стоит, решили удешевить используемые золотые монеты. Монеты весом 98 г из чистого золота стали чеканить того же размера и формы, но из сплава золота с серебром. При этом монета считалась дешевой, когда она переставала тонуть в ртути. Плотность золота 19,6 г/см^3, серебра 10,8 г/см^3, ртути 13,6 г/см^3.
   а) На сколько грамм минимум дешевая монета должна быть легче золотой?
   б) Сколько процентов составляет стоимость такой монеты от золотой?

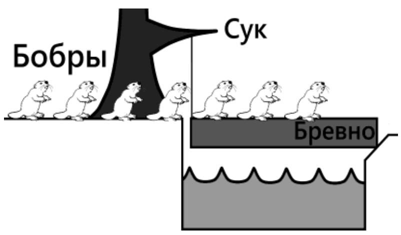
3. В двух одинаковых прямоугольных аквариумах было налито равное по объему количество воды: в первом – речной (пресной), а во втором – морской (соленой). Затем в аквариумы поместили два одинаковых кораблика с простым прямоугольным корпусом.



   а) Уровень воды в каком из аквариумов станет выше после помещения в них корабликов?
   б) Давление на дно в каком из аквариумов станет выше?
   в) Флажок какого из плавающих корабликов будет выше?

4. Испытание автомобилей на прямом шоссе длилось 1,5 минуты. Первый автомобиль, проехав в момент времени t=0 точку старта, все время двигался равномерно со скоростью 72 км/час. Второй же, стартовав на 30 сек позже, равномерно разгонялся и спустя 1 мин превысил скорость первого в 3 раза, после чего резко затормозил.
   а) Нарисуйте графики скоростей обоих автомобилей в зависимости от времени.
   б) Сравните среднюю скорость автомобилей за время испытаний.
   в) На какое наибольшее расстояние первый автомобиль обогнал второй во время испытаний?

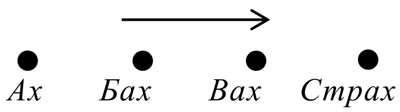
5. Бревно постоянной толщины, длиной 6 м и массой 200 кг, одним концом опирается о берег, а другим подвешено на веревке (см. рис.). Если веревку натянуть с силой не меньше 2100 Н, она порвется. По бревну медленно переправляется длинная вереница бобров. Все бобры одинаковые, масса каждого 4 кг, расстояние между носами соседних бобров 20 см.



   а) Порвется ли веревка при такой переправе?
   б) Узнать на опыте, порвется ли веревка, не удалось, так как когда на бревне было 15 бобров, сломался сук, и оно упало в воду. С какой силой была натянута веревка перед тем, как сук сломался?

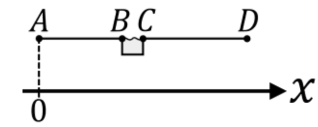
2015 год

1. Острова *Ах*, *Бах*, *Вах* и *Страх* расположены на равном расстоянии друг от друга и вдоль них проходит постоянное течение. Обезьянка Чича уронила кокос на острове *Ах*, так что он погрузился в воду на три четверти объема и поплыл. Вода просачивалась под скорлупу ореха, и доктор Айболит с острова *Вах* заметил, что проплывавший мимо кокос был погружен уже на 9/10 объема. Считайте, что океанская вода плотности 1040 кг/м^3 просачивалась под скорлупу с постоянной скоростью, а кокос содержит как очень плотные части, так и пустоты.



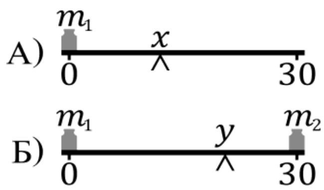
   а) Какова была средняя плотность ореха возле острова *Бах*?
   б) Доплыл ли кокос до Бармалея на острове *Страх*?

2. Трасса для троеборья AD длиной 54 км состоит из велосипедной трассы AB длиной 24 км, водного участка BC длиной 6 км и дороги для бега CD. Два спортсмена имеют одинаковые средние скорости бега (12 км/ч), плаванья (6 км/ч) и езды (36 км/ч), но при этом известно, что после плаванья спортсмены устают и снижают среднюю скорость бега на 2 км/ч, а велоезды на 6 км/ч.



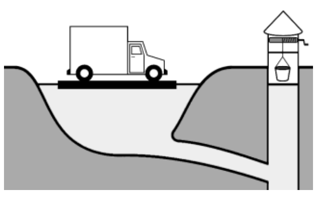
   а) Первый спортсмен стартовал из точки A на велосипеде, а второй – из точки D бегом (т.е. они движутся в противоположных направлениях). Кто из них раньше финиширует?
   б) Нарисуйте на одном графике зависимости координат обоих спортсменов от времени (время отмечайте в минутах).
   в) На каком расстоянии от точки A спортсмены встретятся?

3. У школьника есть линейка длиной l=30 см с сантиметровыми делениями и две гирьки: одна массой m_1=20 г и другая, про которую он знает только то, что ее масса m_2 в граммах делится на 10.



   а) Сначала школьник поставил известную гирьку на деление 0 и обнаружил, что гирька уравновешивает линейку, если точка опоры находится на делении x=12. Найдите массу линейки.
   б) Затем школьник поставил вторую гирьку на другой конец линейки и обнаружил, что если точка опоры расположена на делении y=20, то в системе перевешивает один край, а если на y=21 – то другой край. Какова может быть масса второй гирьки?

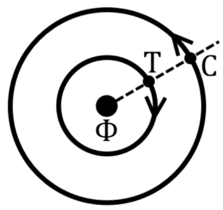
4. Есть пруд площади 300 м^2, на котором плавает большая льдина площади 200 м^2. Пруд под землей сообщается с колодцем, свободным ото льда. Площадь колодца мала по сравнению с площадью пруда.



   а) Когда на льдину въехал грузовик, уровень воды в колодце поднялся на 1 см. Найдите массу грузовика.
   б) Повысится, понизится или не изменится давление на дно колодца, если льдина треснет и грузовик утонет?

2016 год

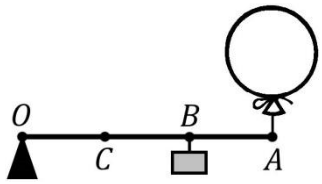
1. На спортплощадке по внешней кольцевой дорожке длиной 120 м на равном расстоянии 10 м друг от друга бегут спортсмены, а по внутренней дорожке (длиной 80 м) со скоростью в 3 раза меньшей навстречу им движется тренер. В центре спортплощадки горит фонарь.



   а) Сколько раз за один свой круг тренер оказывается между каким-то из спортсменов и фонарем?
   б) Чему равна скорость спортсменов, если тень тренера падает на одного из них каждые 10 секунд?

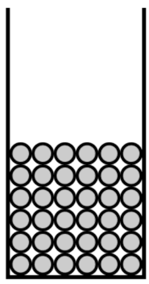
2. У двух четырехколесных машин, маленькой и большой, камеры колес сделаны из мягкой резины одинаковой для обеих машин толщины. Покрышек у машин нет, большая машина – это пропорционально увеличенная маленькая, за исключением толщины резины.
   а) В камерах какой машины нужно поддерживать большее давление, чтобы шины не сминались до обода?
   б) Если давление во всех восьми шинах сделать одинаковым и начать плавно его увеличивать, то у какой машины камеры лопнут раньше?

3. Если привязать надутый гелием шар из легко растяжимой резины к рычагу в точке A, то можно поднять закрепленный в точке B груз M=630 г. Если же надуть тот же шар до в 2 раза большего радиуса и привязать в точке C, то получится поднять груз 3M=1890 г. Рычаг считайте невесомым. Точки A, B, C и O находятся на равном расстоянии друг от друга. Если нужно: плотность воздуха 1,4 кг/м^3, плотность гелия 0,2 кг/м^3.



   а) Какой груз можно поднять, если такой увеличенный шар закрепить в точке A?
   б) Сколько весит (в граммах) оболочка шара?

4. Муля любит здоровую пищу и каждое утро наполняет полулитровый цилиндрический стакан ровно до середины небольшими рисовыми шариками. Шарики имеют плотность 0,2 г/см^3 и занимают 60% заполненного ими объема (остальное – пустоты). Затем Муля быстро (чтобы шарики не успели пропитаться) заливает их молоком (плотность молока 1 г/см^3) так, чтобы верхняя граница шариков поднялась до границы стакана.

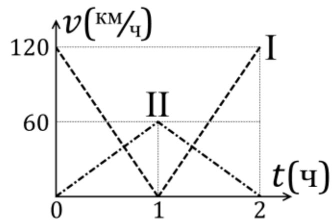


   а) Сколько молока наливает Муля?
   б) Шарики состоят из рисовой муки (такой же плотности, как молоко) и воздуха, вытесняемого молоком при пропитывании. Какой объем будет занимать завтрак Мули, когда шарики полностью пропитаются?

2017 год

1. Гулливер с удивлением узнал, что в Лилипутии длину измеряют в *лилипрыгах*, которые в 5 раз короче обычных метров, а единицей массы является *лилипуд*. При этом единица плотности в Лилипутии по величине совпадает с единицей плотности в СИ.
   а) Найдите массу Гулливера в *лилипудах*, если известно, что она равна 80 кг.
   б) Выразите лилипутскую единицу времени *лилимиг* в секундах, если известно, что их единица силы *лилиух* в точности равна 1 Н.

2. Два поезда – скорый I и товарный II – едут в одну сторону по параллельным колеям железной дороги. В начальный момент они находились на одной станции. На рисунке изображены графики зависимости скоростей обоих поездов от времени.



   а) На какое наибольшее расстояние во время движения скорый поезд обгонял товарный?
   б) Каково было наименьшее расстояние между поездами во второй час пути?

3. По тонкой трубке подается жидкий пластик и теплый воздух постоянной температуры, и на ее конце по очереди образуются прозрачные шарики. Все они имеют тонкие оболочки одинаковой толщины и отрываются примерно в тот момент, когда их средняя плотность (то есть оболочки и содержимого) сравнивается с плотностью окружающего воздуха.

   а) Какие силы отрывают шарик от трубки?
   б) Как изменится размер отрывающихся шариков, если подогрев воздуха из трубки ослабнет (то есть он будет подаваться с меньшей температурой)?

4. Рассеянный, придя посмотреть на аквариум с морскими рыбами, положил свою трость на его край так, что она оказалась в равновесии (рис. А). Трость эта общей массой M=4,5 кг представляет собой небольшой круглый набалдашник и длинную (L=1,5 м) однородную палку постоянной толщины из красного дерева. Точка равновесия трости *A* находится на расстоянии s=0,5 м от набалдашника.

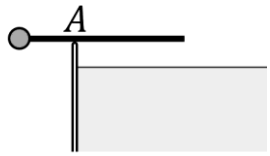


Рисунок А

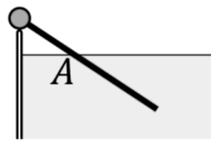
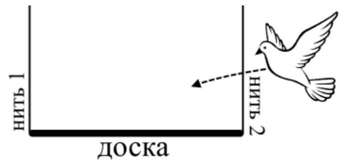


Рисунок Б

   а) Сколько весит набалдашник?
   б) По рассеянности Рассеянный столкнул свою трость в аквариум, но она удержалась в равновесии, погрузившись в морскую воду ($\rho_в$=1035 кг/м^3) только до точки *A* (рис. Б). Какова плотность красного дерева?

2018 год



1. Однородная палка длиной 120 см и массой 1 кг висит на двух нитях. Нить 1 рвется при силе натяжения, превышающей 12 Н, а нить 2 – при силе натяжения больше 14 Н. На палку хочет сесть отдохнуть птица, масса которой 1 кг.
   а) Приведите два примера такой посадки птицы, что: 1) одна из нитей обязательно порвется; 2) обе нити останутся целыми. Считайте, что птица садится максимально мягко.
   б) Укажите область безопасной посадки на палке, то есть такую область, что, если птица приземлится на нее, нити не порвутся.

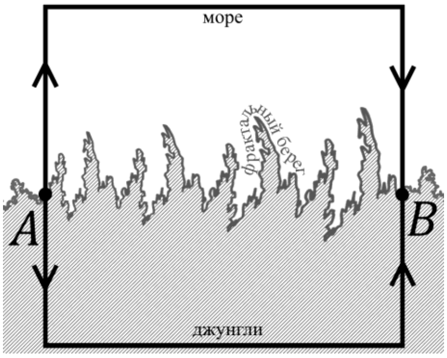
2. Избыточная подъемная сила моторчика Карлсона равна 1000 Н (то есть такой вес Карлсон может поднимать помимо себя). Карлсон увидел в горячем колодце площадью $S=1$ м^2 и глубиной $h=2$ м большой шар объема $V=0{,}5$ м^3 и попытался его вытянуть за легкую веревку, привязанную к шару. Однако он не смог оторвать шар от дна, поэтому стал приносить пудовые пакеты с солью и высыпать их над колодцем. Соль тут же растворялась. Когда Карлсон высыпал 50 пакетов, он снова потянул за веревку, и на этот раз шар оторвался от дна. Укажите, какой могла быть плотность шара. Один пуд равен 16 кг; при высыпании одного мешка соли уровень воды в колодце повышался на 1 см.

3. В ледяной шар объема $V=1$ дм^3 вморожен золотой шарик в 10 раз меньшего радиуса. Все плавает в цилиндрическом сосуде площади $S=1{,}9$ дм^2 с теплой водой. Начальный уровень воды $H_0=15$см. Плотность льда $\rho_л=0{,}9$ г/см^3, воды $\rho_в=1$ г/см^3, золота $\rho_з=20$ г/см^3.
   а) Какой объем льда должен растаять, чтобы оставшаяся часть шара с шариком утонула?
   б) Нарисуйте примерный график зависимости уровня воды от времени. Отметьте на графике момент полного погружения шара с шариком и момент полного таянья льда.

4. Незнайка собрал автомобиль-драндулет. Когда его увидел автомеханик Винтик, он долго смеялся, а потом поспорил, что обгонит драндулет даже бегом. Чтобы решить этот спор, Незнайка и Винтик устроили гонку. Во время гонки драндулет проехал первый километр с постоянной скоростью 15 км/ч, потом что-то сломалось, и скорость драндулета стала равномерно снижаться, поэтому второй километр Незнайка на драндулете проехал за 6 минут. На расстоянии 2 км от старта Незнайка со всей силы стукнул по драндулету, после чего тот поехал с постоянной скоростью, равной 6 км/ч. Винтик же всю гонку бежал с постоянной скоростью и обогнал драндулет ровно через 20 минут после старта. После этого гонку было решено остановить.
   а) Определите, с какой скоростью бежал Винтик.
   б) На какое максимальное расстояние Незнайка на драндулете опережал Винтика во время гонки?

2019 год

1. Фракталами называют, в частности, некоторые сложные кривые и ломаные линии. Пусть путешественники оказались на таком фрактальном побережье, где длина береговой линии L зависит от расстояния x по прямой на карте, соединяющей начальную (A) и конечную (B) точки движения, по закону $L = x + x^2/a$, где $a = 1$ км.



   У путешественников есть три варианта, как добраться из A в B:

   1) Идти по узкой проходимой полоске вдоль изрезанного берега со скоростью $v_1 = 3\,\text{км/ч}$.

   2) Отгрести на лодке перпендикулярно средней линии побережья на 15 км (ближе плыть опасно), проплыть вдоль берега и вернуться к B. По воде их средняя скорость будет $v_2 = 2\,\text{км/ч}$.

   3) Прорубить перпендикулярно AB дорогу в джунглях на половину расстояния AB (ближе мешает изрезанный берег), затем прорубать дорогу параллельно AB и, снова перпендикулярно, вернуться к B. В этом случае их средняя скорость будет $v_3 = 1\,\text{км/ч}$.

   Какой вариант им стоит выбрать, если путешественники хотят как можно быстрее добраться до B? Как их выбор зависит от расстояния AB?

2. Зонд представляет собой мяч с встроенным в него прибором массы $m = 1{,}3$ кг и постоянного объёма; в остальном мяч делают из вещества, чья плотность зависит от температуры по закону $\rho = (1 - \alpha T)\rho_0$, где T – температура зонда в ℃, $\alpha = 1/200$℃ – постоянная вещества, а $\rho_0 = 1000\,\text{кг/м}^3$ – плотность воды.

   А) По расчётам, при $T_1 = 20$℃ зонд имеет общий объём $V = 0{,}01\,\text{м}^3$ и висит в воде неподвижно. Найдите среднюю плотность прибора.

   Б) Оказалось, однако, что из-за работы прибора зонд нагревается. До какой температуры T_2 должен нагреться зонд, чтобы он приобрёл среднюю плотность $960\,\text{кг/м}^3$?

3. На лёгком неравноплечем рычаге уравновешены два лёгких стакана, в которые налита вода. Расстояние между центрами стаканов равно l. Из одного стакана взяли массу воды m и перелили во второй. Если при этом точку опоры рычага передвинуть на $l/10$, то равновесие восстановится. Найдите суммарную массу воды в обоих стаканах.

4. Садко одновременно высыпал в море-окиян золотые $(\rho_з \approx 20\,\text{г/см}^3)$ и серебряные $(\rho_c \approx 10{,}5\,\text{г/см}^3)$ монеты одинакового размера. Все монеты тонули с постоянной скоростью, причём скорость серебряных была $v_c = 1{,}9\,\text{м/с}$, но золотые монеты упали в кладовую Морского Царя на дно моря-окияна на $t = 400\ с$ раньше. Известно, что сила сопротивления движению любой монеты равна $F_{сопр} = bv$, где v – скорость монеты, а $b = 0{,}1\ \text{Н}\cdot\text{с/м}$ – постоянный коэффициент.

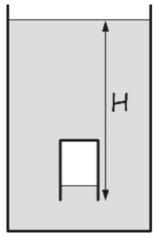
   А) Найдите массу серебряной монеты.

   Б) Найдите глубину моря-окияна там, где находится кладовая Морского Царя.

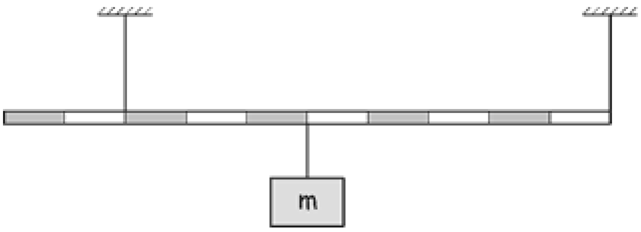
   Примечание: плотность моря-окияна считайте $\rho = 1\,\text{г/см}^3$.

2020 год

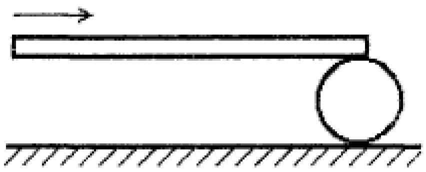
1. Крокодил Гена и Чебурашка мастерили скворечники из одинаковых досок. У чебурашки получился маленький скворечник, на доски для которого было потрачено 80 рублей. У Гены получился скворечник, который по всем размерам в 2 раза больше, чем у Чебурашки. Сколько стоили доски скворечника Гены?
2. Тело взвешивают на пружинном динамометре. При взвешивании в пустоте динамометр показывает 12 Н. При взвешивании этого же тела в воде плотности 1000 кг/м^3 динамометр показывает 7 Н. Какова плотность жидкости, при взвешивании в которой динамометр показывает 5 Н?
3. В высокое ведро с водой вверх дном опускают на глубину H = 30 см пустой стакан объемом V_0 = 200 мл. Площадь дна стакана S = 20 см^2, объем воздуха в стакане V = 130 мл. На сколько давление воздуха в стакане больше атмосферного?



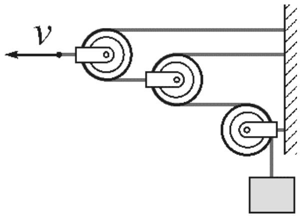
4. На рисунке показан рычаг массой 2 кг, подвешенный горизонтально на двух нитях. К середине рычага подвешен груз массой m = 4 кг. Определите силы натяжения нитей.



5. Доска длиной 6 м правым концом лежит на цилиндре. Рабочий начинает толкать доску вперед, в направлении, показанном стрелкой. Какое расстояние пройдет рабочий к моменту, когда левый конец доски окажется на цилиндре? Считайте, что проскальзывания нет.



6. Груз подвесили при помощи системы из блоков, показанной на рисунке. Свободный конец перемещают влево со скоростью v = 1 м/с. С какой скоростью поднимается груз?



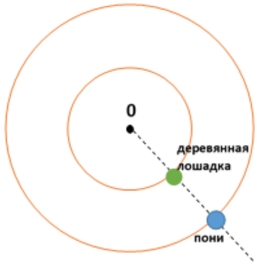
7. Отчего, спускаясь на лодке по реке, плывут посередине реки, а поднимаясь, стараются держаться берега?

2021 год

1. Капитан Врунгель, спасаясь от гангстеров, задраил все люки и превратил свою шхуну «Беда» в подводную лодку. Дырки от пуль гангстеров имели «правильный» размер, и он заткнул их пробками от бутылок. Пробка бутылки имеет площадь S = 2 см^2 и удерживается в отверстии силой $F \simeq 100$ Н. На какую максимальную глубину могла погружаться подлодка «Беда»?

2. Царевна Несмеяна плачет горючими слезами на берегу глубокого пруда, куда она уронила свою любимую куклу. Площадь пруда S = 50 м^2, его средняя глубина h = 2 м, а плотность куклы ρ = 1,1 г/см^3. Сколько слезинок должна пролить Несмеяна, чтобы кукла могла всплыть?
   Известно, что средняя масса одной капли-слезинки царевны равна m_1 = 1 г, и при этом слезинка содержит, кроме воды, 200 мг растворённой соли. Считайте, что при растворении каждых 2 мг соли объём раствора увеличивается на 1 мм^3.

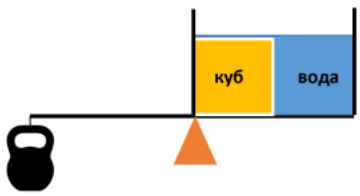
3. Пони бежит по кругу со скоростью $v_п$ = 36 км/ч вокруг карусели. Каждые t_1 = 12 секунд он обгоняет деревянную лошадку, которая вращается вместе с каруселью по окружности в 2 раза меньшего радиуса, чем радиус бега пони. Известно, что карусель делает 1 оборот за время t_2 = 8 секунд.



   А) Найдите скорость $v_л$ деревянной лошадки.
   Б) В момент, когда пони в очередной раз обогнал лошадку, карусель начала равномерно тормозить и ровно через t_0 = 7 секунд остановилась. Успел ли пони за это время обогнать лошадку ещё раз? Ответ объясните.
   (Пони обгоняет лошадку в тот момент, когда они оказываются на одной линии с центром вращения, как изображено на рисунке.)

4. При небольших изменениях температуры плотность любого газа можно приблизительно рассчитывать по формуле $\rho = \rho_0\left(1 - \frac{t°}{270}\right)$, где $t°$ - температура газа в градусах Цельсия, а ρ_0 – его плотность при 0°С.
   А) Как-то, при температуре окружающего воздуха 20°С, Винни-Пух массой M = 40 кг надул воздушный шар и отправился в полёт. Оцените объём его воздушного шара. Известно, что температура воздуха, выдыхаемого Винни-Пухом t_1 = 36°С, а плотность воздуха при 0°С $\rho_0 \simeq 1{,}35$ кг/м^3.
   Б) Винни надул шарик не только себе, но и – подходящего размера – своему другу Пятачку (масса Пятачка m = 5 кг). Они отправились в полёт, находясь при этом на одной высоте. Кто из друзей вынужден был первым начать снижаться из-за остывания воздуха в своем шаре? Ответ поясните.

5. На равноплечем рычаге уравновешены гиря массой m = 0,9 кг и прямоугольный лёгкий аквариум, по длине равный половине всей длины рычага; половину объёма аквариума заполняет вода, а половину – приклеенный ко дну куб плотности 0,6 г/см^3.



   А) Найдите длину стороны куба.
   Б) В какой-то момент куб отклеился от дна и всплыл. Как надо изменить массу гири, чтобы равновесие не нарушилось?

2022 год

1. Археологи нашли старинную золотую монету и изготовили ее копию из серебра, увеличенную в 2 раза по всем размерам. Оказалось, что объем серебряной копии больше на $V = 7$ см^3, а масса копии больше на $m = 60$ г. Также известно, что плотность золота на $\Delta\rho = 10$ г/см^3 больше, чем у серебра. Определите по этим данным плотность золота.
2. Турист в течение 6 часов двигался по дороге в одном направлении. Известно, что:

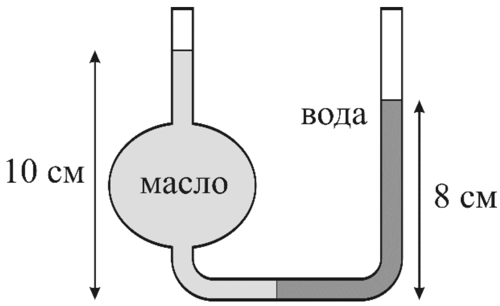
   А) Средняя скорость туриста за все время движения равна 4 км/ч.

   Б) В течение 1 часа (какого-то) турист двигался со скоростью 10 км/ч.

   В) За третий час турист прошел 6 км.

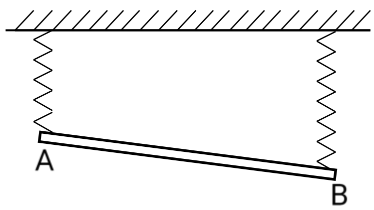
   Г) Первую половину пути турист прошел на 2 часа быстрее, чем вторую половину.

   Предложите график зависимости пройденного туристом пути S от времени t, удовлетворяющий всем условиям задачи. У задачи может оказаться много решений, вам достаточно предложить какое-нибудь одно.
3. На рисунке изображен термометр оригинальной конструкции. Левая его часть заполнена маслом, а правая – водой, концы трубок открыты. В изучаемом диапазоне температур вода и корпус термометра не расширяются при нагревании, а масло при нагреве на каждый 1°C увеличивает свой объем на 0,001 от исходного. Площадь сечения всех тонких трубочек равна $S = 0{,}1$ см^2. Первоначально объем масла в термометре равен V = 90 мл, при этом уровень масла в левой части сосуда 10 см, а уровень воды в правой части сосуда 8 см.

   А) Влево или вправо будет смещаться граница масла и воды при нагревании?

   Б) На какое расстояние сместится граница масла и воды при росте температуры на 1°C?
4. Однородный стержень массы $m = 1$ кг и длины $L = 1$ м, висит на двух пружинах (см. рис). Пружины в нерастянутом состоянии имеют равную длину, причем коэффициент жесткости левой пружины в $n = 4$ раза больше правой.

   А) Груз какой массы надо подвесить в точку A, чтобы стержень стал горизонтален?

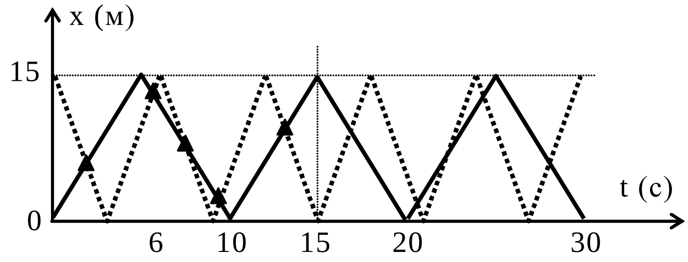
   Б) На каком расстоянии от точки A нужно подвесить груз массы $3m$, чтобы стержень стал горизонтален?

   Примечание: коэффициент жесткости k пружины – это отношение её силы упругости к изменению её длины Δl от нерастянутого расстояния: $F = k\cdot\Delta l$.

Решения вступительных работ по физике

2008 год

1. Движения (и графики этого движения) каждого муравья повторяются. Первого муравья с периодом $T_1 = 2l/V_1 = 2 \cdot 15/3 = 10$ *мин*, второго – с периодом $T_2 = 2 \cdot 15/5 = 6$ *мин*.

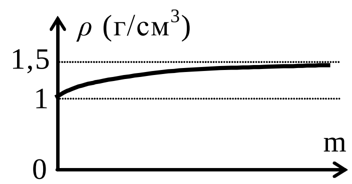


Ответ: а) см. график.

Для того чтобы найти число встреч, можно построить графики движения муравьев за 1 *час* и подсчитать общее число их пересечений. Но можно заметить, что за каждые 15 *мин* (см. график) 1-й муравей сделает 3 пробежки вдоль линейки, а 2-й – 5 пробежек. И через 15 минут они окажутся одновременно на концах линейки, только поменявшись местами. Значит, далее каждые 15 минут ситуация будет повторять стартовую. За это время произойдет 5 встреч (см. точки пересечений графиков). Следовательно, за 1 час (4 раза по 15 *мин*) произойдет 20 встреч.
Ответ: б) 20 раз.

2. Запишем правило рычага: $F_1L_1 = F_2L_2$. В первом случае $F_1 = mg$ и $F_2 = 3mg$. Следовательно $mgL_1 = 3mgL_2$, т.е. $L_1 = 3L_2$.
Во втором случае $F_2 = 4mg - 4\rho_в gV$, и правило рычага: $mgL_1 = (4mg - 4\rho_в gV)L_2$. Подставив в него найденное ранее соотношение для длин плеч (они не изменились), получим: $3m = 4m - 4\rho_в V$. Откуда $m = \rho V = 4\rho_в V$. Т.е. плотность шариков в 4 раза больше плотности воды и равна 4000 *кг/м*^{3}.
Ответ: 4000 *кг/м*^{3}.

3. Для нахождения средней плотности нужно общую массу разделить на общий объем смеси: $\rho = m_{общ}/V_{общ} = (m_ч + m_м)/(V_ч + V_м) = (m_ч + m_м)/(m_ч/\rho_ч + m_м/\rho_м)$. Подставив числа, получим $\rho = (1000+1000)/(1000/1 + 1000/1{,}5) = 1{,}2\ г/см^3$.
Ответ: а) 1200 *кг/м*^{3}.

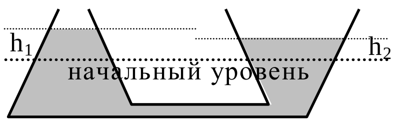


Воспользуемся той же формулой для средней плотности, но запишем ее для произвольной массы молока: $\rho = (1000 + m)/(1000 + m/1{,}5)$, где m – масса молока в граммах. Когда молока нет (т.е. $m = 0$), средняя плотность равна плотности чая 1 *г/см*^{3}. При добавлении молока плотность плавно растет. Если же молока стало очень много (m много больше 1000 *г*), то средняя плотность постепенно приближается к плотности чистого молока 1,5 *г/см*^{3}.
Ответ: б) см. график.

4. Если не учитывать силу сопротивления воды, то на каждый кубик действуют только сила Архимеда и сила тяжести: $ma = F_{арх} - F_т = \rho_в gV - mg$. Подставив вместо массы $m = \rho V$, получим $\rho a = g(\rho_в - \rho)$. Откуда видно, что ускорение кубика

зависит только от его плотности и не зависит от размера $a = g(\rho_в/\rho - 1)$. Таким образом, понятно, что кубики разного размера будут всплывать одинаково.
Ответ: а) всплывут одновременно.

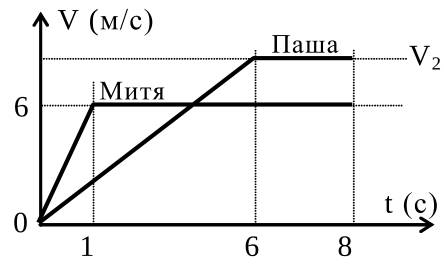
С учетом силы сопротивления воды 2-й закон Ньютона будет выглядеть иначе: $ma = F_{арх} - F_т - F_{сопр} = \rho_в gV - mg - F_{сопр}$. Подставив массу, получим для ускорения $a = g(\rho_в/\rho - 1) - F_{сопр}/\rho V$. Так как сила сопротивления пропорциональна площади грани кубика $F_{сопр} \sim S$, то для сравнения ускорений нужно посмотреть на отношение площади к объему S/V. Площадь кубика с длиной ребра R равна R^2, а объем равен R^3. Следовательно, получаем $S/V = 1/R$. Т.е., чем больше размер кубика, тем меньше отношение площади его грани к объему. Таким образом, с увеличением размера ускорение кубика будет увеличиваться, и кубик большего размера будет всплывать быстрее.
Ответ: б) большой всплывет быстрее.



5. При нагревании вода расширяется, т.е. уменьшается ее плотность, а объем воды увеличивается. При одинаковом нагреве сосудов все эти изменения будут так же одинаковы. Объемы воды в сосудах вначале одинаковы. Разница между сосудами заключается только в их форме: левый сосуд кверху сужается, а правый – расширяется. Следовательно, при одинаковом изменении объема воды в левом сосуде уровень воды поднимется выше, чем в правом: $h_1 > h_2$. Тогда гидростатическое давление $p = \rho gh$ в левом сосуде окажется больше, чем в правом – и вода потечет слева направо, чтобы давления сравнялись.
Ответ: из левого сосуда в правый.

2009 год

1. Для решения удобно построить график зависимости скоростей Мити и Паши от времени. Пройденный путь – площадь под графиком $V(t)$. Для пути, который пробежал Митя, это сумма площадей треугольника (до 1 *сек*) и прямоугольника (с 1 по 8 *сек*): $s = 6\cdot 1/2 + 6\cdot(8-1) = 45\,м$. Путь Паши такой же.

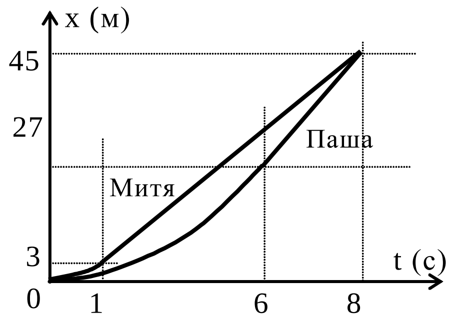


Ответ: а) 45 *м*.

Зная путь, из этого же графика теперь легко найти скорость, которую развил Паша: $s = V_2\cdot 6/2 + V_2\cdot(8-6) = 45\,м$. Откуда $V_2 = s/5 = 9\,м/с$.

Ответ: б) 9 *м/с*.

Зная все величины, можно построить график зависимости координат от времени. До конца 1 *сек* скорость Мити росла (на графике – участок кривой с все увеличивающимся углом наклона), и за это время он пробежал 3 *м*. Далее он двигался с постоянной скоростью (на графике – прямая). Паша разгонялся первые 6 *сек*, преодолев за это время 27 *м*, а затем его скорость была постоянна.



Ответ: в) см. график.

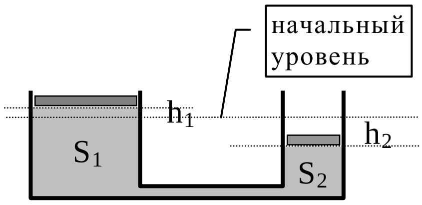
2. Для любого плавающего объекта выполняется равенство силы тяжести и силы Архимеда: $\rho g V = \rho_в g V_{погр}$. Так как леденцы Кости плавают, наполовину погрузившись в воду, то их плотность $\rho_1 = \frac{1}{2}\rho_в$. Плотность леденцов Вани, следовательно: $\rho_2 = \frac{3}{4}\rho_в$. Пусть в общей конфете x леденцов Кости, y – леденцов Вани. Тогда ее полный объем $(x+y)V$, где V – объем одного леденца. При плавании конфеты должно выполняться равенство: $xV\rho_1 + yV\rho_2 = \frac{2}{3}(x+y)V\rho_в$. Подставив плотности леденцов и сократив в равенстве $V\rho_в$, получим: $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = \frac{2}{3}(x+y)$. Из этого уравнения нельзя найти x и y, можно только выяснить соотношение между ними: $y = 2x$. Т.е. в конфете леденцов Вани должно быть в 2 раза больше, чем леденцов Кости.
Ответ: любое количество леденцов в нужном соотношении: 1+2, 2+4 и т.д.

3. Так как диаметры черепашек отличаются в 2 раза, то их объемы – в 8 раз. Разумно предположить, что плотности черепашек одинаковы. Т.е. их массы тоже отличаются в 8 раз: $m_1 = 8m_2$ (1).
Обозначим как x расстояние от первой (более тяжелой) черепашки до опоры. Тогда для случая легкой, невесомой доски по правилу рычага: $m_1 g x = m_2 g(1{,}8 - x)$, т.к. длина всей доски равна 1,8 *м*. Учитывая (1), получаем уравнение: $8x = 1{,}8 - x$. Откуда, после подсчета: $x = 0{,}2\,м$.
Ответ: а) 20 *см*.
Если доска имеет массу, равную m_2, то нужно учесть момент ее силы тяжести. Нужно считать, что сила тяжести доски действует в ее середине, на расстоянии 0,9 *м* от каждого края, т.е. на расстоянии $0{,}9 - x$ от точки опоры. В итоге уравне-

ние для моментов получится таким: $m_1gx = m_2g(0,9 - x) + m_2g(1,8 - x)$. Аналогично, учитывая (1), получаем: $8x = 0,9 - x + 1,8 - x$. Откуда $x = 0,27$ *м*.

Ответ: б) 27 *см*.

4. Когда уровень воды в одном из сосудов поднялся на h_1, в другом он опустился на h_2. Убыль объема воды в одном сосуде равна прибыли в другом: $S_1h_1 = S_2h_2$ (1). В любом устойчивом положении давления в разных сосудах на одном уровне равны.



Сначала узнаем массу мальчика. Если предположить, что он сел на меньший поршень S_2, то (обозначив p_0 атмосферное давление): $p_0 + mg/S_2 = p_0 + \rho g(h_1 + h_2)$.
С учетом равенства (1): $m = \rho S_2\left(h_1 + h_2\right) = \rho S_2\left(h_2S_2/S_1 + h_2\right) = \rho S_2h_2\left(S_2/S_1 + 1\right)$.
Подставив числа, получим: $m = 1000 \cdot 1 \cdot 0,04 \cdot \left(1/2 + 1\right) = 60$ *кг*.
Если предположить, что мальчик сел на больший поршень, то после подстановки чисел получим для массы мальчика $m = 1000 \cdot 2 \cdot 0,04 \cdot \left(2/1 + 1\right) = 240$ *кг*, что выглядит просто невероятно.

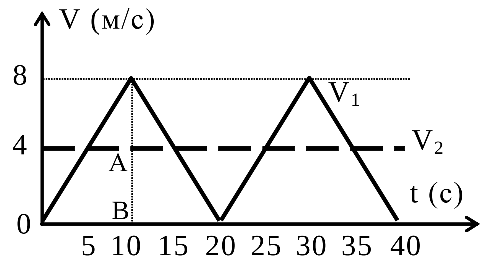
Ответ: а) 60 *кг*.

При сидении мальчика на другом поршне: $p_0 + mg/S_1 = p_0 + \rho g(h_1 + h_2)$. Следовательно, $h_1 = m/\rho S_1\left(1 + S_1/S_2\right) = 60/\left(1000 \cdot 2 \cdot \left(1 + 2/1\right)\right) = 0,01$ *м*.

Ответ: б) 1 *см*.

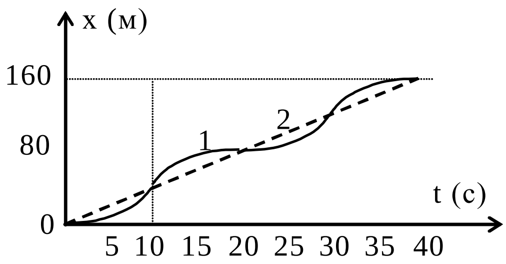
2010 год

1. Скорость второго спортсмена постоянна, т.е. это и есть его средняя скорость. У первого спортсмена средняя скорость $V_{ср} = S_{весь}/t$ будет такой же, когда площадь под графиком скорости (эта площадь равна пройденному пути) совпадет с площадью прямоугольника $04AB$. В первый раз это произойдет в момент времени 10 *сек*. Второй раз – в 20 *сек*. И далее будет повторяться каждые 10 *сек*.



***Ответ:* а)** 10 *с*, 20 *с*, 30 *с*, 40 *с*.

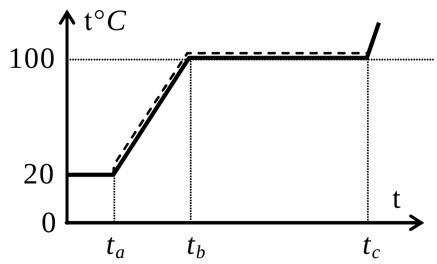
Координата второго спортсмена меняется равномерно, и за 40 *сек* от пройдет 160 *м*. У первого спортсмена до момента времени 5 *сек* скорость меньше – следовательно, меньше угол наклона графика. От 5 *сек* до 10 *сек* скорость больше, чем у второго, т.е. угол наклона графика больше. И каждые 10 *сек* их координаты совпадают.



***Ответ:* б)** см. график.

2. По условию толщина деревянных корпусов у всех матрешек одинакова. Так как порода дерева тоже одинаковая, то одинаковы плотности корпусов матрешек. Следовательно, и объемы и массы дерева, из которых изготовлены матрешки, относятся как их площади поверхности, т.е. как квадраты высот: $m_1 : m_2 : m_3 : m_4 : m_5 = V_1 : V_2 : V_3 : V_4 : V_5 = S_1 : S_2 : S_3 : S_4 : S_5 = 1:4:9:16:25$. В итоге, общая масса матрешек $M_{общ} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = m_1 + 4m_1 + 9m_1 + 16m_1 + 25m_1 = 55m_1$.
Ответ: 990 *г*.

3. Металлический нагреватель очень быстро приобретает ту же температуру, что и вода, практически 20°*C*. Затем он приблизительно равномерно от момента включения t_a по мере нагревания воды увеличивает свою температуру до момента t_b, когда вода начинает кипеть. И пока вода кипит, температура меняться не будет. Если нагреватель не выключить в тот момент, когда вся вода выкипит (на графике t_c), то его температура начнет быстро расти дальше.



Можно учесть и то, что температура нагревателя всегда должна быть чуть выше температуры окружающей воды, иначе нагреватель не будет отдавать воде тепло. Более точный график нарисован пунктиром.
Ответ: см. график.

4. Объем шара должен быть меньше определенного, чтобы водолаз вместе с балластом и шаром мог тонуть: $\left(M_{чел} + m_{бал} + m_{шар}\right)g > \left(V_{чел} + V_{бал} + V_{шар}\right)\rho_{воды}g$.

Сократив g и выразив все через заданные в условии величины, получим: $\left(M_{чел} + m_{бал} + \rho_{шар} V_{шар}\right) > \left(M_{чел}/\rho_{чел} + m_{бал}/\rho_{бал} + V_{шар}\right)\rho_{воды}$. Численно, выразив плотности в $кг/м^3$: $\left(72 + 8 + 200 \cdot V_{шар}\right) > \left(72/1200 + 8/4000 + V_{шар}\right) \cdot 100$. Откуда после преобразований и подсчетов: $V_{шар} < 0{,}0225\, м^3$.

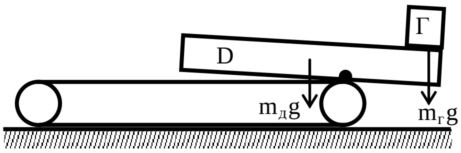
С другой стороны, объем шара должен быть достаточен для того, чтобы с ним, но без балласта, водолаз мог всплыть: $\left(M_{чел} + m_{шар}\right)g < \left(V_{чел} + V_{шар}\right)\rho_{воды} g$.

Производя аналогичные действия, получим $\left(72 + 200 \cdot V_{шар}\right) < \left(72/1200 + V_{шар}\right) \cdot 1000$, откуда после расчета: $V_{шар} > 0{,}015\, м^3$.

Ответ: $0{,}015\, м^3 < V_{шар} < 0{,}0225\, м^3$.

5. Когда транспортер движется по ровной дороге со скоростью V, верхняя часть его ленты движется относительно дороги со скоростью $2V$. Т.к. ни груз, ни доска по ленте не скользят, то и скорость груза относительно дороги $2V = 10\, см/с$.

Ответ: а) 10 *см/с*.



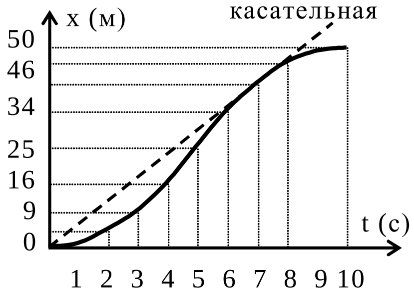
Доска начнет терять равновесие, когда ее выдвинувшийся край с грузом начнет перевешивать. Считая, что груз маленький и лежит с самого края, а сила тяжести доски приложена к ее центру масс, по правилу рычага: $m_г g l = m_д g(L/2 - l)$, где L – длина доски, l – длина ее свешивающейся части. Откуда $l = m_д L/2(m_д + m_г)$.

Масса доски равна $m_д = \rho \cdot Lab = 500 \cdot 6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}02 = 30\, кг$. Подставив все известные величины, получим $l = 30 \cdot 3/(30 + 10) = 2{,}25\, м$. Именно такое расстояние должна проехать доска относительно транспортера к этому моменту. Скорость доски относительно транспортера равна скорости ленты V. Поэтому равновесие доски нарушится через время $\Delta t = l/V = 225\, см/5\, см/с = 45\, с$.

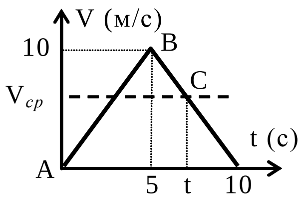
Ответ: б) 45 *с*.

2011 год

1. Построить график зависимости координаты от времени можно было, например, по точкам, используя, что изменение координаты – это площадь под графиком $V(t)$. Или можно было использовать формулы для равноускоренного движения (если они известны).
Ответ:* *а) см. график.



Средняя скорость в этой ситуации равна отношению координаты ко времени $V_{ср} = x/t$. Поэтому она максимальна тогда, когда наклон кривой, проведенной из начала в точку на графике изменения координаты, максимален. Т.к. в этом случае максимально отношение координаты ко времени. Как видно из проведенной касательной, $V_{ср}$ максимальна в момент времени $t \approx 7\,с$.



Возможно и другое, точное, решение. Средняя скорость возрастает, пока мгновенная скорость $V > V_{ср}$. Т.к. тогда приращение координаты за следующий промежуток времени Δt будет $\Delta x = V \cdot \Delta t > V_{ср} \cdot \Delta t$, и тем самым общая средняя скорость возрастет. Тогда на графике зависимости скорости от времени нужно найти время t, когда площадь под графиком $V(t)$ от 0 до t в точности равна $V_{ср}t$, т.е. $V_{ср}t = S_{фигуры\ ABCt} = S_{\Delta\ AB10} - S_{\Delta\ Ct10}$. Откуда получается (с учетом известных чисел) $V_{ср}t = 50 - \frac{1}{2}V_{ср}\left(10 - t\right)$ (1). Из подобных треугольников $10Ct$ и $10B5$ видно, что $V_{ср}/10 = \left(10 - t\right)/5$, т.е. $V_{ср} = 20 - 2t$. После подстановки $V_{ср}$ в уравнение (1) получается $50 - \left(10 - t\right)\left(10 - t\right) = \left(20 - 2t\right)t$. Откуда $t^2 = 50$.
Ответ:* *б) $\sqrt{50} \approx 7{,}07с \approx 7с$.

Вес тела в воздухе $F_m = mg = \rho_m Vg$ (силу Архимеда в воздухе не учитываем). Вес тела в жидкости $F = F_m - F_{арх} = \left(\rho_m - \rho_{жидк}\right)Vg = mg\left(1 - \rho_{жидк}/\rho_m\right)$.
Следовательно, вес железного шарика, погруженного в бензин, равен $F_1 = mg\left(1 - \rho_{бен}/\rho_{жел}\right) = mg\left(1 - 0{,}7/7{,}5\right) = mg \cdot 0{,}907$, т.е. он станет меньше веса этого шарика в воздухе в 0,907 раз. Для серебряного шарика, погруженного в воду: $F_2 = mg\left(1 - \rho_{вод}/\rho_{сер}\right) = mg\left(1 - 1/10{,}5\right) = mg \cdot 0{,}905$. Следовательно, вес серебряного шарика уменьшится в 0,905 раз.
Если шарики имеют одинаковую массу, то в воздухе рычаг находится в равновесии, когда его плечи равны. При погружении шариков в жидкости равновесие нарушится, т.к. изменится вес тел. При этом железный шарик будет перевешивать.
Если же шарики имеют одинаковый объем, то в воздухе рычаг будет в равновесии с разными плечами, а вес тел будет равен соответственно $F_{жел} = \rho_{жел}Vg = Vg \cdot 7{,}5$ и $F_{сер} = \rho_{сер}Vg = Vg \cdot 10{,}5$. Впрочем, для решения это не важно, потому что при погружении шариков в жидкости вес каждого из них уменьшается в одно и то же количество раз, независимо от соотношения их масс и объемов. Таким образом, и в этом случае железный шарик будет перевешивать.
Ответ: в обоих случаях равновесие нарушается, перевешивает железный шарик.

2. При увеличении всех размеров в 3 раза площадь одной стороны монеты возрастает в $3^2 = 9$ раз. Если давление монеты на стол (ее масса 4 *г*) равно $p_м = m_м g/S_м = 4 \cdot g/S_м$, то давление копии $p_к = m_к g/S_к = 30 \cdot g/9S_м$. Таким образом, давление монеты в $p_м/p_к = 4 \cdot 9/30 = 1,2$ раз больше, чем ее копии.
***Ответ:* а)** давление монеты в 1,2 раза больше, чем копии.

Копия состоит из серебра и алюминия $V_к = V_{сер} + V_{ал}$. Объем копии в $3^3 = 27$ раз больше объема монеты, следовательно $27 \cdot V_м = V_{сер} + V_{ал}$. Так как монета полностью серебряная: $27 \cdot m_м/\rho_{сер} = m_{сер}/\rho_{сер} + m_{ал}/\rho_{ал}$. Если обозначить массу серебра в копии как $x = m_{сер}$, то $m_{ал} = 30 - x$. Подставив числа в уравнение $27 \cdot 4/10,8 = x/10,8 + (30 - x)/2,7$, после вычислений получим $x = 4$.
***Ответ:* б)** 4 *г*.

3. Сначала зонд опускается в воде и показывает давление $p = p_{атм} + \rho_в gh$. Из графика видно, что за $t_1 = 40\,с$ давление выросло на $\Delta p_1 = 20\,кПа$. Рост давления обусловлен давлением столба воды $\Delta p_1 = \rho_в gh_1$. Таким образом, скорость погружения зонда в воде $V = h_1/t_1 = \Delta p_1/\rho_в gh_1 = 20000/(1000 \cdot 10 \cdot 40) = 0,05\,м/с = 5\,см/с$.
***Ответ:* а)** 5 *см/с*.

За время $t_2 = 20\,с$ (между 40-й и 60-й секундами) зонд погрузился на $h_2 = Vt_2$. Так как наклон графика изменился, это погружение происходит в среде с другой плотностью, т.е. в иле. За это время изменение давления составило $\Delta p_2 = 12\,кПа$. Отсюда плотность ила $\rho_и = \Delta p_2/gVt_2 = 12000/(10 \cdot 0,05 \cdot 20) = 1200\,кг/м^3 = 1,2\,г/см^3$.
***Ответ:* б)** 1,2 *г/см*^{3}.

4. Относительно течения реки Пятачок неподвижен, а Винни-Пух относительно воды движется. Значит, относительно воды и Пятачка Винни движется с одной и той же скоростью $V_в$. Поэтому все заплывы от Пятачка и к Пятачку происходят для Винни-Пуха с одной и той же скоростью. Следовательно, каждый заплыв туда и возвращение обратно к Пятачку происходят за одинаковое время. В итоге, если сложить времена всех удалений (движений по течению) и всех приближений (движение против течения), то они окажутся одинаковыми. Иными словами, Винни-Пух половину времени $t/2$ двигался по течению, и ровно столько же времени $t/2$ он плыл против течения. Относительно берега Винни проплыл по течению дистанцию $L_{по} = (V_в + V_{течения}) \cdot t/2$, а против течения $L_{против} = (V_в - V_{течения}) \cdot t/2$. В сумме $L_{Винни} = L_{по} + L_{против} = V_в t$. Пятачок за это время проделал путь $L_{пят} = V_{течения} t$. По условию путь Пятачка в 3 раза меньше, т.е. $V_{течения} = V_в/3 = 1,5\,км/ч$.
Ответ: 1,5 *км/ч*.

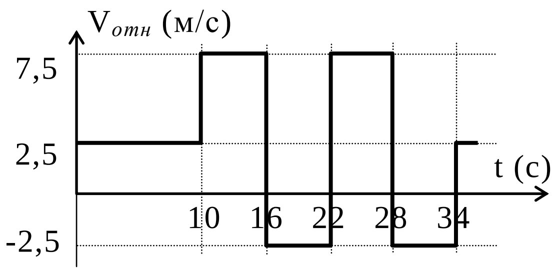
2012 год

1. Удобнее записать все скорости в *м/с*: скорость трамвая $V_{тр} = 36\,км/ч = 10\,м/с$, скорость Димы $V_{Димы} = 27\,км/ч = 7{,}5\,м/с$.

   В конце Вова сел в трамвае на то же место. Следовательно, на изменение расстояния между ним и Димой повлияло лишь движение трамвая относительно Димы. Значит, перемещение Вовы $S = V_{отн} \cdot t = (V_{тр} - V_{Димы}) \cdot t$. Подставляя числа (скорости – в *м/с*), получаем, что общее время движения $t = 34\,с$.

   Вова пробежал по трамваю 2 раза в одну сторону и 2 раза обратно, т.е. всю длину салона трамвая он пробежал 4 раза. Таким образом, суммарное время его пробежки $t_{пр} = 4L/V_{Вовы}$, где L – длина салона трамвая. Так как Вова начал свою пробежку через 10 *с* после обгона, то $t_{пр} = t - 10 = 24\,с$. Скорость Вовы относительно трамвая равна 5 *м/с*, поэтому $L = V_{Вовы} \cdot t_{пр}/4 = 5 \cdot 24/4 = 30\,м$.

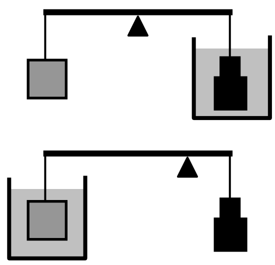
   Ответ: а) 30 *м*.

   Когда Вова сидит, его скорость относительно Димы $V_0 = V_{тр} - V_{Димы} = 2{,}5\,м/с$. Когда бежит относительно трамвая вперед $V_1 = V_{тр} + V_{Вовы} - V_{Димы} = 7{,}5\,м/с$. Когда бежит назад $V_2 = V_{тр} - V_{Вовы} - V_{Димы} = -2{,}5\,м/с$.

   В самом начале Вова задержался на 10 *с*, а затем каждая его пробежка по салону занимала $t_{пр}/4 = 6\,с$.

   Ответ: б) см. график.

2. 

   Вес тела в воздухе: $F_т = mg = \rho_т V g$ (силу Архимеда в воздухе не учитываем).

   Вес тела в воде: $F = F_т - F_{арх} = \rho_т V g - \rho_в V g = (\rho_т - \rho_в) V g$.

   Правило рычага: $F_1 l_1 = F_2 l_2$.

   Тогда для первого случая (гиря в воде, равные плечи рычага $l_1 = l_2 = l$): $\rho_к V_к g \cdot l = (\rho_г - \rho_в) V_г g \cdot l$ (буквенные индексы "к" – кубик, "г" – гиря, "в" – вода). Для второго случая (кубик в воде, плечи рычага $l_1 = 4/5L$ и $l_2 = 1/5L$, где L – общая длина рычага): $(\rho_к - \rho_в) V_к g \cdot 4/5L = \rho_г V_г g \cdot 1/5L$.

   Получилось два уравнения: $\rho_к V_к = (\rho_г - \rho_в) V_г$ (1) и $4(\rho_к - \rho_в) V_к = \rho_г V_г$ (2). Для решения можно сразу подставить в них числа. Но возможно проще разделить правые и левые части уравнений друг на друга: $\rho_к / 4(\rho_к - \rho_в) = (\rho_г - \rho_в)/\rho_г$. Это уравнение можно решить алгебраически, получить $\rho_г = 4\rho_в \cdot (\rho_к - \rho_в)/(3\rho_к - 4\rho_в)$ и затем подставить известные значения плотностей. Но можно сразу подставить числа $1600/4(1600 - 1000) = (\rho_г - 1000)/\rho_г$, упростить $2/3 = 1 - 1000/\rho_г$ и из подсчета получить $\rho_г = 3000\,кг/м^3$.

   Ответ: 3000 *кг/м*^{3}.

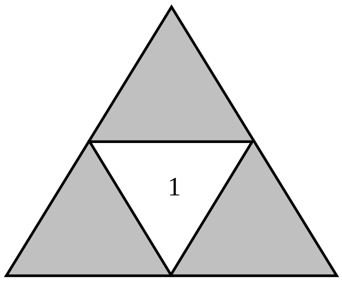
3. При погружении в воду на динозавра, как и на любое другое тело, будет действовать сила Архимеда. Тем самым, вес динозавра уменьшается и, следовательно, уменьшается его давление на грунт.

   Давление маленького динозавра (на суше) $p_м = M_м g/S_м = \rho V_м g/S_м$, где $V_м$ – объем динозавра, ρ – его плотность, $S_м$ – суммарная площадь его ног. Большой динозавр частично погружен в воду, поэтому для посчета его давления на дно нцжно учесть силу Архимеда: $p_б = \left(M_б g - \rho_{воды} V_{погр} g\right)/S_б$. Так как он погружен в воду на половину, то $V_{погр} = V_б/2$. Поскольку плотность динозавра примерно равна плотности воды, получаем: $p_б = \left(\rho V_б g - \rho V_б g/2\right)/S_б = \rho V_б g/2S_б$. В итоге, отношение давлений: $p_б/p_м = \rho V_б g/2S_б : \rho V_м g/S_м = 0{,}5 \cdot V_б/V_м \cdot S_м/S_б$.

   Когда все размеры (длина, высота, ширина) увеличиваются в 3 раза, все площади (в том числе и площади ног) увеличиваются в $3^2 = 9$ раз, а объем возрастает в 27 раз. Поэтому $p_б/p_м = 0{,}5 \cdot 27 \cdot 1/9 = 1{,}5$.

   Ответ: б) давление большого динозавра в 1,5 раза больше, чем малого.

4. Хотя в условии прямо не сказано, но на рисунке хорошо видно: треугольные вырезы делают так, что вершины вырезаемого треугольника находятся на середине сторон "большого" треугольника. Получаются четыре "меньших" треугольника одинаковой площади, один из которых вырезают. Следовательно, при первом вырезе от площади снежинки остается три четверти: $S_1 = \frac{3}{4} S_0$.



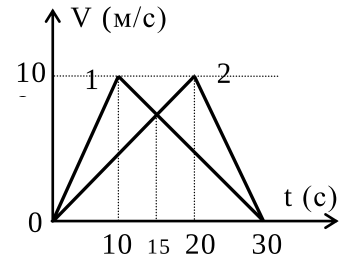
   Делая второй вырез, поступают точно так же. Поэтому $S_2 = \frac{3}{4} S_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 S_0$. После пятого этапа от площади снежинки останется $S_5 = \left(\frac{3}{4}\right)^5 S_0$.

   Масса бумажной фигуры $M = \rho V = \rho h S$, где ρ – плотность бумаги, h – ее толщина, S – площадь фигуры. Так как при вырезании изменяется только площадь снежинки, то $M_5/M_0 = S_5/S_0$, где M_0 – масса исходного треугольника. В итоге $M_5 = M_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 102{,}4 \cdot \left(243/1024\right) = 24{,}3\ г$.

   Ответ: 23,4 *г*.

2013 год

1. Средняя скорость равна отношению всего пройденного пути ко времени $V_{ср} = s_{общ}/t_{общ}$. Пройденный путь можно определить как площадь под графиком $V(t)$. У обоих спортсменов общая площадь под графиками одинакова (по 150 *м*), и одинаково время движения (по 30 *с*).



Ответ: а) средние скорости спортсменов одинаковы $V_{ср1} = V_{ср1} = 150/30 = 5\ м/с$.

До момента времени 15 *с* первый спортсмен имеет скорость больше второго. Следовательно, до этого момента первый обгоняет второго и удаляется от него (расстояние между спортсменами растет). Затем $V_1 < V_2$, и второй спортсмен начинает догонять первого.

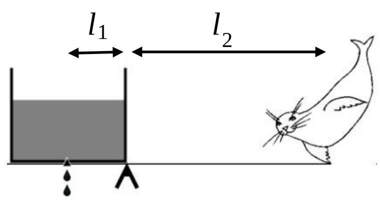
Ответ: б) максимальное удаление в момент 15 *с*; впереди первый спортсмен.

Чтобы найти максимальное удаление спортсменов друг от друга, нужно найти площадь под графиком $V(t)$ для каждого из них к моменту времени 15 *с*. Учитывая, что их скорости в этот момент $V = 10 \cdot 15/20 = 7{,}5\ м/с$, находим:

$$s_1 = 10 \cdot \frac{10}{2} + \frac{(10+7{,}5)\cdot 5}{2} = 93{,}75\ м \text{ и } s_2 = 7{,}5 \cdot \frac{15}{2} = 56{,}25 м.$$

Ответ: в) $s_1 - s_2 = 37{,}5\ м$.

2. По правилу рычага $m_1 g l_1 = m_2 g l_2$, где m_1 – масса воды в сосуде, m_2 – масса тюленя, $l_1 = l_{сосуда}/2 = 0{,}5\ м$ – расстояние от точки опоры до центра масс сосуда, $l_2 = l_{общ} - l_{сосуда} = 4\ м$ – расстояние от точки опоры до тюленя. Масса воды в сосуде $m_1 = \rho S h$, где S – площадь дна сосуда, h – искомый уровень. Поэтому в итоге получаем: $h = \dfrac{m_2 l_2}{\rho S l_1} = \dfrac{50\cdot 4}{1000\cdot 1\cdot 0{,}5} = 0{,}4\ м$.



Ответ: а) 40 *см*.

Когда вода утекает, ее масса убывает со скоростью V=2 *кг/с*. Следовательно, момент силы слева (произведение силы на ее плечо) убывает. Для сохранения равновесия тюлень должен уменьшать момент силы справа, т.е. приближаться к точке опоры. Пусть он движется со скоростью U:

$$(m_1 - Vt)l_1 = m_2(l_2 - Ut) \;\Rightarrow\; Vl_1 = m_2 U \;\Rightarrow\; U = Vl_1/m_2 = 2\cdot 0{,}5/50 = 0{,}02\ м/с.$$

Ответ: б) 0,02 *м/с*.

3. Сила тяжести $F_т = mg = \rho V g$, где ρ – плотность тела, V – его объем. А сила, действующая вверх, равна $F_о = kL$, где L – длина границы, вдоль которой тело касается с открытой поверхностью воды. Действительно, рассмотрев, к примеру, сверху и сбоку плавающую в воде иголку, мы видим, что эта сила действует вдоль всей границы. Коэффициент k связан с так называемым поверхностным натяжением воды и свойствами водо-отталкивания (несмачивания) парафина. Знать величину этого коэффициента нам не нужно, достаточно понимать, что у покрытых парафином поверхностей (иголки и Незнайки) он пример одинаков.

При увеличении размеров тела в N раз длина границы с поверхностью воды растет как N, а объем тела – как N^3. Поэтому с ростом размеров тела сила тяжести растет гораздо быстрее, чем сила выталкивания. Для иголки $F_m \approx F_o$ (иголка практически не погружается в воду, поэтому силу Архимеда не учитываем), а для Незнайки, так как его размеры больше, $F_m > F_o$, и поэтому он погружается в воду.

Более детально: $\frac{F_{m1}}{F_{m2}} = \frac{\rho_2 V_2}{\rho_1 V_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot N^3; \quad \frac{F_{o1}}{F_{o2}} = \frac{kL_1}{kL_2} = N$.

Эффект быстрого возрастания объема при большем N важнее как возможного изменения формы тела, так и уменьшения его плотности.

Ответ: Незнайка только за счет сил поверхностного выталкивания, не погружаясь в воду (т.е., без действия существенной силы Архимеда), плавать не может.

4. Пока вся система плавает, сила Архимеда равна силе тяжести $F_{Арх\ общ} = F_{т\ общ}$. Если таз с мудрецами утонет, то $F_{Арх\ общ} < F_{т\ общ}$. При этом общая сила тяжести не изменится. Следовательно, меньше станет $F_{Арх\ общ} = \rho g V_{погр}$, т.е. объем погруженной в воду части системы станет меньше.
   Ответ: а) уровень воды уменьшится.

   Пока вся система плавает, с надуваемой ли подушкой или без нее, общая сила Архимеда $F_{Арх\ общ} = F_{т\ общ}$ постоянна, поэтому уровень воды не меняется. Следовательно, отметка на линейке, закрепленной на дне (линейка мудреца В) меняться не будет.
   Если накачка воздуха идет достаточно быстро, то относительно воды таз всплывает (все бóльшая часть силы Архимеда, а значит, и погруженного объема, приходится на подушку, а общий погруженный объем не изменяется). Поэтому линейка мудреца А вместе с тазом поднимается, а отметка уровня на ней уменьшается.
   Ответ: б) уровень воды относительно линейки мудреца В не меняется, относительно линейки мудреца А – уменьшается.

5. Так как шляпа сделана из сверхплотного тонкого материала, то ее объем (самой шляпы, а не объем внутри шляпы) очень мал, и силу Архимеда, действующую на нее, можно не учитывать.
   По условию плотность воздуха мала, и силу тяжести воздушного пузыря можно не учитывать. Следовательно, в момент начала всплытия сила Архимеда, действующая на пузырь воздуха под цилиндром, уравновесила (а затем и превзошла) силу тяжести шляпы: $\rho_{воды} V_{воздуха} g = mg$. Отсюда, подставив значения, получаем $V_{воздуха} = m/\rho_{воды} = 1/1000 = 0{,}001\ м^3$.
   Ответ: а) $0{,}001\ м^3$.

   Обозначим высоту пузыря воздуха в цилиндре как x.
   Тогда $V_{воздуха} = Sx = m/\rho_{воды} \quad \Rightarrow \quad x = m/S\rho_{воды} = 1/0{,}01 \cdot 1000 = 0{,}1\ м$.
   Давление воздуха равно давлению воды там, где они соприкасаются, т.е. на нижней границе пузыря, на глубине $(H - h + x)$. В итоге получаем:
   $p_{воздуха} = p_{атм} + \rho_{воды} g (H - h + x) = 100000 + 1000 \cdot 10 \cdot (2 - 0{,}5 + 0{,}1) = 116000\ Па$.
   Ответ: б) $1{,}16 \cdot 10^5\ Па$.

2014 год

1. При реальном падении значимы сила тяжести и сила сопротивления воздуха. Сравним их влияние на человека и муравья. При увеличении линейных размеров тела (длины, ширины и высоты) в N раз, площадь его поверхности увеличивается в N^2 раз, а объем – в N^3 раз. Сила тяжести зависит от массы, которая пропорциональна объему, то есть увеличивается в N^3 раз, а сила сопротивления воздуха растет не быстрее площади, то есть в N^2 раз.
   Мы видим, что сила сопротивления растет медленнее, чем сила тяжести, поэтому крупным телам, чтобы слишком не разгоняться и не разбиться, нужна дополнительная площадь для увеличения силы сопротивления (например, парашют). А легкому муравью, чтобы уравновесить силу тяжести уже при небольших, безопасных скоростях и больше не разгоняться, "хватает" для сопротивления площади собственного тела – он сам себе парашют.

2. Размеры и форма монет не меняются. Следовательно, объем дешевой монеты равен объему дорогой (золотой): $V = V_{деш} = V_{зол} = M/\rho_{зол} = 98/19{,}6 = 5\,см^3$, где М – масса золотой монеты. Если дешевая монета перестала тонуть в ртути, это означает, что ее средняя плотность стала не больше плотности ртути: $\rho_{деш} \le \rho_{рт}$. Тогда ее масса $m = \rho_{деш} \cdot V \le \rho_{рт} \cdot V = 13{,}6 \cdot 5 = 68\,г$, т.е. она должна быть не менее чем на 30 *г* легче золотой монеты.
   ***Ответ:* а)** минимум на 30 *г*.

   Пусть масса золота в дешевой монете $m_{зол}$, тогда масса серебра в ней $m_{сер} = m - m_{зол}$. Объем золота в монете − $V_{зол} = m_{зол}/\rho_{зол}$, серебра − $V_{сер} = m_{сер}/\rho_{сер}$.

   Тогда $V_{зол} + V_{сер} = V \;\Rightarrow\; \dfrac{m_{зол}}{\rho_{зол}} + \dfrac{m - m_{зол}}{\rho_{сер}} = \dfrac{M}{\rho_{зол}} \;\Rightarrow\; m\dfrac{\rho_{зол}}{\rho_{сер}} - M = m_{зол}\left(\dfrac{\rho_{зол}}{\rho_{сер}} - 1\right) \;\Rightarrow$

   $$\Rightarrow\quad \frac{m_{зол}}{M} = \left(\frac{m}{M}\cdot\frac{\rho_{зол}}{\rho_{сер}} - 1\right)\Bigg/\left(\frac{\rho_{зол}}{\rho_{сер}} - 1\right) \le \left(\frac{68}{98}\cdot\frac{19{,}6}{10{,}8} - 1\right)\Bigg/\left(\frac{19{,}6}{10{,}8} - 1\right) \approx 0{,}32.$$

   Золота в дешевой монете не более 32% от исходной, а так как по условию серебро в серебряном государстве ничего не стоит, то и вся монета стоит не более 32% от чисто золотой.
   ***Ответ:* б)** примерно 32%.

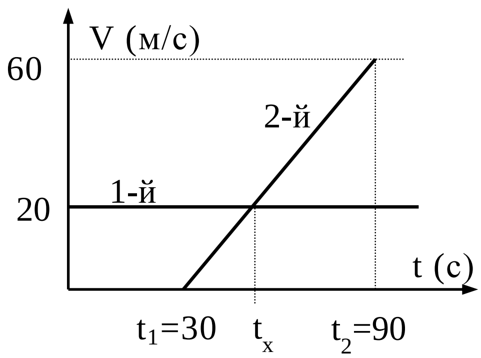
3. Условие плаванья кораблика: $F_т = F_{Арх}$ или $mg = \rho g V_п$, где m – масса кораблика, ρ – плотность воды, $V_п$ – объем погружения кораблика, равный объему вытесненной воды. Так как соленая вода имеет большую плотность, чем пресная, то $\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow V_{п1} > V_{п2}$. Площади дна аквариумов одинаковы, поэтому уровень подъема воды $h \sim V$, следовательно $h_1 > h_2$.
   ***Ответ:* а)** в аквариуме с речной водой уровень поднимется выше.

   Давление на дно: $p = p_{атм} + m_{общ} g/S$, где S – площадь дна, $m_{общ}$ – суммарная масса всего, что находится в аквариуме. Аквариумы – одинаковы, одинаковы и плавающие в них кораблики. В аквариумы налиты равные объемы воды, а так как

плотность соленой воды больше пресной, то масса воды в "морском" аквариуме больше. Следовательно, в нем больше давление на дно.
Ответ: б) в аквариуме с морской водой давление на дно больше.

Интуитивное объяснение такое: раз в пресной воде кораблик погружается сильнее, то и флажок кораблика в пресной воде ниже. Однако на "очевидность" этого ответа есть то возражение, что сам уровень воды в "пресном" аквариуме поднимется выше (см. пункт А). Значит, нужно сравнивать эффект погружения кораблика в воду (*понижение* флажка) с эффектом подъема уровня в аквариуме (*повышение* флажка). Повышение уровня (см. пункт А) определяется величиной $V_п/S_д$, а погружение в воду – величиной $V_п/S_к$, где $S_д$ – площадь дна аквариума, а $S_к$ – площадь днища кораблика. Так как, очевидно, $S_к < S_д$, то $(V_п/S_к) > (V_п/S_д)$. Это означает, что на высоту флажка эффект погружения влияет больше, чем подъем уровня. Следовательно, там, где объем погружения больше (в пресной воде), там флажок ниже.
Ответ: в) в аквариуме с морской водой флажок окажется выше.

4. Графики движения автомобилей изображены на рисунке.



$V_1 = 72\ км/час = 20\ м/с$, $V_{2\max} = 3V_1 = 60\ м/с$.
Первый автомобиль движется с постоянной скоростью, поэтому $V_{1ср} = V_1 = 20\ м/с$. Для вычисления средней скорости движения второго автомобиля нужно найти пройденный им за все время движения путь. Проще всего это сделать, подсчитав площадь под графиком $V(t)$: $s_2 = V_{2\max}(t_0 - t_1)/2 = 60 \cdot (90-30)/2 = 1800\ м$. Следовательно, его средняя скорость равна $V_{2ср} = s/t_0 = 1800/90 = 20\ м/с$.

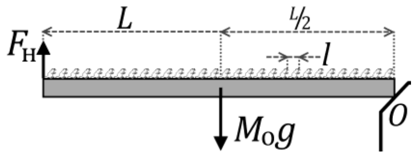
Ответ: б) средние скорости автомобилей одинаковы.

Пока $V_1 > V_2$, первый автомобиль едет быстрее второго, значит, расстояние между ними растет, то есть максимум обгона достигается в момент t_x, когда $V_1 = V_2$.

Найдем t_x из пропорции: $\dfrac{t_x - t_1}{t_0 - t_1} = \dfrac{V_1}{V_{2\max}} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow t_x = \dfrac{t_0 - t_1}{3} + t_1 = \dfrac{90-30}{3} + 30 = 50\ с$.

В момент t_x: $s_1 = V_1 t_x = 20 \cdot 50 = 1000\ м$; $s_2 = \frac{1}{2}V_1 \cdot (t_x - t_1) = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (50-30) = 200\ м$.
Следовательно, в этот момент первый автомобиль обгоняет второй на 800 *м*.
Ответ: в) на 800 *м*.

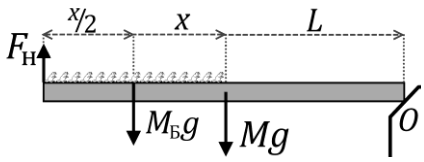
5. Максимальная нагрузка на веревку будет тогда, когда вереница бобров заполняет все бревно. В этой ситуации на бревне $N = L/l = 600/20 = 30$ бобров (здесь L – длина бревна, l – интервал между соседними бобрами).



Их общая масса $M_Б = Nm_1 = 30 \cdot 4 = 120\ кг$. Следовательно, масса бревна вместе с бобрами составит $M_O = M_Б + Nm_1 = 320\ кг$. Рассмотрим равенство моментов сил относительно точки O (точка опоры бревна о берег): $F_н \cdot L = M_O g \cdot L/2$, где $F_н$ – сила натяжения веревки. Тогда $F_н = M_O g/2 = 320 \cdot 10/2 = 1600\ Н$, что меньше 2100 $Н$ – силы, необходимой по условию для разрыва веревки.

Если считать бобров "материальными точками", то на бревне их поместится 31 особь, т.к. число точек на одну больше числа интервалов между ними. Тогда аналогичные подсчеты дают для силы натяжения веревки результат 1620 *Н*, что не изменяет ответ.

Ответ: а) веревка не порвется.



Когда на бревне находится 15 бобров, их общая масса равна 60 кг, и они заполняют бревно до расстояния $x = N_1 l = 15 \cdot 20 = 300\, см$. В этой ситуации правило моментов относительно точки *O* имеет вид:

$$F_н L = Mg\frac{L}{2} + N_1 m_1 g\left(L - \frac{x}{2}\right).$$

Откуда $F_н = \dfrac{Mg}{2} + N_1 m_1 g\left(1 - \dfrac{x}{2L}\right) = \dfrac{200 \cdot 10}{2} + 15 \cdot 4 \cdot 10 \cdot \left(1 - \dfrac{300}{2 \cdot 600}\right) = 1450\, H$.

Ответ: б) 1450 *Н*.

2015 год

1. Пока кокос плывет, действующие на него силы тяжести и Архимеда равны: $m_{кокос}g = \rho_{вод}V_{погр}g$, т.е. $\rho_{кокос} = \rho_{вод} {V_{погр}}\big/{V_{кокос}}$. Из условия известно, что у острова *Ах* кокос погружен на 3/4 объема, и его плотность в этот момент $\rho_{кокос} = {3}\big/{4}\,\rho_{вод}$. Возле острова *Вах* его плотность $\rho_{кокос} = {9}\big/{10}\,\rho_{вод}$. Скорость плывущего кокоса постоянна, т.к. она равна скорости течения и не зависит от степени погружения кокоса. Вода поступает в кокос равномерно, т.е. при неизменном объеме его масса растет равномерно. Остров *Бах* находится посередине между *Ах* и *Вах*, поэтому возле него плотность кокоса:

$$\rho_{Бах} = \frac{\rho_{Ах} + \rho_{Вах}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{9}{10}\right)\rho_{вод} = \frac{33}{40}\rho_{вод} = \frac{33}{40}\cdot 1040\,кг/м^3 = 858\,кг/м^3 .$$

Ответ: а) 858 *кг/м*^{3}.

По мере заполнения водой пустот в кокосе его плотность может превзойти плотность воды, и он может утонуть. Чтобы орех доплыл до Бармалея, плотность кокоса у острова *Страх* должна быть меньше плотности воды. За время путешествия кокоса между любыми двумя островами его плотность изменяется на $\Delta\rho = \rho_{Бах} + \rho_{Ах} = \left(33/40 - 3/4\right)\rho_{вод} = 3/40\,\rho_{вод}$. Следовательно, у острова *Страх* плотность кокоса будет $\rho_{Страх} = \rho_{Вах} + \Delta\rho = \left(9/10 + 3/40\right)\rho_{вод} = 39/40\,\rho_{вод}$, т.е. его плотность окажется меньше плотности воды.

Ответ: б) кокос доплывет до Бармалея.

2. Будем обозначать скорости каждого спортсмена на велосипеде, в плавании и бегом как $V_В$, $V_П$ и $V_Б$, а соответствующие расстояния $AB = L_В$, $BC = L_П$ и $CD = L_Б$. При этом $L_Б = AD - AB - BC = 54 - 24 - 6 = 24\,км$.

Первый спортсмен преодолеет всю дистанцию за время:

$$t_1 = t_{В1} + t_{П1} + t_{Б1} = \frac{L_В}{V_{1В}} + \frac{L_П}{V_{1П}} + \frac{L_Б}{V_{1Б}} = \frac{24}{36} + \frac{6}{6} + \frac{24}{10} = \frac{2}{3} + 1 + \frac{12}{5} = \frac{61}{15}\,час = 244\,мин .$$

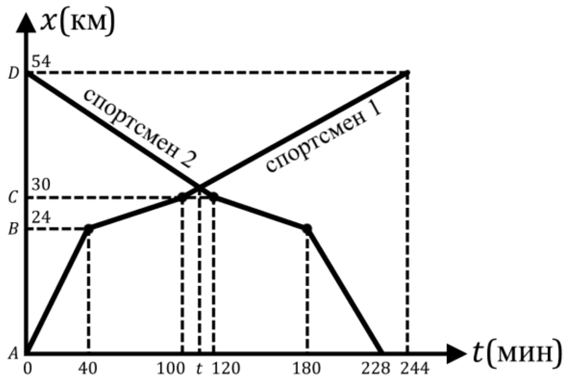
Результат второго спортсмена:

$$t_2 = t_{В2} + t_{П2} + t_{Б2} = \frac{L_В}{V_{2В}} + \frac{L_П}{V_{2П}} + \frac{L_Б}{V_{2Б}} = \frac{24}{30} + \frac{6}{6} + \frac{24}{12} = \frac{4}{5} + 1 + 2 = \frac{19}{5}\,час = 228\,мин .$$

Ответ: а) раньше финиширует второй спортсмен.

Используя полученные результаты и учитывая, что второй спортсмен преодолевает дистанцию в обратном направлении, получаем график.

Ответ: б) см. график.



Как видно из графика, встреча спортсменов произошла во время бега обоих. Координата первого спортсмена в этот момент:

$x_1 = x_C + V_{Б1}(t - t_{В1} - t_{П1}) = 30 + 10\left(t - 5/3\right)$.

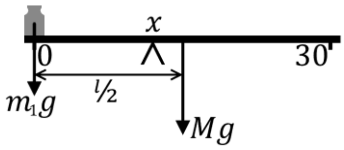
Координата второго: $x_2 = x_D - V_{Б2}t = 54 - 12t$. При встрече $x_1 = x_2$, то есть:

$30+10(t-5/3)=54-12t$. Откуда получаем $22t=72/3$ и $t=72/66\,час$.

Подставляя найденное время встречи в любое из выражений для x_1 или x_2, находим координату встречи $x_1=x_2=450/11\,км$.

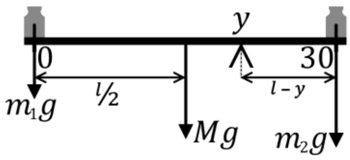
Ответ: в) место встречи – на расстоянии примерно 31 *км* 818 *м* от точки А.

3. Центр масс линейки расположен в ее середине, т.е. на расстоянии $l/2$ от края и, следовательно, на расстоянии $l/2-x$ от точки опоры. Пусть M – масса линейки. Так как гирька уравновешивает линейку, по правилу рычага равны моменты сил: $m_1 g\cdot x=Mg\cdot(l/2-x)$. Откуда $M=\dfrac{m_1 x}{l/2-x}=m_1\dfrac{12}{15-12}=4m_1=80\,г$.



Ответ: а) 80 *г*.

Запишем моменты сил, пытающихся повернуть линейку относительно опоры против часовой стрелки $M_1=m_1g\cdot y+Mg\cdot(y-l/2)$ и по часовой стрелке $M_2=m_2g\cdot(l-y)$.



Когда $y=20\,см$, то перевешивает правый край, линейка пытается повернуть по часовой стрелке, и $M_1<M_2$: $m_1g\cdot y+Mg\cdot(20-l/2)<m_2g\cdot(20-l)$. Когда $y=21\,см$, то перевешивает левый край, а линейка начинает вращаться против часовой стрелки: $m_1g\cdot y+Mg\cdot(21-l/2)>m_2g\cdot(21-l)$. Подставив значение l, получим систему:

$$\begin{cases}20m_1+5M<10m_2\\21m_1+6M>9m_2\end{cases}\Rightarrow\quad 2m_1+\frac{1}{2}M<m_2<\frac{7}{3}m_1+\frac{2}{3}M\quad\Rightarrow\quad 80\,г<m_2<100\,г.$$

Из условия известно, что масса m_2, выраженная в граммах, делится на 10. В найденном промежутке есть только одно такое значение: $m_2=90\,г$.

Ответ: б) 90 *г*.

4. Два важных соображения: в колодце, как сообщающемся с прудом сосуде, будет всегда устанавливаться такой же уровень воды, как и в пруду, а поскольку площадь колодца мала, при вычислении уровня в пруду можно не учитывать возможное перетекание воды из пруда в колодец и обратно. Пока льдина плавает в пруду без грузовика, в соответствии с законом Архимеда она вытесняет некоторый объем воды. Когда на льдину въезжает грузовик, вытесняемый объем воды увеличивается, т.е. действующая на льдину сила Архимеда увеличивается на величину силы тяжести грузовика: $\rho_{вод}g\cdot\Delta V=m_г g$. Отсюда следует, что масса грузовика равна: $m_г=\rho_{вод}\cdot\Delta V=\rho_{вод}\cdot Sh=1000\cdot300\cdot0{,}01=3000\,кг$.

Ответ: а) 3000 *кг*.

Когда грузовик тонет, сила Архимеда, действующего на него, становится меньше его силы тяжести, т.е. он теперь вытесняет меньший объем воды. Объем воды, вытесняемый льдиной, при этом не изменяется. В итоге уровень воды опускается. Следовательно, уменьшается давление воды на дно как пруда, так и колодца: $p=p_{атм}+\rho gh$.

Ответ: б) уменьшится.

2016 год

1. Возможны разные решения задачи. Одно из простых состоит в том, чтобы рассматривать не тренера, а сразу его тень, бегущую по внешней дорожке. Обозначим как V скорость спортсменов. Тогда скорость тени тренера:
$$V_{тени} = V_{тренера} \cdot \frac{R_{внешн}}{R_{внутр}} = V_{тренера} \cdot \frac{l_{внешн}}{l_{внутр}} = V_{тренера} \cdot \frac{120}{80} = \frac{3}{2} V_{тренера} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{3} = \frac{V}{2}.$$
Когда тренер пробегает один круг, его тень тоже делает полный оборот. За это время спортсмены, скорость которых в 2 раза больше, делают 2 круга. Значит, относительно тени тренера спортсмены за это время делают 3 круга. Так как в одном круге $120/10 = 12$ спортсменов, то за 3 круга тень от тренера падает на спортсменов 36 раз. То есть тренер оказывается между фонарем и кем-то из спортсменов 36 раз, или 37, если в начале тренер находился на линии между фонарем и спортсменом.
Ответ: а) 36 раз (или 37 раз).

   Тень от тренера падает на каждого из спортсменов один раз за полный оборот. Бегут они навстречу друг другу с относительной скоростью $(V + 1/2V) = 3/2V$, и за 10 *сек* пробегают полный круг длиной 120 *м*. Следовательно, $3/2V = 120/10$. Откуда получаем $V = 8\ м/с$.
Ответ: б) 8 *м*/*с*.

2. Давление, создаваемое машиной в камере шины: $p = mg/S$, где m – масса машины, S – общая площадь касания колес с землей. В ситуации одинакового "проминания" (т.е. одинаковой формы шин) при увеличении линейных размеров в N раз площадь увеличивается в N^2 раз, а объем (значит, и масса) – в N^3 раз, поэтому давление от большей машины окажется больше в N раз. Следовательно, больше должно быть и внутреннее давление в шинах.
Ответ: а) в камерах бóльшего автомобиля давление нужно бóльшее.

   Когда камера вот-вот лопнет, сила, пытающаяся разорвать ее изнутри, вызвана давлением и пропорциональна площади шин $(F = pS)$, а удерживающая сила действует по длине будущего разрыва и пропорциональна длине. То есть разрывающая сила растет пропорционально N^2, а удерживающая – пропорционально N (при равной толщине резины).
Ответ: б) бóльшие шины на бóльшей машине лопнут раньше.

3. Подъемная сила шара – сила Архимеда минус сила тяжести оболочки и газа, находящего в шаре $F = F_{Арх} - mg - m_г g$. Пусть $OC = l$. Тогда $OB = 2l$ и $OA = 3l$. По правилу рычага когда увеличенный шар привязан в точке C верно $F \cdot l = 3Mg \cdot 2l$, а когда он привязан в точке A, то $F \cdot 3l = M_x g \cdot 2l$. Откуда получаем $M_x = 9M$.
Ответ: а) 5670 *г*.

   Подъемная сила малого шара $F_м = \rho_{возд} gV - mg - \rho_г Vg = V(\rho_{возд} - \rho_г)g - mg$. Тогда подъемная сила большого шара $F_м = 8V(\rho_{возд} - \rho_г)g - mg$, т.к. его объем в 8 раз больше, а оболочка не изменилась.

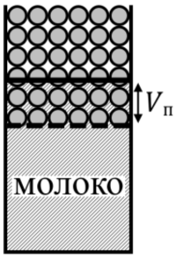
Составим правила рычага для малого шара и груза: $\left(V(\rho_{возд}-\rho_г)g-mg\right)\cdot 3l = Mg\cdot 2l$.

А также для большого шара и груза $3M$: $\left(8V(\rho_{возд}-\rho_г)g-mg\right)\cdot l = 3Mg\cdot 2l$.

Откуда после алгебраических преобразований найдем: $m = 2/21M = 60\ г$

Ответ: б) 60 *г*.

4. Шарики (вместе с пустотами между ними) занимают половину полулитрового стакана, то есть $V_1 = V_{ст}/2 = 250\ см^3$. Когда их заливают молоком, на все погруженные шарики действует сила Архимеда $F_A = \rho_м V_ш g = 5\rho_ш V_ш g = 5m_ш g$, так как по условию плотность молока в 5 раз больше плотности шариков. Чтобы шарики начали всплывать, погруженной должна оказаться их $1/5$ часть. Отсюда найдем объем погружения, куда затекло молоко: $V_П = V_1/5 = 50\ см^3$.



Когда шарики всплывут до края стакана (см. рисунок), молоко займет нижнюю половину стакана и 40% объема $V_П$ (остальной объем занимает само вещество шариков). В итоге находим объем молока: $V_М = 0,5V_{ст} + 0,4V_П = 250 + 20 = 270\ см^3$.

Ответ: а) 270 $см^3$.

Когда шарики пропитаются молоком, и весь воздух будет вытеснен, пища будет состоять из молока и рисовой муки одинаковой плотности 1 $г/см^3$. Масса молока 270 г. Масса муки (т.е. всех шариков) $M_ш = \rho_ш\cdot(0,6V_1) = 0,2\cdot 0,6\cdot 250 = 30\ г$, так как 60% от V_1 – объем, занимавшийся исходно веществом шариков. Отсюда находим общую массу пищи: $M_{общ} = M_М + M_ш = 300\ г$.

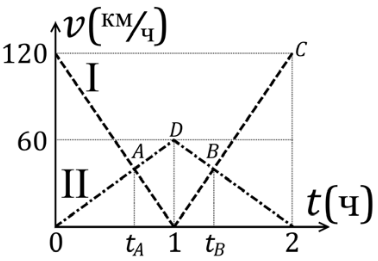
Ответ: б) 300 $см^3$.

2017 год

1. В СИ единица плотности *кг/м*^{3}, соответственно:
$кг/м^3 = лилипуд/лилипрыг^3 \quad \Rightarrow \quad лилипуд = кг\cdot(лилипрыг/м)^3 = 1кг\cdot(1/5)^3 = 1/125\,кг$.
Значит, $1\,кг = 125\,лилипуд$, откуда масса Гулливера $80\,кг = 80\cdot125 = 10000\,лилипуд$.
Ответ: а) 10000 *лилипуд*.

Единицы силы соответственно в СИ $H = кг\cdot м/с^2$ и в Лилипутии $лилиух = лилипуд\cdot лилипрыг/лилимиг^2$. Приравнивая, получаем:
$$лилимиг^2 = \frac{лилипуд}{кг}\cdot\frac{лилипрыг}{м}\cdot с^2 = \frac{1}{125}\cdot\frac{1}{5}\cdot с^2 = \frac{с^2}{25} \quad \Rightarrow \quad лилимиг = \frac{с}{25}.$$
Ответ: б) 1 *лилимиг*=0,04 *с*.

2. Пока скорость скорого поезда больше, чем товарного, он удаляется. Поэтому (см. рис.) на участке от 0 до t_A, где график I выше графика II, скорый удаляется от товарного. Затем, на участке от t_A до t_B товарный поезд движется быстрее и сближается со скорым. Наконец, на участке от t_B до 2 скорый снова удаляется. Поэтому наименьшее расстояние (на второй половине пути) достигается в момент t_B, а наибольшее за весь путь – в момент t_C=2 *часа*.



Путь каждого поезда за два часа: $S = V_{средняя}\cdot t = V_{\max}t/2$. Для скорого получаем $S_c = (120\cdot2)/2 = 120\,км$, а для товарного $S_c = (60\cdot2)/2 = 60\,км$. Откуда наибольшее расстояние между ними равно $\Delta S_{\max} = 120 - 60 = 60\,км$.
Ответ: а) на 60 *км*.

Найдем момент t_B, когда расстояние между поездами минимально. Треугольники $1BD$ и $2BC$ – подобные и отличаются по размерам ровно в 2 раза. Поэтому интервал (1, t_B) в два раза меньше интервала (t_B, 2), откуда длительность интервала (1, t_B) равна 1/3 *час*.
Удаление между поездами в этот момент можно посчитать так. В момент времени 1 *час* расстояние между поездами 30 *км*, что легко увидеть из площадей треугольников под графиками скоростей или из предыдущих расчетов. На интервале (1, t_B) это расстояние уменьшилось на площадь треугольника $1BD$, т.е. на $1/2\cdot(1,D)\cdot(1,t_B) = 1/2\cdot60\cdot1/3 = 10\,км$. В итоге расстояние между поездами в момент времени t_B равно $30 - 10 = 20\,км$.
Ответ: б) 20 *км*.

3. Когда средняя плотность шарика с содержимым сравнивается с плотностью окружающего воздуха, полная сила тяжести шарика сравнивается с силой Архимеда, действующей на него со стороны воздуха:
$\rho_{возд} = \rho_ш \Rightarrow \rho_{возд}gV = \rho_ш gV = m_ш g \Rightarrow F_{Арх} = F_{тяж}$.
Отрыв шарика происходит примерно сразу, как только силы Архимеда и тяжести сравниваются, означает, что другие силы, могущие удерживать шарик (какое-то прилипание, поверхностное натяжение и т.п.) малы и несущественны для задачи.
Ответ: а) шарики отрываются из-за силы Архимеда.

Средняя плотность шарика определяется его оболочкой и внутренностью: $\rho_ш = (m_{об} + m_{вн})/(V_{об} + V_{вн}) = (\rho_{об}V_{об} + \rho_{вн}V_{вн})/(V_{об} + V_{вн})$. Шарик отрывается тогда, когда его плотность сравнивается с плотностью окружающего воздуха, которая не меняется. Поэтому и плотность шарика в момент отрыва всегда одинакова. Плотность горячего воздуха меньше плотности окружающего, более холодного. Следовательно, плотность оболочки шарика всегда больше. Если нагрев уменьшится, чтобы обеспечить такую же среднюю плотность всего шарика, относительная доля объема горячего воздуха в нем должна вырасти. При этом увеличится в объеме весь шарик, так как при изменении размера шарика в N раз, его объем изменится в N^3 раз (полный объем шарика), а площадь оболочки (и ее объем) только в N^2 раз.

Ответ: б) размер отрывающихся шариков увеличится.

4. Точка A – точка равновесия рычага. Самый простой способ записать условия равновесия, видимо, такой: набалдашник (массы m) уравновешивает деревянную часть (массы M) , сила тяжести которой приложена к точке O – центру масс палки: $AO = BO - AB = L/2 - L/3 = L/6 = 0,25\,м$ (см. рисунок А). По правилу рычага $mg \cdot AB = Mg \cdot AO \Rightarrow mg \cdot 0,5 = Mg \cdot 0,25$. Откуда получаем: $M = 2m$. А поскольку $m + M = M_{трости} = 4,5\,кг$, то $M = 3\,кг$, $m = 1,5\,кг$.

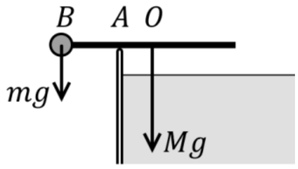


Рисунок А

Ответ: а) 1,5 *кг*.

Когда трость свешивается в аквариум (см. рисунок Б), на погруженную часть (участок AC) действует сила Архимеда $F_{Арх} = \rho_в V_{AC} g$. Так как $AC = L - AB = 1\,м$, то $V_{AC} = 2V/3$, где V – объем всей палки. Итак, сила Архимеда равна $F_{Арх} = 2\rho_в Vg/3$, а сила тяжести палки $F_{Арх} = \rho_д Vg$, где $\rho_д$ – плотность дерева.

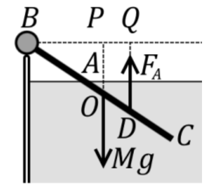


Рисунок Б

Сила Архимеда приложена к центру погруженной части – точке D. Весь рычаг теперь опирается на набалдашник (точку B). По правилу рычага условие равновесия палки: $Mg \cdot BO = F_{Арх} \cdot BD$, где $BD = BA + AD = 1\,м$. В итоге получаем уравнение: $\rho_д Vg \cdot 0,75 = 2\rho_в Vg/3 \cdot 1$. Откуда следует, что $\rho_д = 8/9 \cdot \rho_в = 980\,кг/м^3$.

Строго говоря, правило рычага в случае его наклона должно учитывать не длины BO и BD, но лишь перпендикулярные плечи сил, то есть BP и BQ. Однако отношение $BP/BQ = BO/BD = 3/4$, поэтому ответ останется тем же.

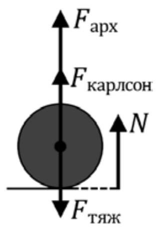
Ответ: б) 980 *кг/м*^{3}.

2018 год

1. Палка однородная, и ее сила тяжести поровну распределяется между нитями, поэтому, пока птица не села на палку, натяжение нитей одинаково и равно по 5 *Н*.
   1) Если птица сядет ровно на середину палки, то сила тяжести птицы также поровну распределится между нитями. В таком случае сила натяжения каждой из нитей будет равна 10 *Н* и нити не порвутся.
   2) Если птица сядет на левый край палки, то вся сила тяжести птицы будет действовать на нить 1. В таком случае суммарная сила, действующая на эту нить, будет равна 15 *Н* и нить порвется.

   Найдем область безопасной посадки. Пусть птица сидит на палке на расстоянии x от левого края, в таком случае расстояние до правого края равно $l-x$. Обозначим силы натяжения нитей T_1 и T_2. Тогда сумма сил натяжения равна суммарной силе тяжести палки и птицы: $T_1+T_2=mg$. Сумма моментов сил относительно центра палки: $T_1 l/2=T_2 l/2+mg(l/2-x)$. Из этих двух уравнений выражаем силы натяжения нитей $T_1=mg\cdot(3l-2x)/2l<F_1$ и $T_1=mg\cdot(l+2x)/2l<F_2$. Решая каждое из неравенств, находим допустимый диапазон x:
   $$x>\frac{3l}{2}-\frac{F_1}{mg}l=\frac{3\cdot 120}{2}-\frac{12}{10}\cdot 120=36\,см,\ x<\frac{F_2}{mg}l-\frac{l}{2}=\frac{14}{10}\cdot 120-\frac{120}{2}\cdot 120=108\,см.$$
   Ответ: б) "безопасна" для приземления зона от 36 *см* до 108 *см* от левого края.

2. Рассмотрим все силы, действующие на шар, лежащий на дне колодца. Вверх на шар действуют три силы: сила Архимеда, сила, с которой Карлсон поднимает шар, а также сила реакции опоры. Так как шар находится в состоянии покоя, сумма всех сил, действующих вверх, должна быть равна сумме всех сил, действующих вниз: $F_{тяж}=F_{Арх}+F_К+N$. Условием того, что шар лежит на дне, является

   наличие силы реакции опоры. Это условие может быть записано как $N>0$. Отсюда для первого случая получаем выражение $F_{тяж}>F_{Арх}+F_К$. Подставляя в это неравенство формулы для силы тяжести $F_{тяж}=m_ш g=\rho_ш V_ш g$ и силы Архимеда $F_{Арх}=\rho_в V_ш g$, получаем $\rho_ш V_ш g>\rho_в V_ш g+F_К$.
   Откуда $\rho_ш>\rho_в+F_К/V_ш g=1000+1000/(0{,}5\cdot 10)=1200\,кг/м^3$.
   Для того, чтобы аналогично рассмотреть второй случай, нужно узнать, какая плотность воды получилась после высыпания соли. Для этого нужно найти объем и массу соленой воды. Так как при высыпании одного пакета соли уровень воды поднимался на 1 *см*, после высыпания 50 пакетов высота воды в колодце будет 2,5 *м*. Объем этой воды будет равен $V_{сол.в}=2{,}5\cdot 1=2{,}5\,м^3$. Масса же этой воды складывается из массы соли, которая равна $m_{сол}=50\cdot 16=800\,кг$, и массы воды, которую можно подсчитать, перемножив первоначальный объем воды на ее плотность $m_в=2\cdot 1000=2000\,кг$. В итоге плотность получившейся соленой воды будет равна $\rho_{сол.в}=(2000+800)/2{,}5=1120\,кг/м^3$. Используя рассуждения, аналогичные тем, что были в первом пункте, но учтя, что в данном случае шар должен всплыть, получим:
   $$\rho_ш<\rho_{сол.в}+F_К/V_ш g=1120+1000/(0{,}5\cdot 10)=1320\,кг/м^3.$$
   Ответ: плотность шара могла быть от 1200 $кг/м^3$ до 1320 $кг/м^3$.

3. Так как радиус золотого шарика в 10 раз меньше радиуса ледяного шара, то его объем меньше в 1000 раз, т.е. $V_з = 1\,см^3$. Золотой шарик вместе с оставшимся льдом (обозначим объем этого остатка льда как $V_{ост}$) начнет тонуть, когда сила тяжести, действующая суммарно на лед и золото, сравняется с силой Архимеда: $(m+M)g = \rho_в(V_з + V_{ост})g$. Из этого уравнения узнаем $V_л$:

$V_{ост} = V_з \cdot (\rho_з - \rho_в)/(\rho_в - \rho_л) = 1 \cdot (20-1)/(1-0,9) = 190\,см^3$.

Следовательно, растаять должно было $\Delta V = V - V_{ост} = 1000 - 190 = 810\,см^3$ льда.

Ответ: а) 810 $см^3$.

Для построения графика рассмотрим весь процесс таяния льда. Пока ледяной шар не утонул, высота столба воды меняться не будет. Связано это с тем, что масса воды, вытеснявшаяся куском льда, равна массе воды, образовавшейся при таянии этого куска. Раз равны их массы, то равны и объемы.

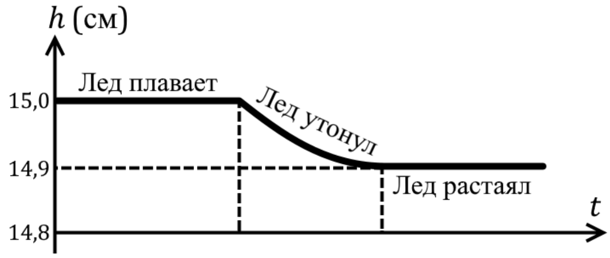
После того, как шар утонул, уровень воды начнет уменьшаться, так как погруженный на дно лед вытесняет объем воды, равный собственному объему, а воды в процессе таяния образуется в $\rho_л/\rho_в = 0,9$ раз меньше. Стоит заметить также, что чем меньше кусок льда, тем меньшая масса льда будет таять за секунду, то есть процесс понижения уровня воды будет замедляться со временем.

Когда же весь лед растает, то объем изменится на разницу между начальным объемом оставшегося льда и получившейся из него воды: $V_{ост} - 0,9V_{ост} = 0,1V_{ост}$.

Высота при этом уменьшится на

$\Delta h = 0,1V_{ост}/S = (0,1 \cdot 190)/190 = 0,1\,см$.

Ответ: б) см. график.



4. Чтобы узнать скорость Винтика, достаточно найти всю длину гонки. Первый километр Незнайка проехал за 1/15=4 минуты, второй километр – за 6 минут. После этого Незнайка ехал еще 20−4−6=10 минут до встречи с Винтиком со скоростью 6 *км/ч*, то есть проехал еще 1 *км*. Таким образом, встреча состоялась на расстоянии ровно 3 *км* от старта. Винтик все время бежал с постоянной скоростью $3\,км/20\,мин = 9\,км/ч$.

Ответ: а) 9 *км/ч*.

Максимальное расстояние между Незнайкой и Винтиком было в тот момент, когда их скорости были равны (до этого момента скорость драндулета была больше, чем Винтика, то есть Незнайка удалялся от товарища). Очевидно, что Незнайка в этот момент был на втором километре пути. На втором километре средняя скорость драндулета равна $1\,км/6\,мин = 10\,км/ч$, соответственно скорость снижалась от 15 *км/ч* до 5 *км/ч* за 6 минут движения. Тогда скорость драндулета была равна 9 *км/ч* через 6/10 от 6 минут, то есть через 3 минуты 36 секунд от начала второго километра. Средняя скорость драндулета за это время равна 12 *км/ч*, то есть Незнайка проехал 720 *м* на втором километре пути, или 1 *км* 720 *м*, считая от старта.

Винтик все время ехал с постоянной скоростью 9 *км/ч* и, следовательно, за 7 минут 36 секунд проехал 1 *км* 140 *м*.

Ответ: б) Незнайка опережал Винтика на 1720−1140=580 *м*.

2019 год

1. Пусть расстояние между точками A и B равно x км. Пути по всем вариантам потребуют время:

$$\text{вариант 1:}\quad t_1=\frac{l_1}{v_1}=\frac{x+\frac{x^2}{a}}{v_1}=\frac{x+x^2}{3}\ \text{ч},$$
$$\text{вариант 2:}\quad t_2=\frac{l_2}{v_2}=\frac{2l+x}{v_2}=\frac{30+x}{2}=\frac{x}{2}+15\ \text{ч},$$
$$\text{вариант 3:}\quad t_3=\frac{l_3}{v_3}=\frac{\frac{x}{2}+x+\frac{x}{2}}{v_3}=2x\ \text{ч},$$

(во втором варианте $l=15$ км – дистанция, которую необходимо плыть вбок от берега).

Сравним варианты 1 и 3. Если $t_1=t_3$, то

$$\frac{x+x^2}{3}=2x\quad\Rightarrow\quad\frac{1+x}{3}=2\quad\Rightarrow\quad x=5\ \text{км}.$$

Утверждение 1: при $x\le 5$ км $t_1\le t_3$, иначе $t_1>t_3$.

Сравним варианты 2 и 3. Если $t_2=t_3$, то

$$\frac{x}{2}+15=2x\quad\Rightarrow\quad x=10\ \text{км}.$$

Утверждение 2: при $x\le 10$ км $t_3\le t_2$, иначе $t_3>t_2$.

Из утверждений 1 и 2 получаем <u>**ответ**</u>**:**

1) если $x\le 5$ км, то $t_1\le t_3$ и $t_3\le t_2$, то есть оптимально действовать по **1 варианту** – идти по берегу;

2) если $5\ \text{км}<x\le 10$ км, то $t_3<t_1$ и $t_3\le t_2$, то есть оптимально действовать по **3 варианту** – прорубаться через лес;

3) если же $x>10$ км, то $t_3<t_1$ и $t_2<t_3$, то есть оптимально действовать по **2 варианту** – плыть на лодке.

2. А) Если зонд объёма V_0 висит в воде неподвижно, его общая сила тяжести уравновешена силой Архимеда:

$$M_0g=\rho_0V_0g\ \Rightarrow\quad M_0=\rho_0V_0=1000\cdot 0{,}01=10\ \text{кг}.$$

Масса вещества $m_в=M_0-m=10-1{,}3=8{,}7$ кг, его объём $V_в=V_0-V_п$, где $V_п$ – объём прибора. С другой стороны,$m_в=\rho_вV_в=(1-\alpha T_1)\rho_0(V_0-V_п)$, поэтому

$$V_п=V_0-\frac{m_в}{(1-\alpha T_1)\rho_0}=0{,}01-\frac{8{,}7}{\left(1-\frac{20}{200}\right)\cdot 1000}=\frac{1}{3000}\ \text{м}^3.$$

А тогда плотность прибора

$$\rho_п=\frac{m_п}{V_п}=\frac{1{,}3}{\frac{1}{3000}}=3900\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

<u>**Ответ А**</u>**:** средняя плотность прибора равна $3900\ \text{кг}/\text{м}^3$.

Б) Общая масса зонда M_0 не изменяется, поэтому общий объём зонда стал

$$V = \frac{M_0}{\rho_2} = \frac{10}{960} = \frac{1}{96}\ \text{м}^3.$$

Объём вещества

$$V_{в_2} = V - V_п = \frac{1}{96} - \frac{1}{3000} = \frac{121}{12000}\ \text{м}^3,$$

а плотность

$$\rho_{в_2} = \frac{m}{V_{в_2}} = \frac{8{,}7 \cdot 12000}{121}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

С другой стороны,

$$\rho_{в_2} = (1 - \alpha T_2)\rho_0 \quad \Rightarrow T_2 = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{\rho_{в_2}}{\rho_0}\right) = 200\left(1 - \frac{8{,}7 \cdot 12}{121}\right) \approx 27{,}4℃.$$

<u>Ответ Б</u>: температура зонда стала равна $T_2 \approx 27{,}4℃$.

3. Обозначим массу воды в стаканах до переливания как m_1 и m_2, а расстояния от стаканов до точки опоры как l_1 и l_2 соответственно $(l_2 = l - l_1)$. Тогда правило рычага можно записать как

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2 \quad \Rightarrow \quad m_1 l_1 = m_2 l_2. \qquad (*)$$

Для определённости будем считать, что воду переливали из первого стакана во второй, тогда масса воды в первом стакане станет равна $m_1 - m$, а во втором масса воды будет $m_2 + m$. Очевидно, что точку опоры нужно сдвигать ко второму стакану, тогда расстояния от стаканов до опоры будут равны $l_1 + x$ и $l_2 - x$ соответственно, где $x = l/10$. Запишем правило рычага для второго случая:

$$(m_1 - m)g(l_1 + x) = (m_2 + m)g(l_2 - x) \xRightarrow[\text{учитывая } (*)]{} m_1 x - m l_1 = m l_2 - m_2 x.$$

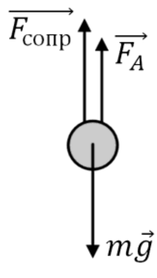
Это выражение можно переписать в виде:

$$(m_1 + m_2)x = m(l_1 + l_2) = ml \quad \Rightarrow \quad m_1 + m_2 = \frac{ml}{x} = \frac{ml}{\frac{l}{10}} = 10m.$$

<u>Ответ</u>: суммарная масса воды в стаканах равна $10m$.

4. А) При погружении монеты с постоянной скоростью сила тяжести уравновешивается силой сопротивления и силой Архимеда

$$\left.\begin{aligned} m_c g &= F_A + F_{сопр} \\ F_A &= \rho_в V g = \frac{\rho_в}{\rho_c} m_c g \\ F_{сопр} &= bv \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad m_c g = \frac{\rho_в}{\rho_c} m_c g + b v_c. \qquad (*)$$



Отсюда

$$m_c = \frac{b v_c}{\left(1 - \frac{\rho_в}{\rho_c}\right) g} = \frac{0{,}1 \cdot 1{,}9}{\left(1 - \frac{1}{10{,}5}\right) 10} = 0{,}021\ \text{кг} = 21\ \text{г}.$$

<u>Ответ А</u>: масса серебряной монеты равна 21 г.

Б) Сначала найдём массу золотой монеты. Объёмы монет одинаковы, поэтому

$$m_з : m_c = \rho_з : \rho_c \quad \Rightarrow \quad m_з = m_c \frac{\rho_з}{\rho_c} = 0{,}021 \cdot \frac{20}{10{,}5} = 0{,}04\ \text{кг}.$$

Для золотой монеты верно уравнение, аналогичное $(*)$:

$$m_з g = \frac{\rho_в}{\rho_з} m_з g + b v_з \quad \Rightarrow \quad v_з = \frac{m_з g \left(1 - \frac{\rho_в}{\rho_з}\right)}{b} = \frac{0{,}04 \cdot 10 \left(1 - \frac{1}{20}\right)}{0{,}1} = 3{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 2 v_c.$$

Пусть глубина моря-окияна H, тогда время погружения серебряной монеты $t_c = H/v_c$, а золотой $t_з = H/v_з = H/2v_c$. По условию,

$$t_c - t_з = t \quad \Rightarrow \quad \frac{H}{v_c} - \frac{H}{2v_c} = t \quad \Rightarrow \quad H = 2v_c t = 2 \cdot 1{,}9 \cdot 400 = 1520 \text{ м}.$$

<u>**Ответ Б**</u>**:** глубина моря-окияна примерно 1,5 км.

2020 год

1. Если размеры скворечника у Гены в 2 раза больше, то площадь — в 4 раза больше; и во столько же раз на него пойдет больше досок. Значит, их стоимость 320 рублей.
   Ответ: 320 рублей.

2. В пустоте (плотностью воздуха пренебрегаем), весы показывают вес $P_0 = mg$. В жидкости вес уменьшается на силу Архимеда. Поэтому вес тела в воде: $P_1 = mg - \rho_B Vg$; а в неизвестной жидкости $P_2 = mg - \rho_x Vg$. Подставляя, получим:
   $\rho_B Vg = P_0 - P_1$ |
   $\rho_x Vg = P_0 - P_2$ | => $\rho_x = \rho_B (P_0 - P_2)/ (P_0 - P_1) = 1000*(12 - 5)/(12 - 7) = 1400$ (кг/м^3).
   Ответ: 1400 (кг/м^3).

3. Если площадь стакана S, а его объем V_0, то высота стакана $h_0 = V_0/S = 200/20 = 10$см. Дно стакана находится под водой на h_0 выше, чем край, то есть на глубине $H - h_0$. Если объем воздуха в стакане V, то граница воды и воздуха в стакане на $h = V/S = 130/20 = 6.5$ см ниже , чем дно, то есть на глубине $H - h_0 + h$ от поверхности. Давление на воздух тем самым будет больше на величину:
   $P = \rho g(H - h0 + h) \simeq 1000*10*(0.3 - 0.1 + 0.065) = 2650$ Па.
   Ответ: 2650 Па.

4. Сумма левой силы натяжения F_1 и правой силы натяжения F_2 уравновешивает суммарный вес груза mg и самого рычага m_pg , то есть : $F_1 + F_2 = mg + m_pg$. (1)
   Силы тяжести рычага и груза приложены к центру рычага, а моменты сил натяжения уравновешены по правилу моментов: $F_1 L_1 = F_2 L_2$ или $F_1*3 = F_2*5$ (2). (единицы измерения длин не важны, важно лишь их отношение).
   Из уравнений (1) и (2) получим:
   $F1 = 5/8(mg + m_pg) \simeq 5/8(40 + 20) = 37.5$ Н. $F_2 = 3/8(mg + m_pg) \simeq 3/8(40 + 20) = 22.5$ Н.
   Ответ: 37.5 Н и 22.5 Н

5. Верхний край цилиндра при качении без проскальзывания движется в 2 раза быстрее, чем центр цилиндра, поэтому доска движется в 2 раза быстрей цилиндра. Когда цилиндр прокатится расстояние x, доска (и рабочий, её держащий) пройдут путь 2x; при этом доска относительно цилиндра пройдет путь, равный своей длине L. Поэтому $2x - x = L$, и отсюда $x = L$, а рабочий пройдет путь 2L=12м.
   Ответ: 12 м.

6. *Решение 1 (кинематическое)*. Когда верхний блок сместится влево на расстояние x, верхняя и нижняя часть огибающей его веревки удлинится относительно исходного положения на расстояние x (рис.1). Поэтому, чтобы скомпенсировать это удлинение, нижний конец этой веревки должен сместиться влево на 2x.

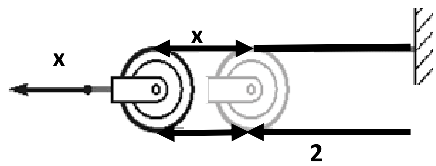


Рисунок 1

   Значит, если 1-й блок имеет скорость v, нижний конец веревки (и привязанный к ней 2-й блок) имеют скорость в 2 раза больше, то есть 2v. Аналогично, если 2-й блок имеет скорость 2v, конец огибающей его веревки и привязанный к нему груз имеют в 2 раза большую скорость: 4v.

Решение 2 (динамическое). Если груз натягивает веревку с силой F, то нижний подвижный блок (если он невесомый) нужно тянуть с силой 2F, а верхний блок – с силой 4F (рис. 2). Значит, наша система *проигрывает* в силе в 4 раза, а значит по золотому правилу механики *выигрывает* в перемещении в 4 раза. Поэтому скорость груза будет в 4 раза больше, то есть 4v.

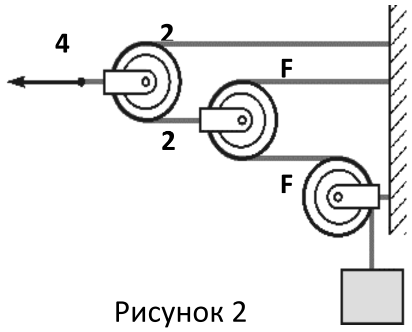


Рисунок 2

Ответ: 4 м/с.

7. Из-за трения скорость течения воды в реке вблизи дна практически равна нулю. В центре реки глубина больше, чем вблизи берега, поэтому в центре трение о дно и берега меньше тормозит течение. То есть скорость течения у берега самая маленькая, а в центре реки – самая большая. (На самом деле, самая большая скорость течения в самом глубоком месте реки). Когда плывут по течению (вода течет сверху вниз, поэтому по течению означает «спускаться по реке»), река «помогает» плыть. И потому стараются плыть в месте самого большого попутного течения, то есть в центре реки. Когда двигаются против течения («поднимаются по реке») вода идет навстречу движению, и стараются двигаться в месте наименьшего течения. То есть как можно ближе к берегу. (Чтобы только не мешали отмели, трава и ветви деревьев: впрочем, ветви могут и помогать, если за них иногда хвататься (когда встречное течение сильное и лодку может сносить).

2021 год

1. Давление воды на глубине h:

$$P_{воды} = P_0 + \rho g h$$

Давление внутри «подлодки»:

$$P_{лодки} = P_0, где\ P_0 - давление\ атмосферы$$

Разность этих давлений создаёт вдавливающую силу на пробку:

$$F_1 = (P_{воды} - P_{лодки})S = \rho g h S$$

Сила F_1 не должна превышать силу F, удерживающую пробку (иначе пробка вдавится и внутрь лодки хлынет вода), отсюда:

$$\rho g h S \le F \Rightarrow h \le \frac{F}{\rho g S} \approx \frac{100}{1000 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 50\ (м)$$

<u>Ответ:</u> лодке «Беда» нельзя погружаться глубже, чем на 50 метров

2. Воды в 1 слезе Несмеяны

$$m_в = m_1 - m_{соли} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8\ (г)$$

И значит, объём воды в слезе был

$$V_в = {}^{m_в}/_{\rho_в} = 0{,}8\ (см^3)$$

По условию при растворении 2 мг соли объём увеличивается на 1 мм^3, поэтому при растворении 200 мг объём увеличился на $\Delta V = 100$ (мм^3) = 0,1 (см^3).

Отсюда объём 1 слезинки $V_1 = V_в + \Delta V = 0{,}9$ (см^3).

Пусть Несмеяна выплакала N слезинок. Тогда масса воды в пруду станет

$$M = M_0 + N m_1$$

где $M_0 = \rho_в V_0 = \rho_в S h$ - масса исходной пресной воды в пруду, N – количество слезинок.

Объём пруда *станет* $V = V_0 + N V_1 = Sh + N V_1$

Чтобы кукла всплыла, плотность ставшей солёной от несмеяниных слёз воды в пруду должна превысить плотность куклы:

$$\rho_{солёной\ воды} = \frac{M}{V} > \rho_к \Longrightarrow M > V \rho_к$$

Тогда

$$(M_0 + N m_1) > \rho_к (V_0 + N V_1)$$

$$N(m_1 - V_1 \rho_к) > \rho_к V_0 - M_0 = (\rho_к - \rho_в) S h$$

$$N > \frac{(\rho_к - \rho_в) S h}{m_1 - V_1 \rho_к}$$

Подставим числа в СИ:

$$N > \frac{(1100 - 1000) 50 \cdot 2}{10^{-3} - 1100 \cdot 0{,}9 \cdot 10^{-6}} = 10^9$$

<u>Ответ:</u> Несмеяне нужно выплакать более миллиарда слезинок.

(Заметим, при этом объём пруда станет $Sh + N V_1 > 50 \cdot 20 + 10^9 \cdot 0{,}9 \cdot 10^{-6} > 1000$ (м^3), то есть увеличится больше, чем в 10 раз.)

3. А) За время $t_1 = 12$ с карусель с лошадкой сделает

$$N\text{л} = t_1/t_2 = 12/8 = 1{,}5\ \textit{оборота}$$

Пони за это время вновь догоняет лошадку, то есть он делает на один оборот больше:

$$N\text{п} = N\text{л} + 1 = 2{,}5\ \textit{оборота}$$

Пусть 1 оборот лошадки имеет длину l, тогда путь пони будет $L = 2l$;

Имеем

$$V\text{п} \cdot t_1 = 2{,}5L = 5l$$

Переведём скорость пони в метры за секунду: $V_п = 36$ км/ч $= 10$ м/с;

И тогда

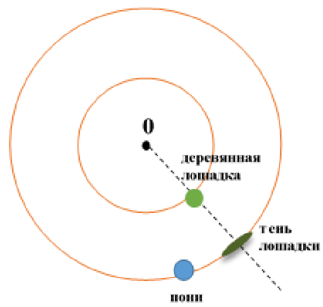
$$L = V\text{п} \cdot \frac{t_1}{2{,}5} = 10 \cdot \frac{12}{2{,}5} = 48(\text{м}) \Rightarrow l = 24\ (\text{м})$$

Откуда

$$V\text{л} \cdot t2 = l \Rightarrow V\text{л} = {}^{l}/_{t_2} = 24/8 = 3\ (\text{м}/\text{с}) = 10{,}8\ (\text{км}/\text{ч})$$

<u>Ответ А</u>: скорость деревянной лошадки $V_л = 3$ м/с $= 10{,}8$ км/ч

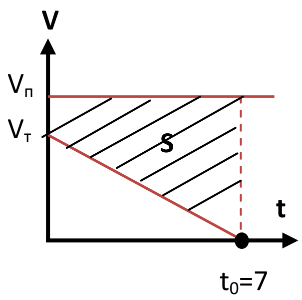
Б) Будем смотреть не на движение лошадки Л, а на движение «тени лошадки» Т, которую бы она отбрасывала от фонаря, расположенного в центре вращения 0, на круг, по которому бежит пони (см. рисунок →).



Скорость тени

$$V\text{т} = 2 \cdot V\text{л} = 6\ ({}^{\text{м}}/_{\text{с}})$$

График перемещения пони и тени после выключения карусели



выглядит так:

Чтобы понять, успел ли пони за это время обогнать лошадку ещё раз, нужно сравнить «расстояние отставания» тени от пони за время $t_0 = 7\ \textit{секунд}$ (то есть заштрихованную площадь S между графиками скоростей пони и тени) — с длиной L одного круга:

$$S = V\text{п} \cdot t_0 - V\text{т} \cdot {}^{t_0}/_2 = (V\text{п} - V\text{л}) \cdot t_0 = (10 - 3) \cdot 7 = 49(\text{м})$$

Так как $S > L = 48(\text{м})$, то тень за 7 секунд отстала от пони больше, чем на один круг и успела до остановки ещё раз упасть на пони. Это и значит, что пони ещё раз догнал лошадку.

<u>Ответ Б</u>: Да, пони успел догнать лошадку.

4. А) Плотность наружного воздуха при температуре $t = 20℃$

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{t}{270}\right)$$

Плотность воздуха в шаре при $t_1 = 36℃$

$$\rho_1 = \rho_0\left(1 - \frac{t_1}{270}\right)$$

Суммарная сила тяжести Винни-Пуха и воздуха в шаре уравновешивается силой Архимеда:

$$F\text{тяж} = mg + \rho_1 V g \Longrightarrow M = (\rho - \rho_1)V = \rho_0 V\left(\frac{t_1 - t}{270}\right)$$

Откуда

$$V = \frac{M}{\rho_0}\cdot\frac{270}{t_1 - t} = \frac{40}{1{,}35}\cdot\frac{270}{36 - 20} = 500\ (м^3)$$

<u>Ответ А:</u> объём воздушного шара Винни $V = 500\ (м^3)$

Б) Для Пятачка объём его шара

$$V = \frac{m}{\rho_0}\cdot\frac{270}{t_1 - t}$$

То есть объём уменьшится в ${}^{M}/_{m} = 8 = (2)^3$ *раз* по сравнению с Винни-Пухом. Это

значит, радиус шара уменьшится в 2 раза. Запас тепла в шаре определяется массой тёплого газа, то есть у шара Пятачка он в 8 раз меньше, а скорость остывания зависит от площади оболочки, которая у Пятачка только в $(2)^2 = 4$ раза меньше. Значит, шар Пятачка остынет быстрее и снизится раньше.

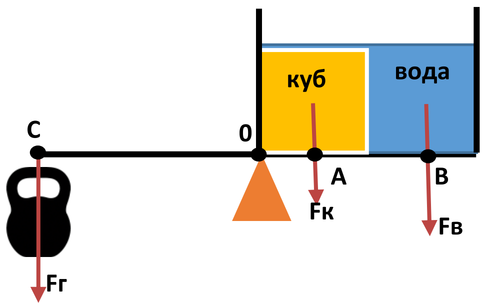
<u>Ответ Б:</u> шар Пятачка остынет быстрее и снизится раньше.

5. А) Пусть длина стороны куба a, тогда

масса куба $m_к = \rho_к a^3$

масса *воды* $m_в = \rho_в a^3$

А длина плеч: $OA = {}^{a}/_{2};\ OB = {}^{3}/_{2}\,a;\ OC = 2a$



Запишем правило рычага:

$$m_г\cdot g\cdot 2a = m_к g\frac{a}{2} + m_в g\frac{3a}{2}$$

Разделив это уравнение на $g\cdot a$, получим

$$2m_г = m_к\frac{1}{2} + m_в\frac{3}{2}$$

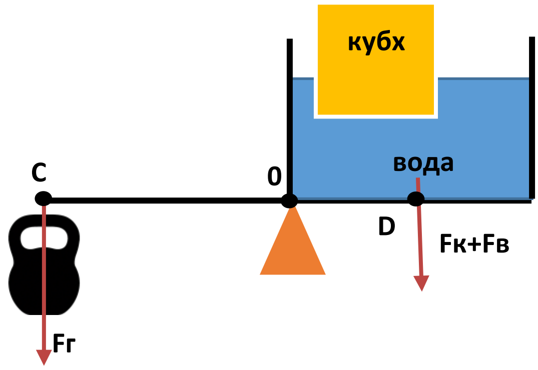
$$2m_г = \frac{1}{2}\rho_к a^3 + \frac{3}{2}\rho_в a^3$$

Подставляя числовые значения, найдём длину стороны куба

$$2\cdot 900 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}6\cdot a^3 + \frac{3}{2}\cdot 1\cdot a^3 \Longrightarrow a^3 = 1000 \Longrightarrow a = 10\ (см)$$

<u>Ответ А:</u> длина стороны куба 10 см

Б) Когда кубик всплывёт, давление воды на дно аквариума во всех точках становится одинаковым, поэтому можно считать, что сила тяжести воды и кубика действует на рычаг в середине аквариума в точке D (см. рисунок).



Запишем правило рычага

$$m_г \cdot g \cdot 2a = (m_к + m_в)ga$$

$$2m_г = m_к + m_в = \rho_к a^3 + \rho_в a^3$$

Отсюда найдём массу гири

$$m_г = \frac{1}{2}(600(0,1)^3 + 1000(0,1)^3) = 0,8\ (кг)$$

<u>**Ответ Б:**</u> масса гири должна стать 0,8 кг (уменьшить на 0,1 кг)

2022 год

1. Пусть объем монеты V_1. Объем копии $V_2 = 8V_1$
$V_2 - V_1 = V \; <=> 7V_1 = V \; => V_1 = \frac{1}{7}V \; (= 1\, см^3), \; V_2 = \frac{8}{7}\, V \; (= 8\, см^3)$.

   Пусть плотность золота ρ, тогда серебра $\rho - \Delta\rho$. Разность масс копии и монеты:

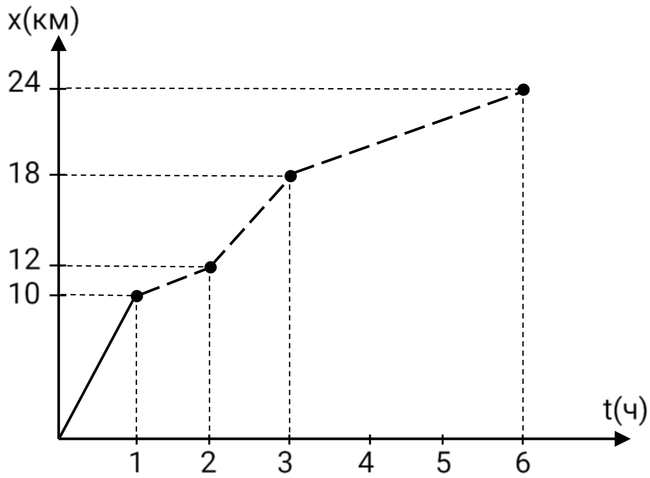
   $m = m_2 - m_1 = (\rho - \Delta\rho) \cdot . V_2 - \rho \cdot V_1 <=> \; m = (\rho - \Delta\rho) \cdot . \frac{8}{7}\, V - \rho \cdot \frac{1}{7} V,$
откуда:
$\rho = m/V + 8/7 \cdot \Delta\rho = 60/7 + 8/7 \cdot 10 = 20\ (кг/см^3)$.
Ответ: $\mathbf{20}$ ($\boldsymbol{кг/см^3}$)

2. *Условие А: п*олный путь туриста $S = v_{ср} \cdot t = 4 \cdot 6 = 24(км)$.

   Условие Г: если турист прошел первую половину за время t_1 часов, то вторую за время $t_2 = t_1 + 2$ часов, поэтому $t_1 + t_2 = 2t_1 + 2 = t = 6$, откуда $t_1 = 2$ (ч).

   За это время турист должен пройти $\frac{S}{2} = 12\ (км)$.

   Условия Б и В не вмещаемы в одну половину пути $(10 + 6 > 12)$, поэтому считаем, что скорость $10\, км\backslash ч$ приходится на 1-ю половину пути, например, на 1-й час. За второй час турист должен был пройти $2\, км$ (чтоб всего за 2 часа пройти $12\, км$), за 3-й час, по условию, он пройдет $6\, км$, а за последние три часа он должен пройти еще $6\, км$, причем все равно как (только в одном направлении). Тем самым возможный график:



   Пунктир на графике означает, что движение может быть любым, лишь бы оно проходило с возрастанием координаты x (движение шло в одну сторону, и путь S совпадает с x), а график проходил через указанные точки.

3. Сначала, в силу равновесия, было равенство давлений воды и масла: $\boldsymbol{P_М = \rho_М \cdot g \cdot h_М = P_В = \rho_В \cdot g \cdot h_В}$ **(1)**.
Объем масла при нагреве на $1°C$ увеличится в 1,001 раза, то есть на $\Delta V = 0{,}001V$, при этом, т.к. сосуд размеры не меняет, весь избыточный объем удлинит столбик масла в трубках на $h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{0{,}001V}{S} = 0{,}9$ см.
При этом плотность масла уменьшится в 1,001 раза.

А) Предположим, положение границы масло-вода не изменится, тогда новое давление масла станет: $P = \frac{1}{1{,}001} \cdot \rho_M \cdot g \cdot (h_M + h)$. Так как

$h_M + h = 10{,}9 > 10{,}01 = 1{,}001 h_M$, то высота увеличится сильнее(в большее количество раз), чем плотность уменьшится, поэтому $P > P_M = P_В$ и граница поедет направо.

Б) Пусть граница переместится вправо на $\boldsymbol{x}$, тогда столб масла слева опустится на $\boldsymbol{x}$ и станет $(\boldsymbol{h_M + h - x})$, а столб воды справа поднимется и станет $(\boldsymbol{h_B + x})$. Приравняем новые давления слева и справа:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1{,}001}} \cdot \boldsymbol{\rho_M \cdot g \cdot (h_M + h - x) = \rho_B \cdot g \cdot (h_B + x)} \quad . \qquad (\mathbf{2})$$

Подставим числа. Поскольку, в силу уравнения $(\mathbf{1})$, плотность масла составляет $\mathbf{0{,}8}$ плотности воды, подставив всё в уравнение $(\mathbf{2})$ и сократив на $\boldsymbol{g}$, получим:

$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1{,}001}} \cdot \mathbf{0{,}8} \cdot (\mathbf{10} + \mathbf{0{,}9} - \boldsymbol{x}) = \mathbf{1} \cdot (\mathbf{8} + \boldsymbol{x})$. Решив, находим $\boldsymbol{x} \approx \mathbf{0{,}4}$ см .

Ответ: А) направо; Б) $\boldsymbol{x} \approx \mathbf{0{,}4}$ **см.**

4. Если стержень горизонтален, то длины, а значит и удлинения (растяжения) пружин одинаковы, поэтому как для случая А) , так и для случая Б) сила в точке во столько же раз больше силы в точке Б, во сколько раз отличаются жесткости: $F_A = nF$, $F_B = F$. (величина F для случаев А) и Б) вообще говоря, разная).

А) (См. *рис.* 1). Сумма упругих сил уравновешивает силы тяжести грузов: $nF + F = Mg + mg$ (1).

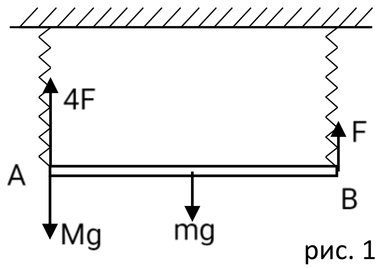


рис. 1

Центр масс стержня находится посередине (и можно считать, что сила mg приложена в центре), поэтому суммарные силы В точке А и в точке Б одинаковы (и равны $\frac{1}{2}mg$).

$nF - Mg = F = \frac{1}{2}mg$ (2).

Совместное решение системы уравнений (1) и (2) дает

$Mg = \frac{1}{2}(n-1)mg$=(подставляем $n = 4$) = $\frac{3}{2}mg$ => $M = \frac{3}{2}\, m = 1{,}5$ (кг).

Б) (См. *рис.* 2) Силы в точках А и Б теперь уравновешивают силы тяжести груза $3mg$ и стержня mg:

$nF + F = 3mg + mg = 4mg. => F = \frac{4}{n+1} \cdot mg$. (3).

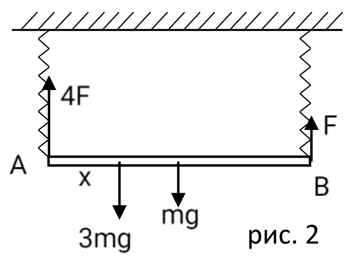


рис. 2

Рассмотрим моменты сил относительно точки А. Силы $3mg$ и mg создают вращательный момент по часовой стрелке и уравновешиваются моментом силы F:

$3mg \cdot x + mg \cdot 1/2\, L = F \cdot L$.

Подставляя F из формулы (3) и сократив на mg, получаем:

$x = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{n+1} - \frac{1}{2}\right) \cdot L =$ (подставляем $n = 4$) $= \frac{1}{10}L = 0{,}1$ (*м*).

Ответ: А) $\mathbf{1{,}5}$ (кг)**; Б)** $\mathbf{0{,}1}$ (м)**.**