Варианты вступительных работ по математике в 9 класс

2008 год

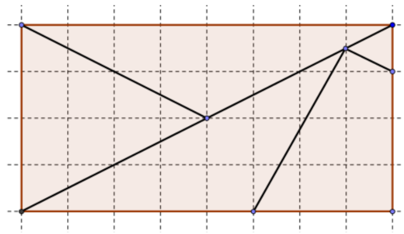
1. Решите неравенство: $\frac{(1-x^2)(1+x+x^2)}{x+1} \geq 0$.
2. Запишите уравнение прямой, параллельной прямой $y = 3x - 2$, проходящей через точку $(-2;\ -6)$.
3. Вычислите $\frac{9^9 \cdot (4^{13} + 4^{12})}{(2^{12})^2 \cdot (3^{20} - 4 \cdot 3^{18})}$.
4. Решите уравнение $|x - 1| + |x^2 - 1| = 0$.
5. Замкнутая ломаная $A_1A_2A_3A_4A_5A_1$ задана координатами своих вершин. Найти площадь и периметр ограниченной ею фигуры, если координаты вершин таковы: $A_1(-3;-2)$, $A_2(-1;-2)$, $A_3(2;0)$, $A_4(-1;1)$, $A_5(-3;2)$.
6. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, в три раза больше радиуса вписанной окружности. Найдите угол при основании треугольника.

2010 год

1. В полдень 1 апреля самолет вылетел из столицы в город Норильск и приземлился там в 14 часов местного времени. В полночь по местному времени он вылетел обратно и оказался в столице в 6 часов утра 2 апреля. Сколько времени длился полет в одну сторону, если известно, что время полета туда и обратно было одинаково?
2. Решите неравенство $(3x-2)(3-2x)^2 \leq 0$.
3. Докажите, что уравнение $ax^2-(a+2b)x+b=0$ имеет корни при всех значениях a и b.
4. Решите уравнение $4\cdot\left(2x-\frac{1}{6}\right)^4+7\cdot\left(2x-\frac{1}{6}\right)^2-2=0$.
5. Коля и Вася живут в одном доме, в каждом подъезде которого по 4 квартиры на этаже. Коля живет на 5 этаже в 83 квартире, а Вася живет на 3 этаже в 169 квартире. Сколько всего этажей в доме?
6. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 4, ее диагонали равны 6 и 8, а оба угла при большем основании острые.

2011 год

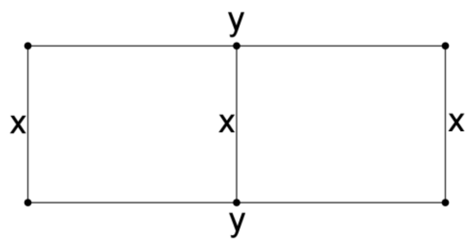
1. Существует ли число вида 55…5, которое является полным квадратом?



2. Малыш нарезал тортик на куски (см. рисунок). Помогите Карлсону взять кусок самой большой площади.
3. Сколько слагаемых со знаком "минус" получится после приведения многочлена $(-a+b-c)(d-e+f)(-g-h+k)$ к стандартному виду? А сколько всего получится слагаемых? Ответьте на вопросы, не раскрывая скобки. Ответ обоснуйте.
4. Решите уравнение: $0{,}35\cdot\left(0{,}35x-1\right)-0{,}45\cdot\left(0{,}45x-2\right)=0$.
5. В дремучем Муромском лесу растут дубы и осины. Известно, что дубы составляют 99% всех деревьев. Илья Муромец вырубил часть дубов, так что в выжившем лесу стало 98% дубов. Какую (в процентах) часть леса вырубил Илья Муромец?
6. Одна из вершин прямоугольного треугольника лежит в точке (2; 4), другая – в начале координат. Найдите все возможные положения третьей вершины, если известно, что одна из сторон треугольника параллельна оси ординат.

2012 год

1. Расположите в порядке возрастания числа: $9\sqrt{3}-3\sqrt{27}$, $2\sqrt{19}$, $5\sqrt{3}$, $\sqrt{7}-4$ (не забудьте обосновать ответ!).
2. Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится на 10, равно 1000. Найдите сумму этих чисел.
3. В прямоугольном треугольнике ABC катет BC равен 9. На этом катете находится центр окружности радиуса 4, которая касается прямых AB и AC. Найдите площадь треугольника ABC.
4. Дорога от дома до школы занимает у Пети 20 мин. (Петя всегда идет с постоянной скоростью). Однажды по дороге в школу он вспомнил, что забыл дома ручку. Если теперь он продолжит свой путь с той же скоростью, то придет в школу за 3 мин до звонка, а если вернется домой за ручкой, то, идя с той же скоростью, опоздает к началу урока на 7 мин. Какую часть пути он прошел до того, как вспомнил о ручке?
5. При каких значениях a графики функций $y=2ax^2+2x+1$ и $y=x^2+2ax-2$ пересекаются ровно в одной точке?
6. У Васи есть 24 одинаковые спички. Он хочет сложить из них фигуру, состоящую из двух одинаковых прямоугольников (см. рисунок) так, чтобы площадь всей фигуры была максимальной (ломать спички нельзя). Найдите x и y.



2013 год

1. Если Юра идет на работу пешком, а возвращается на транспорте, то всего он на дорогу затрачивает 50 минут. Если же он в оба конца едет на транспорте, то на всю дорогу он затрачивает 20 минут. Какое время Юра затратит на дорогу, если весь путь на работу и обратно он преодолеет пешком?
2. Решите неравенство $\frac{7x+3}{x+3} \geq -\frac{2}{2(x+3)}$.
3. В треугольнике ABC угол C прямой, угол B равен 35°. На сторонах AB и BC отмечены точки P и Q такие, что $\angle PCB = 20°$, $\angle PAQ = 10°$. Найдите $\angle QPC$.
4. В системе координат через точку (1;1) проведена прямая, которая отсекает в первой четверти треугольник площади 2. Найдите уравнения всех прямых, проходящих через вершины этого треугольника, и делящих его площадь пополам.
5. Студент Валера сложил все цифры 2013-значного числа. Затем студент Максим поделил эту сумму на 239 и получил целое число. Костя тоже поделил эту сумму, но на 566, и тоже получил целое число. Докажите, что хотя бы один из них ошибся.
6. Каковы должны быть числа p и q, чтобы они (и только они!) были всеми корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$? Приведите все возможные варианты.

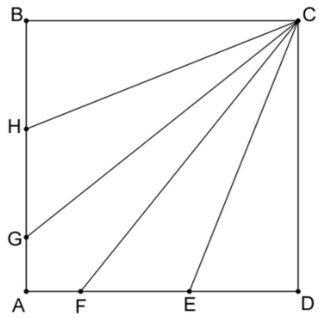
2014 год

1. Сравните $\left(2+\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{\left(4\sqrt{5}-11\right)^2}$ и $\sqrt{396}$.
2. Решите неравенство $\frac{|x-1|}{x-2}<2$.
3. Число $\frac{1}{42}$ разложили в бесконечную десятичную дробь. Затем вычеркнули 2014-ю цифру после запятой, а все цифры, стоящие справа от вычеркнутой цифры, сдвинули на 1 влево. Какое число больше: новое или первоначальное?
4. В квадрате $ABCD$ точка M – середина AB, точка N – середина BC, точка E – середина MN, точка F – середина ND, точка G – середина MD. Найдите площадь треугольника EFG, если сторона квадрата равна 8.
5. а) У Кости и Леши есть по девять одинаковых карточек с цифрами от 1 до 9. Леша выложил свои карточки в ряд по порядку (1, 2, 3, …), а Костя выкладывает свои карточки под Лешиными так, чтобы в каждом столбике сумма чисел являлась точным квадратом (например, если под Лешиной карточкой "1" положить "3", то $1+3=2^2$). Удастся ли Косте выложить все свои карточки?

   б) Удастся ли Косте выложить свои карточки, если у каждого из них есть по 11 карточек с числами от 1 до 11?

2015 год

1. Придумайте два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 11.
2. Решите неравенство $(x-4)\sqrt{x^2-7x+10} \geq 0$.
3. Решите уравнение $\frac{1}{|x^2-5x+6|} = \frac{|x-1,5|}{x^2-5x+6}$.
4. Ученики ФТШ ходили в поход. Петя заметил, что 11 дней похода были дождливыми. Оля заметила, что не было такого дня, чтобы дождь был и до, и после обеда, а Костя заметил, что утром не было дождя ровно 16 раз, а вечером не было дождя 11 раз. Сколько дней длился поход?
5. Отрезки CH, CG, CF и CE делят квадрат $ABCD$ на пять частей одинаковой площади. Найдите отношение $FE : AD$.

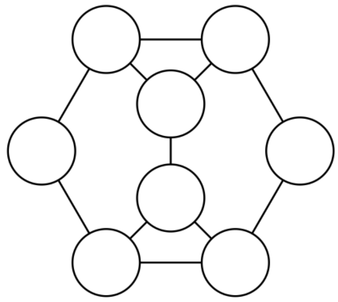


6. Квадратный трехчлен $0,5x^2-2x-5a+1$ имеет два действительных корня, сумма кубов которых меньше 40. Найдите все значения параметра a, при которых выполняется это условие.

2016 год

1. Найдите все значения x, при которых график каждой из двух функций $f(x) = x^2 - 3x$ и $g(x) = -\frac{1}{x+2}$ лежит выше графика функции $y = x$.
2. Вася заметил, что $\sqrt{3 + \frac{3}{8}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}$. Петя считает, что таких натуральных чисел a и b, что $\sqrt{a + \frac{a}{b}} = a \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$ больше не существует. Прав ли он?
3. Три ученика лицея ФТШ ехали в разных вагонах одного и того же поезда метро. Подъезжая к станции "Выборгская", каждый из них стал подсчитывать количество колонн, мимо которых он проехал. Один насчитал 15 колонн, второй – 12, и третий – 7 колонн. Когда поезд опять стал двигаться, они начали считать оставшиеся колонны, причем один из них насчитал в три раза больше колонн, чем другой. Сколько насчитал оставшийся ученик?
4. В треугольнике ABC угол C в три раза больше угла A. На стороне AB взята такая точка D, что $BD = BC$. Найдите CD, если $AD = 4$.
5. Василию, Петру, Семену и их женам Наталье, Ирине, Анне вместе 151 год. Каждый муж старше своей жены на 5 лет. Василий на 1 год старше Ирины. Наталье и Василию вместе 48 лет, Семену и Наталье вместе 52 года. Кто на ком женат, и сколько кому лет? (Возраст должен быть выражен в целых числах).
6. Найти три числа a, b и c, если известно, что их сумма равна 4, а квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственный корень $x = 3$.

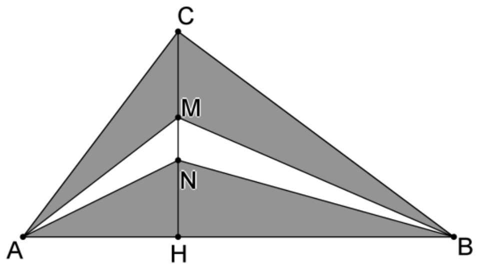
2017 год



1. Расставьте в кружки на картинке числа от 2 до 9 (без повторений) так, чтобы никакое число не делило бы нацело ни одного из своих соседей.
2. Три бегуна, Андрей, Борис и Саша, соревновались в беге на 100 метров. Когда Андрей добежал до финиша, Борис отставал от него на 10 метров. Когда Борис добежал до финиша, Саша отставал от него на 10 метров. На сколько метров отставал Саша от Андрея в тот момент, когда Андрей финишировал?
3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^4 - y^4 = 15, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$
4. Даны натуральные числа a, b, c. Известно, что четыре числа: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$, являются целыми. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b или c равно 1.
5. В треугольнике ABC $AB = BC = 1$, $\angle ABC = 36°$. Биссектрисы AK и CM пересекаются в точке O. Найдите периметр треугольника AMO.
6. Найдите максимальное значение выражения xy, если $x + y = 1$.

2018 год

1. Решите неравенство $\left(\frac{x-20}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{9x-5}{3}\right)^2$.
2. Два угла треугольника равны 100° и 60°. Покажите, как его разрезать на два равнобедренных треугольника.
3. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AC и BC равны 6 и 8. На высоте CH выбраны точки M и N так, что площадь закрашенной части равна 19. Найдите MN.



4. В волшебных шахматах все фигуры умеют говорить, причем белые фигуры всегда врут, а черные – всегда говорят правду. На каждой клетке доски 4×4 стоит по фигуре, причем среди них есть и белые, и черные. Каждая фигура по очереди говорит: "Среди моих соседей поровну белых и черных фигур". Сколько среди них белых фигур, если соседними называются клетки, имеющие общую сторону?
5. При каких значениях параметра a расстояние между корнями уравнения $x^2 - (a+1)x + a = 0$ больше $\sqrt{3}$?
6. Винни-Пух и Пятачок сели за стол немного подкрепиться и начали одновременно есть мед из одного горшка, не отвлекаясь на разговоры. Если бы Винни-Пух ел со скоростью Пятачка, то процесс еды длился бы на 4 минуты дольше, а если бы, наоборот, Пятачок ел со скоростью Винни-Пуха – то сократился бы на 1 минуту. За какое время мед из горшка был полностью съеден?

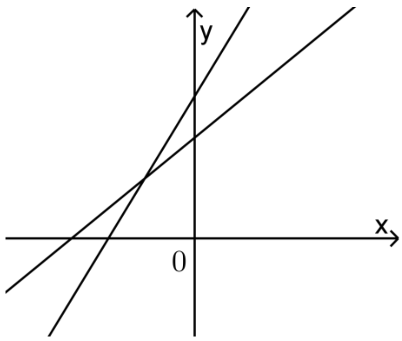
2019 год

1. Приведите пример шести таких различных натуральных чисел, что их сумма делится на каждое из них.

2. Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы четырех различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр. Не забудьте объяснить, почему это число – наименьшее.

3. Решите уравнение: $\frac{x}{x+1} = \frac{x+2}{x-2} + 1$.

4. На классной доске после урока математики остался чертеж осей координат и двух прямых (см. рисунок). Восьмиклассник Леша утверждает, что одна из прямых имеет уравнение $y = ax + b$, а другая – уравнение $y = bx + a$, где a и b – некоторые числа. Прав ли этот Леша?



5. Сладкоежкам Косте и Андрею подарили банку мёда, в которой сейчас 2019 ложек мёда, и предложили сыграть в игру по следующим правилам:

   a) Ходы делаются по очереди. Начинает Андрей.

   b) За один ход игрок может либо съесть одну ложку мёда, либо, если в банке в данный момент чётное число ложек мёда, ровно половину всего мёда.

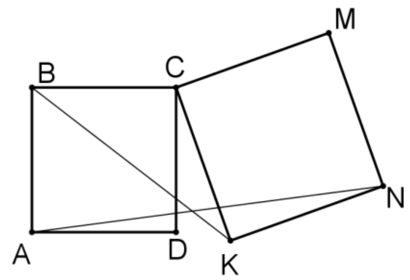
   c) Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

   Кто выиграет при правильной игре и как он должен действовать?

6. В прямоугольном треугольнике ACE на гипотенузе CE выбрана точка B так, что $AB = BC$. Высота BH треугольника ABC вдвое короче биссектрисы AK того же треугольника. Найдите величины всех углов треугольника ABC.

2020 год

1. Валера задумал натуральное число и прибавил к этому числу его сумму цифр. Леша также задумал натуральное число и тоже прибавил к нему его сумму цифр. В результате сложения у Валеры и у Леши получились одинаковые числа. Верно ли, что они задумывали одинаковые числа?
2. В классе учатся три девочки: Ира, Галя и Наташа. Одна из них самая умная, и она всегда говорит правду. Другая самая красивая, и она всегда лжет. А третья девочка самая хитрая: она иногда лжет, а иногда говорит правду. Ира сказала: “Я красивее Гали”. Галя сказала: ”Я умнее Наташи”. Наташа сказала: “Я хитрее Иры”. Какая из девочек самая красивая?
3. Решите уравнение: $x^2-4x+566=\frac{1}{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}-\frac{4}{2-\sqrt{3}}+566$.
4. У Маши, Ксюши, Насти и Лизы в совокупности 100 леденцов. У каждых двух девочек не менее 41 леденца. Какое наименьшее количество леденцов может быть у Лизы?
5. Два квадрата $ABCD$ и $CMNK$ имеют общую вершину. а) Докажите, что $\angle ACN=\angle BCK$. б) Найдите отношение отрезков AN и BK.



6. Сумма корней квадратного уравнения на единицу больше произведения его корней, при этом один из корней на 2 больше другого. Найдите эти корни.

2021 год

1. Каждое из трёх натуральных чисел $n, n+1, n+2$ делится на квадрат какого-нибудь натурального числа, отличного от единицы. Может ли число n быть трёхзначным?
2. Найдите число a и второй корень уравнения $x^2 + ax - 15 = 0$, если $x_1 = 3$.
3. На странице во всех строках одно и то же число букв. Если увеличить число строк и число букв в строке на 4, то число букв на странице увеличится на 464. На сколько уменьшится число букв на странице, если уменьшить число строк и число букв в строке на 3?
4. На катетах BC и BA прямоугольного треугольника ABC отложены отрезки $CN = AM = 6$. Точка E – середина AN, точка F – середина CM, точка O – середина MN. а) Докажите, что $OE = OF$. б) Найдите расстояние между серединами отрезков MN и AC.
5. Две различные прямые $y = ax + b$ и $y = cx + d$ пересекаются в точке $A(1,1)$. Одна из точек пересечения парабол $y = (ax+b)^2$ и $y = (cx+d)^2$ лежит на оси ординат. Докажите, что $b = -d$.
6. Юра съедает пиццу за 20 минут, а пирог – за 24 минуты. Леша съедает такие же пиццу и пирог соответственно за 26 и за 18 минут. Что они вместе съедят быстрее – пиццу или пирог?

2022 год

1. Весной Антон был на 1 см выше Бори, на 2 см выше Васи и на 3 см выше Гриши. За лето они подросли, причем все – на разное (целое) количество сантиметров. Когда они осенью выстроились по росту, то обнаружилось, что каждый следующий по росту на 1 см ниже предыдущего. При этом Гриша стоял сразу за Антоном. Кто стоял первым?
2. Докажите, что из двух уравнений $19ax^2 + ax + 91b = 0$ и $19abx^2 - bx - 91 = 0$ хотя бы одно имеет корень.
3. Когда Лёша прошёл $\frac{4}{9}$ длины моста, он заметил, что его догоняет машина, ещё не въехавшая на мост. Тогда он повернул назад и встретился с ней у начала моста. Если бы он продолжил своё движение, то машина догнала бы его у конца моста. Найдите отношение скоростей машины и Лёши.
4. Женя задумала два натуральных числа и сказала, что их произведение равно 2280, а сумма является нечётным двузначным числом. Какие числа задумала Женя?
5. В прямоугольнике $ABCD$ точка P – середина стороны AB, а точка Q – основание перпендикуляра, опушенного из вершины C на PD. Докажите, что $BQ = BC$.
6. Известно, что $a^2 + c^2 = b(2c - b)$. Вычислите $b(b - 5c) + (a + 2c)^2$.

Решения вступительных работ по математике

2008 год

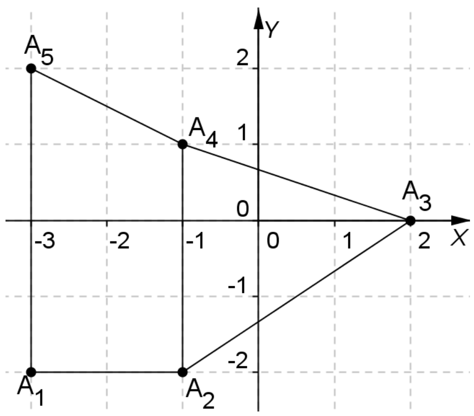
1. Знаменатель не может быть равен нулю, следовательно, $x \neq -1$. Учитывая это, упростим левую часть неравенства:
$$\frac{(1-x^2)(1+x+x^2)}{x+1} = \frac{(1-x)(1+x)\left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}{x+1} =$$
$$= (1-x)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right).$$
Заметим, что второй множитель получившегося выражения всегда положителен, а значит исходное неравенство равносильно системе:
$$\begin{cases}1-x \geq 0\\ x \neq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \leq 1\\ x \neq -1\end{cases}.$$
Ответ: $(-\infty;-1) \cup (-1;1]$.

2. У параллельных прямых угловые коэффициенты равны, значит, уравнение нашей прямой будет иметь вид $y = 3x + b$. Координаты точки, через которую проходит прямая, должны "удовлетворять" уравнению прямой: $-6 = 3\cdot(-2) + b$, следовательно, $b = 0$.
Ответ: $y = 3x$.

3. $\frac{9^9\cdot(4^{13}+4^{12})}{(2^{12})^2\cdot(3^{20}-4\cdot3^{18})} = \frac{(3^2)^9\cdot(2^2)^{12}\cdot(4+1)}{2^{24}\cdot3^{18}\cdot(3^2-4)} = \frac{3^{18}\cdot2^{24}\cdot5}{2^{24}\cdot3^{18}\cdot5} = 1.$
Ответ: 1.

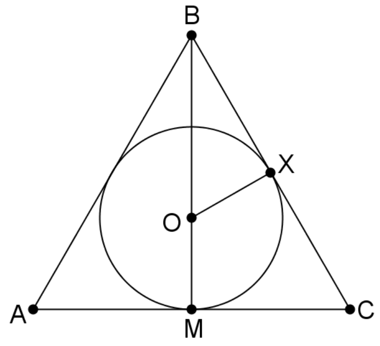
4. Сумма модулей (двух неотрицательных чисел!) равна 0 тогда и только тогда, когда равен 0 каждый из модулей. Под это условие подходит только $x = 1$.
Ответ: 1.

5. Искомая площадь равна сумме площадей прямоугольной трапеции $A_1A_2A_4A_5$ и треугольника $A_2A_3A_4$. Площадь трапеции равна $\frac{A_1A_5+A_2A_4}{2}\cdot A_1A_2 = \frac{4+3}{2}\cdot 2 = 7$. В треугольнике $A_2A_3A_4$ основание $A_2A_4 = 3$, высота к этому основанию также равна 3, тем самым площадь треугольника равна $\frac{3\cdot3}{2} = 4{,}5$. Общая площадь фигуры равна 11,5.



Для вычисления периметра найдем по теореме Пифагора длины сторон: $A_2A_3 = \sqrt{13}$; $A_3A_4 = \sqrt{10}$; $A_4A_5 = \sqrt{5}$. Добавляя длины двух оставшихся сторон, получаем периметр фигуры: $6 + \sqrt{13} + \sqrt{10} + \sqrt{5}$.
Ответ: $S = 11{,}5; P = 6 + \sqrt{13} + \sqrt{10} + \sqrt{5}$.

6. Обозначим данный треугольник ABC и проведем BM – высоту, опущенную на основание. Так как треугольник равнобедренный, то BM одновременно является биссектрисой угла ABC. Отметим, что центр вписанной окружности (точка O) лежит на отрезке BM, так как центром вписанной окружности является точка пересечения биссектрис треугольника. Пусть X – точка касания вписанной окружности и стороны BC. По свойству касательной OX и BC перпендикулярны.



$BM = 3 \cdot OM$, следовательно, $BO = 2 \cdot OM$. Отрезки OX и OM равны (как радиусы вписанной окружности), значит, $BO = 2 \cdot OX$. В прямоугольном треугольнике BXO гипотенуза BO оказалась в 2 раза больше катета OX, значит $\angle OBX = 30°$. Поскольку высота BM равнобедренного треугольника ABC является и его биссектрисой, то $\angle ABC = 60°$. Значит, треугольник ABC равносторонний и угол при основании тоже равен $60°$.

Ответ: $60°$.

2010 год

1. Самолет отсутствовал в столице 18 часов. За все это время на земле он находился только в Норильске в течение 10 часов ($24 - 14$ по местному времени). Значит, остальное время – 8 часов – он летел. Тогда путь в одну сторону занял половину этого времени – 4 часа.
Ответ: 4 часа.

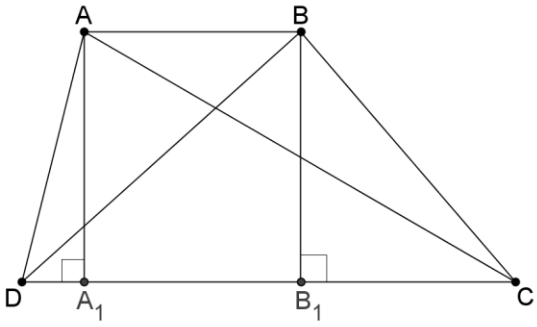
2. Заметим, что второй множитель всегда неотрицателен, следовательно, неравенство выполнено, если первый множитель меньше или равен нулю, или если второй множитель равен нулю:
$$(3x-2)(3-2x)^2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} 3x-2 \le 0 \\ 3-2x = 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{2}{3} \\ x = 1{,}5 \end{array}\right..$$
Ответ: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup \{1{,}5\}$.

3. Это уравнение является квадратным при $a \ne 0$ или линейным при $a = 0$. Рассмотрим оба случая отдельно.
При $a \ne 0$ его дискриминант $D = (a+2b)^2 - 4ab = a^2 + 4b^2 \ge 0$, таким образом, уравнение имеет хотя бы один корень.
При $a = 0$ уравнение можно записать в виде $-2bx + b = 0 \Leftrightarrow -b(2x-1) = 0$ и число $x = 0{,}5$ является корнем при любом b, **что и требовалось доказать**.

4. Сделаем замену переменной $t = \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2$ и получим уравнение
$$4t^2 + 7t - 2 = 0, \qquad t_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{8}, \ \ t_1 = -2, t_2 = \frac{1}{4}$$
Заметим, что $t \ge 0$ и, значит, первый корень не дает решений, таким образом $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(2x - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)\left(2x - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(2x - \frac{2}{3}\right)\left(2x + \frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$ $x_1 = \frac{1}{3};\ x_2 = -\frac{1}{6}$.
Ответ: $\frac{1}{3};\ -\frac{1}{6}$.

5. Количество квартир в Колином подъезде до его квартиры включительно равно 4(количество квартир на этаже)·4(количество нижних этажей)+3(на его этаже)=19. Значит, количество квартир во всех предыдущих подъездах равно $83 - 19 = 64$, а самих этажей во всех этих подъездах $64 : 4 = 16$. Аналогично, в Васином подъезде $4 \cdot 2 + 1 = 9$ квартир с меньшими или равными номерами. Тогда количество квартир во всех предыдущих Васиному подъездах равно $169 - 9 = 160$, а самих этажей во всех этих подъездах $160 : 4 = 40$. И 16, и 40 должны делиться на количество этажей в подъезде. При этом количество этажей не меньше 5. Единственный общий делитель 16 и 40, больший или равный 5, это 8.
Ответ: в доме 8 этажей.

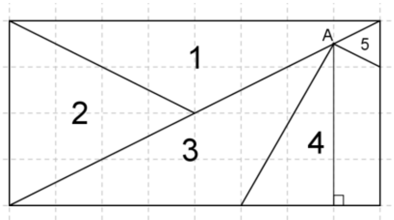
6. Пользуясь условием про острые углы, нарисуем трапецию. По теореме Пифагора (AA_1 и BB_1 – высоты) вычислим
$A_1C = \sqrt{AC^2 - AA_1^2} = \sqrt{64-16} = 4\sqrt{3}$;
$B_1D = \sqrt{DB^2 - BB_1^2} = \sqrt{36-16} = 2\sqrt{5}$.
Заметим также, что $AB + DC = A_1C + DB_1$.
Отсюда по формуле площади трапеции получаем: $S = \frac{AB+DC}{2} \cdot AA_1 = \frac{2\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 4\left(\sqrt{5} + 2\sqrt{3}\right)$.



Ответ: площадь трапеции равна $4\left(\sqrt{5} + 2\sqrt{3}\right)$.

2011 год

1. Заметим, что если число делится на 5, то его квадрат должен делиться на 25 ($(5n)^2 = 25n^2$), а если число не делится на 5, то его квадрат тоже не делится на 5. Число вида 55…5 делится на 5 (в частном – число, записанное единицами), и не делится на 25, значит, все такие числа не являются полными квадратами.
   Ответ: нет.

2. Площади частей 1 и 2 равны четвертям площади прямоугольника – по 8.
   

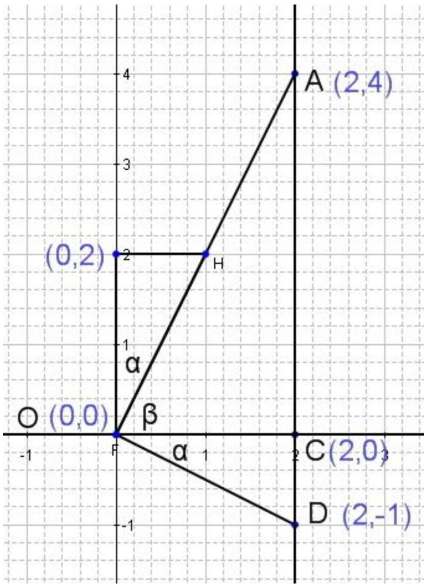
   Точка A – середина стороны клетки. Поэтому площадь куска 3 равна $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3\frac{1}{2} = 8\frac{3}{4}$. Значит, она больше половины от половины тортика, и больше куска 4 (и, конечно, маленького куска).
   Можно и "честно" посчитать площади всех треугольников, умножая половину основания на высоту. При этом важно в каждом треугольнике взять удобную высоту и основание.
   Ответ: самую большую площадь имеет кусок номер 3.

3. Не сложно заметить, что подобных слагаемых после раскрытия скобок не будет. Раскроем произведение первых двух скобок. Получим всего девять слагаемых – каждый из трех слагаемых в первой скобке умножится на каждый из трех во второй. При этом получится 5 отрицательных слагаемых – это произведения 2 отрицательных из первой и 2 положительных из второй (итого 4), и произведение одного положительного на один отрицательный во второй. Оставшиеся четыре – положительные. Аналогично, после умножения полученных пяти отрицательных на одно положительное в третьей скобке, и четырех положительных на два отрицательных в третьей, получаем тринадцать $(5 \cdot 1 + 4 \cdot 2)$ отрицательных. А всего слагаемых после раскрытия скобок получится $9 \cdot 3 = 27$.
   Ответ: 13 слагаемых со знаком "минус", 27 слагаемых всего.

4. $0{,}35 \cdot (0{,}35x - 1) - 0{,}45 \cdot (0{,}45x - 2) = 0 \Leftrightarrow$
   $0{,}35^2x - 0{,}45^2x = 0{,}35 - 2 \cdot 0{,}45 \quad \Leftrightarrow$
   $0{,}45^2x - 0{,}35^2x = 2 \cdot 0{,}45 - 0{,}35 \quad \Leftrightarrow$
   $x(0{,}45 - 0{,}35)(0{,}45 + 0{,}35) = 0{,}55 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{0{,}55}{0{,}08}$.
   Ответ: $x = \frac{55}{8}$.

5. Давайте забудем про дубы, которые вырубили, и подумаем про осины, число которых не изменилось. Вначале их было x штук, которые составляли 1% леса, а в конце их осталось x штук, которые составляли 2% леса. Значит, сперва деревьев в лесу было $100x$, а потом стало $50x$. Значит, вырубили половину леса.
   Ответ: 50%.

6. Сторона, параллельная оси ординат, должна лежать на прямой $x = 2$ (эта сторона не может содержать начало координат). Ясно, что прямой угол треугольника может быть либо при вершине O (начале координат), либо при третьей вершине. Если при третьей, то третья сторона треугольника лежит на оси Ox, координаты третьей вершины – $C(2;0)$. Если же прямой угол при вершине O, то координаты третьей вершины $(2;-1)$ (смотри рисунок).
   Ответ: $(2;0)$ или $(2;-1)$

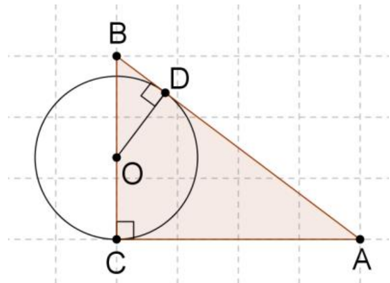


2012 год

1. Заметим, что $9\sqrt{3} - 3\sqrt{27} = 9\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = 0$.
   Также $\sqrt{7} < \sqrt{16} \;\Rightarrow\; \sqrt{7} < 4 \;\Rightarrow\; \sqrt{7} - 4 < 0$.
   $2\sqrt{19} = \sqrt{4 \cdot 19} = \sqrt{76}$; $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$; $\sqrt{76} > \sqrt{75} > 0 \;\Rightarrow\; 2\sqrt{19} > 5\sqrt{3} > 0$.
   Итого получаем $\sqrt{7} - 4 < 9\sqrt{3} - 3\sqrt{27} < 5\sqrt{3} < 2\sqrt{19}$.
   Ответ: $\sqrt{7} - 4 < 9\sqrt{3} - 3\sqrt{27} < 5\sqrt{3} < 2\sqrt{19}$.

2. Раз произведение данных чисел равно 1000, то в их разложение на простые множители могут входить только 2 и 5, причем не одновременно (иначе число будет делиться на 10). Это означает, что одно из чисел равно 5^3, а второе 2^3, и тогда их сумма равна $125 + 8 = 133$.
   Ответ: 133.

3. Проведем радиус в точку касания окружности со вторым катетом AC. Этот радиус должен быть перпендикулярен AC, значит, он целиком лежит на катете BC, т.е. окружность касается второго катета в вершине прямого угла C (смотри рисунок).



   Пусть окружность касается гипотенузы в точке D, тогда $OD \perp AB$.
   OC и OD – радиусы окружности, значит, $OD = 4$; $BO = BC - OC = 5$. Кроме того, по теореме Пифагора $BD = \sqrt{25 - 16} = 3$.
   Рассмотрим треугольники ODB и ACB: $\angle ODB = \angle ACB = 90°$; $\angle B$ – общий, следовательно, ΔODB подобен ΔACB, причем $\frac{OD}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{OB}{AB}$. Отсюда следует, что $AC = \frac{BC \cdot OD}{BD} = \frac{9 \cdot 4}{3} = 12$. Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 54$.
   Ответ: $S_{ABC} = 54$.

4. Обозначим за x время (в минутах), которое потребовалось Пете для того, чтобы вспомнить о ручке. Если Петя будет возвращаться за ручкой, то придет в школу на 10 минут позже, чем если бы он не возвращался (3 мин до звонка + 7 мин после звонка) или, что то же самое, на $2x$ минут позже (ему придется потратить два раза по x минут – на путь до дома и обратно до точки просветления). Таким образом, $2x = 10; x = 5$. Весь путь занимает 20 минут, а вспомнил он о ручке через 5 минут, значит прошел к этому времени $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ пути.
   Ответ: $\frac{1}{4}$ пути.

5. Для того, чтобы графики данных функций пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $2ax^2 + 2x + 1 = 5x^2 + 2ax - 2$ или, что то же самое, $(2a - 5)x^2 - 2(a - 1)x + 3 = 0$ имело ровно одно решение.
   Возможны два случая:
   а) это уравнение является линейным, т.е. $(2a - 5) = 0$;
   б) это уравнение является квадратным.

Рассмотрим оба случая:

а) $2a-5=0 \Leftrightarrow a=2{,}5$. Уравнение выглядит так: $-2(2{,}5-1)x+3=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$. В этом случае уравнение имеет одно решение $x=1$, значит, графики пересекаются в одной точке с координатами $(1;8)$.

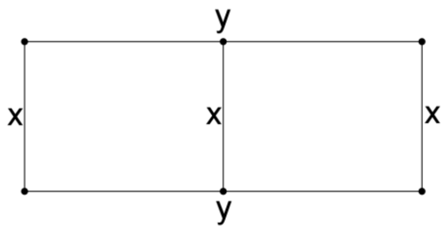
б) $a \neq 2{,}5$. В этом случае уравнение квадратное и имеет ровно одно решение тогда и только тогда, когда его дискриминант равен 0.

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-3(2a-5)=a^2-2a+1-6a+15=a^2-8a+16=(a-4)^2$.

Дискриминант равен 0 при $a=4$. Если $a=4$, то уравнение имеет одно решение $x=\frac{(a-1)}{2a-5}=\frac{3}{3}=1$, значит, графики данных функций пересекаются в одной точке с координатами (1;11).

Ответ: $a=2{,}5$ и $a=4$.

6. *Решение 1*.



Заметим, что по условию $3x+2y=24$, тогда $y=\frac{24-3x}{2}=12-1{,}5x$.

Площадь $S=xy=x(12-1{,}5x)=-1{,}5x^2+12x$, т.е. площадь – это квадратичная функция от x.

Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Наибольшее значение этой функции "достигается в вершине параболы". Абсцисса вершины параболы вычисляется по формуле $x_в=\frac{-12}{2(-1{,}5)}=4$, то есть наибольшее значение площади достигается при $x=4$, при этом $y=6$.

Решение 2.

Поскольку спички ломать нельзя, то x и y – натуральные числа. Из равенства $3x+2y=24$ получаем, что $y=3(8-x)$, то есть y делится на 3. Из того же равенства $3x+2y=24$ следует (x и y – натуральные числа!), что для y есть всего три возможности: $y=3, y=6, y=9$. Рассмотрим все три случая:

а) $y=3$, тогда $x=6$ и $S=xy=18$.

б) $y=6$, тогда $x=4$ и $S=xy=24$.

в) $y=9$, тогда $x=2$ и $S=xy=18$.

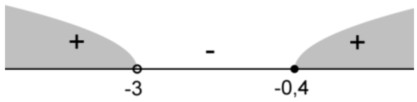
Наибольшей площадь получается при $x=4$ и $y=6$.

Ответ: $x=4$ и $y=6$.

2013 год

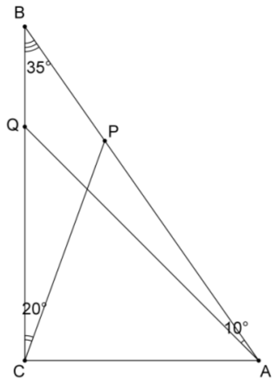
1. Заметим: если, двигаясь и туда и обратно на транспорте, Юра тратит 20 минут, то путь на транспорте только в одну из сторон занимает 10 минут (половина от 20). Тогда можно сделать вывод, что путь в одну из сторон пешком это $(50-10)$ минут, т.е. 40 минут. Отсюда получаем, что путь туда и обратно пешком равен $(40 \cdot 2)$ минут, т.е. 80 минут.
Ответ: 80 минут.

2. $\frac{7x+3}{x+3} \geq -\frac{x}{2(x+3)} \Leftrightarrow \frac{2(7x+3)+x}{2(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{15x+6}{2(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{15(x+0{,}4)}{2(x+3)} \geq 0.$

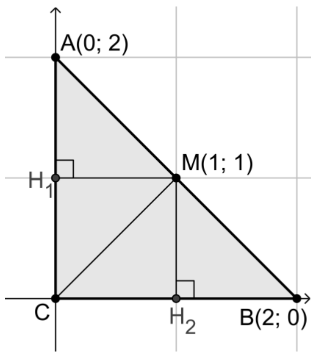


Ответ: $(-\infty; -3) \cup [-0{,}4; +\infty)$.

3. Рассмотрим ΔPCA. В нем: $\angle PCA = 90° - \angle BCP = 90° - 20° = 70°$;
$\angle CAP = 90° - \angle ABC = 90° - 35° = 55°$;
$\angle APC = 180° - \angle PCA - \angle CAP = 180° - 70° - 55° = 55°$.
Таким образом, ΔPCA – равнобедренный, причем $PC = CA$.
Рассмотрим ΔQCA. В нем: $\angle QCA = 90°$;
$\angle CAQ = 55° - \angle QAB = 45°$; $\angle CQA = 90° - \angle CAQ = 45°$.
Таким образом, ΔQCA – равнобедренный, причем $QC = CA$.
Соответственно, $PC = CA = QC$ и ΔQCP – равнобедренный.
Следовательно: $\angle QPC = \frac{180° - \angle QCP}{2} = \frac{180° - 20°}{2} = 80°$.
Ответ: $\angle QPC = 80°$.



4. Соединим исходную точку M с началом координат (см. рисунок). Площадь треугольника ABC можно посчитать двумя способами:
1) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{ab}{2}$;
2) $S_{ABC} = S_{AMC} + S_{BMC} = \frac{1}{2} MH_1 \cdot AC + \frac{1}{2} MH_2 \cdot BC = \frac{a+b}{2}$.



Получаем систему: $\begin{cases} \frac{ab}{2} = 2 \\ \frac{a+b}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ a + b = 4 \end{cases}$.
Единственное решение этой системы: $a = b = 2$, т.е. треугольник ΔABC – равнобедренный.
Для того, чтобы прямая, проходящая через вершину, делила площадь треугольника пополам, она должна проходить через середину противоположной стороны. Возможны три случая:
1) Прямая AA_1, где A_1 – середина BC, проходит через точки $A(0; 2)$ и $A_1(1; 0)$. Уравнение этой прямой $y = -2x + 2$.
2) Прямая BB_1, где B_1 – середина AC, проходит через точки $B(2; 0)$ и $B_1(0; 1)$. Уравнение этой прямой $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

3) Прямая CC_1, где C_1 – середина AB, проходит через точки $C(0;0)$ и $C_1(1;1)$. Уравнение этой прямой $y = x$.

Ответ: $y = -2x + 2$; $y = -\frac{1}{2}x + 1$; $y = x$.

5. Предположим, что никто из них не ошибся. Обозначим сумму цифр Валериного числа через S. Нельзя не отметить, что числа 239 и 566 взаимно просты, т.е. не имеют общих делителей (число 239 вообще простое), следовательно, наименьшее натуральное число, которое делится и на 239, и на 566, это число $239 \cdot 566$.

   Несложно заметить, что $239 \cdot 566 > 200 \cdot 500$. Таким образом, $S > 100\,000$. Самая большая сумма цифр получится у 2013-значного числа, состоящего только из девяток. Сумма цифр такого числа равна $2013 \cdot 9$. Так как $2013 \cdot 9 < 2013 \cdot 10$, то $S < 20\,130$. Получаем противоречие: S не может быть одновременно больше 100 000 и меньше 20 130, значит, кто-то из них ошибся.

6. Воспользуемся теоремой Виета: числа p и q должны удовлетворять системе:
   $$\begin{cases} p + q = -p \\ p \cdot q = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p + q = 0 \\ q \cdot (p - 1) = 0 \end{cases}.$$
   Второе уравнение будет выполнено в двух случаях: если $q = 0$ или если $p = 1$:

   1) $q = 0$, тогда из первого уравнения $2p = 0$; $p = 0$. Уравнение имеет вид $x^2 = 0$, его корнем является только $0 = p = q$.
   2) $p = 1$, тогда $q = -2$, уравнение имеет вид $x^2 + x - 2 = 0$, его корни $1 = p$ и $-2 = q$.

   Ответ: $p = q = 0$ или $p = 1; q = -2$.

2014 год

1. $\left(2+\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{\left(4\sqrt{5}-11\right)^2}=4+4\sqrt{5}+5+\left|4\sqrt{5}-11\right|=$
$=9+4\sqrt{5}+11-4\sqrt{5}=20$. Можно заметить: $20=\sqrt{400}$. Так как $400>396$, то и $\sqrt{400}>\sqrt{396}$. Значит, $\left(2+\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{\left(4\sqrt{5}-11\right)^2}>\sqrt{396}$.
Ответ: первое число больше.

2. *Решение 1.*

$$\frac{|x-1|}{x-2}<2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1\ge 0\\ \frac{x-1}{x-2}<2\end{cases}\\ \begin{cases}x-1<0\\ \frac{1-x}{x-2}<2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ \frac{3-x}{x-2}<0\end{cases}\\ \begin{cases}x<1\\ 1-x>2(x-2)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ \left[\begin{array}{l}x>3\\ x<2\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<1\\ x<\frac{5}{3}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1\le x<2\\ x>3\\ x<1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\ x<2\end{array}\right..$$

Решение 2.
Если $x<2$, то он является решением, так как в этом случае левая часть отрицательна и, значит, меньше 2.
Число $x=2$ не входит в область определения и решением не является.
Если $x>2$, то можно раскрыть модуль ($|x-1|=x-1$) и домножить неравенство на (положительное!) число $(x-2)$. Получим равносильное неравенство $x-1<2(x-2)\Leftrightarrow x>3$.
Ответ: $x<2, x>3$.

3. При делении получаем периодическую дробь $\frac{1}{42}=0{,}0(238095)$:

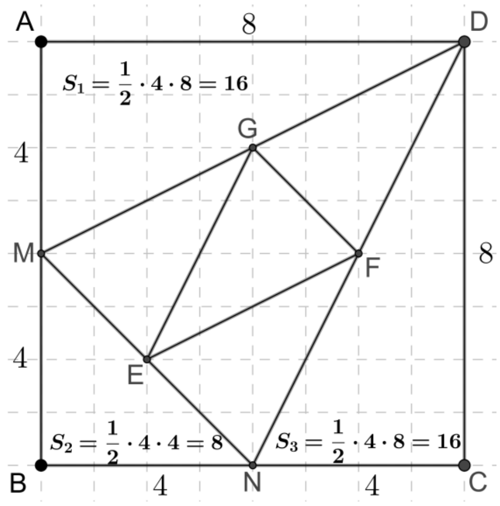
```
_ 1, 0 0 0 0  0  0 0 | 4 2
     8 4             |---------------------
   ------            | 0, 0 2 3 8 0 9 5...
   _ 1 6 0           |
     1 2 6
     -------
     _ 3 4 0
       3 3 6
       -------
         _ 4 0 0
           3 7 8
           -------
           _2 2 0
            2 1 0
           -------
           _ 1 0 0
               8 4
```

Длина периода составляет 6 разрядов, при этом $2014=6\cdot 335+4=$
$=1$(первый 0 после запятой) $+\ 6\cdot 335$(335 периодов) $+\ 3$(еще три цифры периода).

Значит, на 2014 месте стоит третья цифра периода, т.е. цифра 8. После вычеркивания и сдвигания все первые 2013 цифр после запятой остались прежними, а на 2014 месте цифра уменьшилась – стала 0. Значит, число уменьшилось.

Ответ: первоначальное число больше.

4. Треугольник EGF образован средними линиями треугольника DMN. Значит, площадь ΔEGF составляет четверть площади ΔDMN. Площадь ΔDMN равна разности площади квадрата и $(S_1 + S_2 + S_3)$ (смотри рисунок). Итак, площадь ΔDMN равна $8 \cdot 8 - 16 - 16 - 8 = 24$. Тогда площадь ΔEGF: $\frac{24}{4} = 6$.



Ответ: искомая площадь 6.

5. а) Да, удастся:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	2	6	5	4	3	9	1	7

б) Предположим, что Косте это удалось. Под карточкой с числом 11 лежит одна из карточек с числами от 1 до 11, а значит, сумма чисел в этом столбике находится в пределах от 12 до 22. В этом промежутке есть всего один точный квадрат – это число 16, значит, под карточкой с числом 11 Костя положил карточку с числом 5 (16–11=5).

Под карточкой с числом 4 тоже лежит одна из карточек с числами от 1 до 11, а значит, сумма чисел в этом столбике находится в пределах от 5 до 15. В этом промежутке тоже всего один точный квадрат – это число 9, но чтобы получить в этом столбике 9, нужно положить карточку "5", но она уже занята. Получаем противоречие, значит, в этот раз Косте не удастся выложить свои карточки.

Ответ: а) удастся; б) не удастся.

2015 год

1. **Ответ:** например, 2899999 и 2900000. Возможны и другие варианты.

2. $(x-4)\sqrt{x^2-7x+10} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-4 \geq 0 \\ x^2-7x+10=0 \end{array}\right. \\ x^2-7x+10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

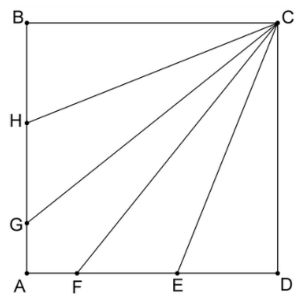
$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ x=2 \\ x=5 \end{array}\right. \\ x \in (-\infty;2] \cup [5;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in [5;+\infty) \cup \{2\}.$

   Ответ: $x \in [5;+\infty) \cup \{2\}$.

3. Заметим, что левая часть уравнения всегда больше нуля. Значит, знаменатель правой части должен быть больше нуля. Тогда исходное уравнение при этом ограничении равносильно уравнению $|x-1{,}5|=1$, то есть $x=2{,}5$ или $x=0{,}5$. При $x=2{,}5$ знаменатель правой части меньше нуля, при $x=0{,}5$ он больше нуля.
   Ответ: $x=0{,}5$.

4. Если сложить количество дождливых вечеров (v_d) с количеством вечеров без дождей (v), то получится общее количество дней в походе (d). Аналогично, если сложить количество дождливых утр (u_d) с количеством недождливых (u), то тоже получится общее количество дней. Значит $v+v_d+u_d+u=2d$. По условию, $v=11$ (вечера без дождя), $u=16$ (утра без дождя), и $v_d+u_d=11$ (утренние и вечерние дожди – это все дожди). Тогда $11+11+16=38=2d,\ d=19$.
   Ответ: поход длился 19 дней.

5. $S_{FCE}=\frac{1}{5}\cdot AD\cdot CD=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot FE$, откуда $FE:AD=2:5$.
   Ответ: $FE:AD=2:5$.



6. Так как у уравнения есть корни, то дискриминант соответствующего уравнения $0{,}5x^2-2x-5a+1=0$ больше нуля, т.е. $2^2-4\cdot 0{,}5\cdot(-5a+1)>0$, откуда $a>-\frac{1}{5}$.
   Сумма кубов корней m и n равна:
   $m^3+n^3=(m+n)(m^2+n^2-mn)=(m+n)((m+n)^2-3mn)$.
   Так как по теореме Виета $m+n=4$, $mn=\frac{-5a+1}{0{,}5}=-10a+2$, получаем условие $4\cdot\big(16-3(-10a+2)\big)<40$, то есть $a<0$.
   Ответ: $a\in\left(-\frac{1}{5};0\right)$.

2016 год

1. Условие равносильно системе $\begin{cases} f(x) > x \\ g(x) > x \end{cases}$.

   Решим по отдельности каждое неравенство.

   $x^2 - 3x > x \Leftrightarrow x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow x(x-4) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

   $-\frac{1}{x+2} > x \Leftrightarrow x + \frac{1}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x+1}{x+2} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2)$.

   Пересекая множества, получаем $x \in (-\infty; -2)$.

   Ответ: $x \in (-\infty; -2)$.

2. Так как числа натуральные, то:

   $\sqrt{a + \frac{a}{b}} = a \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} \Leftrightarrow a + \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b} \Leftrightarrow ab + a = a^3 \Leftrightarrow b + 1 = a^2$.

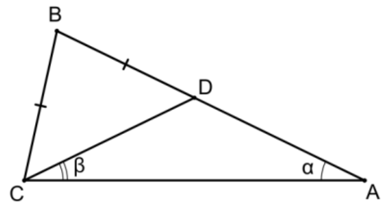
   Видно, что подходит вариант $a = 4,\ b = 15$, а также много других вариантов.

   Ответ: не прав.

3. Обозначим количество колонн на станции как x. Тогда количества оставшихся колонн для учеников равны $x - 15, x - 12, x - 7$ (очевидно, они расположены по возрастанию). Какие-то два из них связаны равенством $3a = b$. Возможны три варианта $3(x - 15) = x - 7$, $3(x - 15) = x - 12$, $3(x - 12) = x - 7$. Из первого варианта получаем $x = 19$, второй и третий дают не целое значение количества колонн на станции. Таким образом, оставшийся ученик насчитал $x - 12 = 7$ колонн.

   Ответ: 7 колонн.

4. Пусть $\angle DAC = \alpha$, $\angle DCA = \beta$. По условию $\angle BCA = 3\alpha$, тогда $\angle BCD = 3\alpha - \beta$. Треугольник CBD – равнобедренный, значит, углы при его основании равны, т.е. $\angle BDC = \angle BCD = 3\alpha - \beta$. Кроме того, $\angle BDC$ является внешним углом для треугольника ADC, значит, $\angle BDC = \angle DCA + \angle DAC = \alpha + \beta$. Получается, что $3\alpha - \beta = \alpha + \beta \ \Rightarrow\ 2\alpha = 2\beta \ \Rightarrow\ \alpha = \beta$.

   В треугольнике ADC углы при основании равны, значит он равнобедренный, т.е. $CD = AD = 4$.

   Ответ: $CD = 4$.

5. Возрасты супругов отличаются на 5, значит они разной четности, и их сумма нечетна. Тогда все перечисленные пары в условии – не супруги. Наталья замужем за Петром – он единственный не "невозможный" супруг. Судьба Василия – Анна, а не Ирина, с которой у него всего год разницы. Тогда Семен женат на Ирине. Найдем теперь возраст каждого из них. Пусть возраст Натальи – x. Тогда возрасты оставшихся героев таковы: Петр – $(x + 5)$, Василий – $(48 - x)$, Анна – $(43 - x)$, Семен – $(52 - x)$, Ирина – $(47 - x)$. Получаем уравнение:

   $x + (x + 5) + (48 - x) + (43 - x) + (52 - x) + (47 - x) = 151$, откуда $x = 22$.

   Ответ: Семейные пары такие: Наталья и Петр (22 и 27 лет); Анна и Василий (21 и 26 лет); Ирина и Семен (25 и 30 лет).

6. *Решение 1*.

Рассмотрим квадратичную функцию с единственным корнем $x = 3$ (значит, в точке 3 у нее вершина и значение 0) и старшим коэффициентом a. Ее коэффициенты при выполнении условия про их сумму и будут искомыми числами. Представим ее в виде $f(x) = a(x-3)^2$, причем $f(1) = 4$, то есть $4 = a(1-3)^2 \Longrightarrow a = 1$.

Тогда $f(x) = 1 \cdot (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$.

Решение 2.

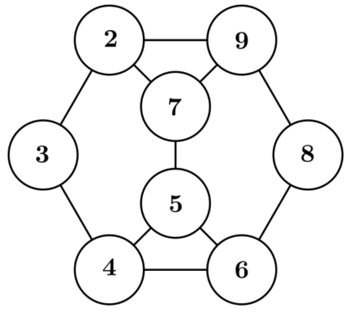
Корень 3 – единственный. Рассмотрим его как два совпадающих корня квадратного уравнения. По теореме Виета $3 + 3 = -\frac{b}{a}$; $3 \cdot 3 = \frac{c}{a}$. Получаем систему:

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ b = -6a \\ c = 9a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 6a + 9a = 4 \\ b = -6a \\ c = 9a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 6a + 9a = 4 \\ b = -6a \\ c = 9a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Ответ: $a = 1,\ b = -6,\ c = 9$.

2017 год

1. **Ответ:** (*Возможны и другие варианты решения*.)

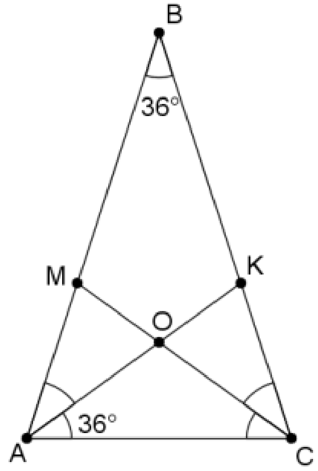


2. Андрей пробежал 100 м за то же время, за которое Борис пробежал 90 м, поэтому скорость Бориса составляет 0,9 скорости Андрея. Борис пробежал 100 м за то же время, за которое Саша пробежал 90 м, поэтому скорость Саши составляет 0,9 скорости Бориса или 0,81 скорости Андрея. Значит, за то время, за которое Андрей пробежит 100 м, Борис пробежит 81 м, т.е. отстанет от него на 19 м.
Ответ: на 19 м.

3. Воспользуемся формулой разности квадратов: $\begin{cases}(x^2-y^2)(x^2+y^2)=15,\\ x^2-y^2=3.\end{cases}$
Поделим первое уравнение на второе, получим: $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ x^2-y^2=3.\end{cases}$
Сложим оба уравнения: $2x^2=8$; тогда $x^2=4$, а значит $x=2$ или $x=-2$. Подставив значения в первое уравнение, получим $4+y^2=5$, $y^2=1$, тогда $y=1$ или $y=-1$.
Ответ: 4 пары решений: (2;1), (2;-1), (-2;1), (-2;-1).

4. Так как все числа целые, то их сумма или разность тоже целые. Сложим первое и четвертое число, получим $\frac{2}{a}$; вычтем из первого числа третье, получим $\frac{2}{b}$; вычтем из первого числа второе, получим $\frac{2}{c}$. Таким образом, $\frac{2}{a}$, $\frac{2}{b}$ и $\frac{2}{c}$ – целые, но по условию a, b, c – натуральные числа. Тогда каждое из чисел a, b и c равно 1 или 2. Докажем, что хотя бы одно из чисел a, b или c равно 1 от противного. Если среди них нет 1, то все три числа a, b, c равны 2, тогда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{2}$ – не является целым! Получили противоречие, значит хотя бы одно из чисел равно 1.
Что и требовалось доказать.

5. $\angle ABC=36°$, треугольник ABC равнобедренный, откуда $\angle A=\angle C=(180°-36°):2=72°$. Биссектрисы AK и CM делят углы по 72° на углы по 36°. Таким образом, треугольники ABK и BCM – равнобедренные (два угла по 36°) и $AK=BK$, $CM=MB$.
Треугольник AOC равнобедренный (два угла по 36°), откуда $AO=OC$. Треугольники AMO и CKO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда $AM=KC$ и, как следствие, $BM=BK$. Получаем, что периметр треугольника AMO равен:
$$AM+MO+OA=AM+KO+OA=AM+KA=$$
$$=AM+BK=AM+BM=1.$$
Ответ: 1.



6. *Решение 1*.

Из условия $y = 1 - x$, тогда

$$xy = x(1 - x) = x - x^2 = -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4},$$

так как квадрат всегда неотрицателен. Максимальное значение равно $\frac{1}{4}$, оно достигается при $x = \frac{1}{2}$.

Решение 2.

Из условия получаем: $xy = x(1 - x)$. Рассмотрим функцию $f(x) = -x^2 + x$. Ее график – парабола, ветви которой направлены вниз. Наибольшее значение квадратичной функции достигается в вершине параболы, при $x = \frac{1}{2}$. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Ответ: максимальное значение выражения xy равно $\frac{1}{4}$.

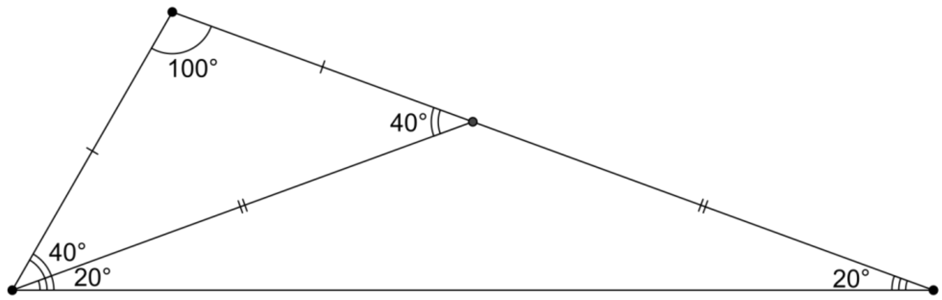
2018 год

1. Проведем равносильные преобразования:

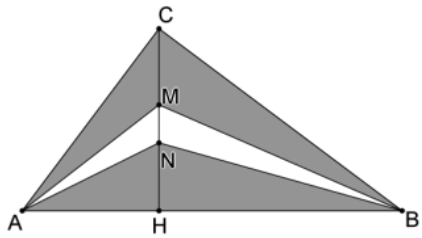
$$\left(\frac{x-20}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{9x-5}{3}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{x-20}{2}-\frac{9x-5}{3}\right)\left(\frac{x-20}{2}+\frac{9x-5}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{3\cdot(x-20)-2\cdot(9x-5)}{6}\cdot\frac{3\cdot(x-20)+2\cdot(9x-5)}{6} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{-15x-50}{6}\cdot\frac{21x-70}{6} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(3x+10)\cdot(3x-10) \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$-\frac{10}{3} \leq x \leq \frac{10}{3}.$$

Ответ: $\left[-\frac{10}{3};\frac{10}{3}\right]$.

2. **Ответ:**



3. По теореме Пифагора: $AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$.



Найдем площадь ΔABC двумя способами:
во-первых, $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$;
во-вторых, $S_{ABC}=19+S_{AMBN}=$
$=19+\dfrac{1}{2}\cdot AH\cdot MN+\dfrac{1}{2}\cdot BH\cdot MN=$
$=19+\frac{1}{2}MN\cdot(AH+BH)=19+\frac{1}{2}MN\cdot AB=19+\frac{1}{2}MN\cdot 10=19+5\cdot MN.$
Отсюда $24=19+5\cdot MN$, т.е. $MN=1$.
Ответ: $MN=1$.

4. Рассмотрим фигуры, стоящие в клетках по периметру доски 4×4, но не в углах. Они – белые, так как каждая из них имеет нечетное количество соседей и они врут, утверждая: "Среди моих соседей поровну белых и черных фигур". Далее, фигуры, стоящие в угловых клетках, тоже являются белыми, так как имеют каждая по два соседа, каждый из которых является белой фигурой.

Теперь рассмотрим фигуры, стоящие в клетках "центрального" квадрата 2×2. По условию задачи хотя бы одна черная фигура стоит на доске. Так как периметр квадрата занимают только белые фигуры, то хотя бы одну клетку "центрального" квадрата занимает черная фигура. Рассмотрим такую клетку. У любой клетки "центрального" квадрата по четыре соседних, две из которых точно занимают белые фигуры, стоящие на краю. Таким образом, две другие "центральные" клетки, соседние с рассматриваемой, занимают черные фигуры.

У оставшейся клетки "центрального" квадрата на четырех клетках-соседях находятся две черные и две белые фигуры, следовательно, фигура, стоящая в оставшейся клетке, говорит правду, то есть она черная.

Ответ: среди фигур на доске 12 белых фигур.

5. По обратной теореме Виета корни данного уравнения равны a и 1. Расстояние между корнями равно $|a-1|$. Так как по условию задачи расстояние больше $\sqrt{3}$, получаем неравенство: $|a-1| > \sqrt{3}$.

$$|a-1| > \sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1 > \sqrt{3}, \\ a-1 < -\sqrt{3}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > \sqrt{3}+1, \\ a < 1-\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\infty; 1-\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}+1; +\infty\right)$.

6. Пусть Винни-Пух съедает v кг меда в минуту, а Пятачок – p кг меда в минуту. Тогда за совместное время t поедания меда Винни-Пух и Пятачок съедят $[t(v+p)]$ кг меда. Если бы Винни-Пух ел со скоростью Пятачка, то Винни-Пух и Пятачок съели бы $[(t+4) \cdot 2p]$ кг меда. Если бы Пятачок ел со скоростью Винни-Пуха, то Винни-Пух и Пятачок съели бы $[(t-1) \cdot 2v]$ кг меда.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} t(v+p) = (t+4) \cdot 2p, & (1) \\ t(v+p) = (t-1) \cdot 2v. & (2) \end{cases}$$

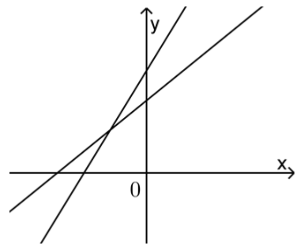
Из (1) получим $t \cdot (v-p) = 8p$. Из (2) получим $t \cdot (v-p) = 2v$. Тогда $8p = 2v$. Таким образом, Винни-Пух ест мед в 4 раза быстрее, чем Пятачок. Подставим полученный результат в (1). Получим:

$$t(4p+p) = (t+4) \cdot 2p \Leftrightarrow \; t \cdot 5p = (t+4) \cdot 2p \Leftrightarrow 3t = 8 \Leftrightarrow t = 2\frac{2}{3}.$$

Ответ: мед был съеден за $2\frac{2}{3}$ минуты или за 2 минуты 40 секунд.

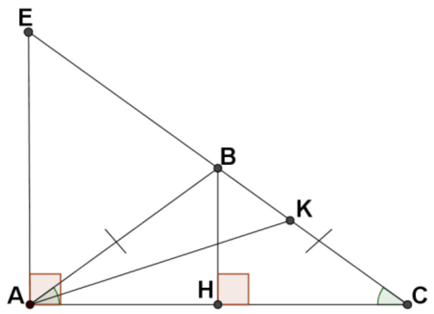
2019 год

1. **Ответ: 2, 4, 6, 12, 24, 48**; возможны и другие варианты.
2. Наименьшее такое число – $66 = 3 + 12 + 21 + 30$. Докажем, что оно наименьшее.
   Во-первых, заметим, что у однозначного числа сумма цифр равна самому числу и среди слагаемых суммы (различных чисел!) не может быть более одного однозначного числа.
   Так как искомое натуральное число должно быть наименьшим, то остальные слагаемые суммы – двузначные числа (иначе сумма будет больше 100, а мы уже нашли число меньше 100).
   Среди однозначных и двузначных чисел существует только два числа с суммой цифр, равной 1 (1 и 10), и только три числа с суммой цифр, равной 2 $(2, 11, 20)$.
   Таким образом, суммы 1 и 2 не реализуются (не найдется четырех различных однозначных и двузначных чисел с такими суммами)
   Существуют ровно четыре различных однозначных и двузначных числа с суммой цифр равной 3: $3, 12, 21, 30$. Их сумма и равна 66.
   Наконец заметим, что для любой суммы цифр, большей 3, сумма минимального набора четырех чисел с этой суммой будет больше 66 (будучи расставлены в порядке возрастания, эти четыре числа числа будут больше, чем 3, 12, 21 и 30 соответственно).
   Ответ: $\mathbf{66}$.
3. $\frac{x}{x+1} = \frac{x+2}{x-2} + 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{x+2+x-2}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} - \frac{2x}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow x \cdot \left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2} = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ \frac{-x-4}{(x+1)\cdot(x-2)} = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = -4. \end{array}\right.$
   Ответ: $\boldsymbol{x = 0}$; $\boldsymbol{x = -4}$.
4. Заметим, что данные прямые пересекаются в точке $(1, a + b)$, а на рисунке они пересекаются в точке с отрицательной абсциссой, чего быть не может.
   Ответ: Лёша не прав.



5. Так как сейчас в банке нечётное число ложек мёда, то Андрей первым ходом вынужден съесть только одну ложку мёда. Далее Костя, желая выиграть, будет брать по одной ложке мёда, чтобы в банке всякий раз оказывалось нечётное число ложек мёда. При этом Андрей будет вынужден съедать только по одной ложке мёда. Такой стратегии Костя будет придерживаться до тех пор, пока в банке не останется 4 ложки мёда. Тогда Костя съест две ложки мёда из четырёх и Андрей сможет съесть только одну ложку из двух оставшихся, после чего Косте достанется 2019-я ложка мёда, которую он съедает и выигрывает.
   Ответ: Костя выиграет.

6. Так как треугольник ABC – равнобедренный, то углы при его основании равны.
Пусть $\angle BCA = \angle BAC = 2\alpha$.
Так как AK – биссектриса треугольника ABC, то $\angle BAK = \angle CAK = \alpha$.
Высота BH, проведённая к основанию AC, является медианой. Значит точка H – середина AC.
Далее, $BH \| AE$, так как $BH \perp AC$ и $AE \perp AC$.



Следовательно, B – середина CE по теореме Фалеса. Тогда BH – средняя линия треугольника ACE, и $AE = 2BH$. По условию задачи $AK = 2BH$, значит треугольник AEK – равнобедренный, в котором $\angle EAK = 90^\circ - \angle CAK = 90^\circ - \alpha$;
$\angle AKE = \frac{180^\circ - (90^\circ - \alpha)}{2} = \frac{90^\circ + \alpha}{2} = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$, откуда $\angle AKC = 135^\circ - \frac{\alpha}{2}$.
Далее, так как сумма углов треугольника AKC равна 180°, то получаем уравнение:
$\alpha + 2\alpha + 135^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{5}{2}\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow \alpha = 18^\circ$. Тогда $2\alpha = 36^\circ$.
Итак, углы треугольника ABC равны $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$.
Ответ: углы треугольника ABC равны $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$.

2020 год

1. Например, Валера задумал 100, а Леша задумал 91:
$$100 + 1 = 91 + 9 + 1 = 101.$$
Ответ: Нет, не верно.

2. Ира не может быть самой красивой, иначе ее фраза верная, а она обязана лгать. Значит, возможны два варианта: Ира самая умная или самая хитрая. Если Ира самая умная, то она сказала правду, и Галя не может быть самой красивой. Тогда самая красивая – Наташа. Если же Ира самая хитрая, то высказывание Наташи ложно, и Наташа может быть только самой красивой. Итак, в любом случае Наташа самая красивая.

Ответ: Наташа.

3. Одним из корней уравнения $x^2 - 4x + 566 - \left(\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right) + 566\right) = 0$ точно является число $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ (так как при подстановке этого числа получается верное равенство $0 = 0$). Избавимся от иррациональности в знаменателе:
$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2 + \sqrt{3}.$$
По обратной теореме Виета сумма корней этого уравнения равна 4, а значит второй корень:
$$4 - \left(2 + \sqrt{3}\right) = 2 - \sqrt{3}.$$
Ответ: $\mathbf{2 + \sqrt{3}}$ и $\mathbf{2 - \sqrt{3}}$.

4. Обозначим количество леденцов у девочек за a, b, c и d, причем $a \le b \le c \le d$. По условию $\begin{cases} a + b \ge 41, \\ a + c \ge 41, \\ a + d \ge 41. \end{cases}$ Сложим все три неравенства: $3a + b + c + d \ge 123$, но $a + b + c + d = 100$, а значит $2a \ge 23$. Поскольку число a – целое, то наименьшее возможное значение $a = 12$. Покажем, что при таком a выполняются все условия: пусть у Лизы – 12 леденцов, у Насти и Ксюши по 29 леденцов, а у Маши – 30 леденцов. Всего у девочек $12 + 29 + 29 + 30 = 100$ леденцов, и у любых двух не меньше 41 леденца.

Ответ: 12.

5. а) $\angle ACN = \angle ACD + \angle DCK + \angle KCN = 45° + \angle DCK + 45° = 90° + \angle DCK$.

   $\angle BCK = \angle BCD + \angle DCK = 90° + \angle DCK$. **Что и требовалось доказать.**

   б) Рассмотрим треугольники ACN и BCK. Уже доказано, что $\angle ACN = \angle BCK$, кроме того AC и CN – диагонали квадратов со сторонами BC и CK соответственно, а значит $\frac{AC}{BC} = \frac{CN}{CK} = \sqrt{2}$. Таким образом, треугольники ACN и BCK подобны по второму признаку, и коэффициент подобия равен $\sqrt{2}$. Но тогда третьи стороны этих треугольников – AN и BK – тоже относятся как $\sqrt{2}$.

   Ответ: б) $\boldsymbol{\frac{AN}{BK} = \sqrt{2}}$.

6. Пусть корни этого уравнения p и $p + 2$. Их сумма равна $2p + 2$, а произведение $p(p + 2) = p^2 + 2p$. Получаем уравнение:

$$p^2 + 2p + 1 = 2p + 2 \Leftrightarrow p^2 = 1 \Leftrightarrow p = \pm 1.$$

   Если $p = 1$, то корни 1 и 3, если $p = -1$, то корни -1 и 1.

   Ответ: 1 и 3 или -1 и 1.

2021 год

1. Например, $n = 124. 124 \vdots 4, 125 \vdots 25, 126 \vdots 9$.

   Ответ: Да.

2. По теореме Виета произведение корней данного уравнения равно -15, значит, второй корень равен $-\frac{15}{3} = -5$, сумма корней равна $-a = 3 + (-5) = -2$, откуда $a = 2$.

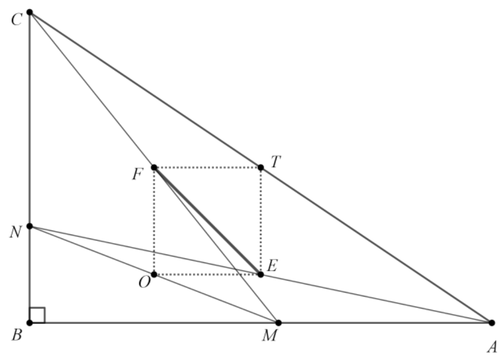
   Второй способ: Достаточно подставить 3 в уравнение, откуда $9 + 3a - 15 = 0$, то есть $a = 2$. Второй корень найдём как в первом варианте решения.

   Ответ: второй корень равен (-5), $a = 2$.

3. Пусть a – количество строк на странице, b – количество букв в строке. Тогда из первого условия получаем: $(a + 4)(b + 4) - ab = 464 \Rightarrow 4(a + b) = 448 \Rightarrow a + b = 112$. После второй операции (уменьшение на три) получим изменение количества букв: $ab - (a - 3) \cdot (b - 3) = 3(a + b) - 9 = 3 \cdot 112 - 9 = 327$.

   Ответ: 327.

4. а) OF и OE – средние линии треугольников с основаниями CN и AM, которые равны 6. Значит, $OF = OE = 3$.



   б) Пусть T – середина AC. Тогда TE и TF – средние линии треугольников с основаниями CN и AM, которые равны 6. Значит $TF = TE = 3$. Тогда $OFTE$ – ромб. Так как $CN \perp AM$, а TF и TE им параллельны, то $OFTE$ – это квадрат со стороной 3. Тогда искомая величина $TO = 3\sqrt{2}$.

   Ответ: $3\sqrt{2}$.

5. Из первого условия $a + b = c + d = 1$. Параболы пересекаются на оси ординат, значит ноль – корень уравнения $(cx + d)^2 = (ax + b)^2$. Отсюда $b^2 = d^2$. Если $b = d$, то $a = c$, и прямые совпадают, а не пересекаются. Значит $b = -d$.

6. За минуту ребята съедят $\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{26}\right)$ долю пиццы или $\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{18}\right)$ долю пирога. $\frac{1}{20} < \frac{1}{18}; \frac{1}{26} < \frac{1}{24}$, значит скорость поедания пирога выше, и пирог съедят быстрее.

   Ответ: пирог.

2022 год

1. Изначально ребята стояли по росту в следующем порядке: Антон, Боря, Вася, Гриша, причём каждый следующий мальчик был на 1 см ниже предыдущего. Обозначим за a количество сантиметров, на которое подрос Антон. Тогда, раз Гриша встал сразу за ним, то он всего на сантиметр его ниже, а был ниже на 3 сантиметра, поэтому он вырос на $a + 2$ сантиметров.

   Посмотрим на Борю и Васю. Если Боря оказался выше Антона на 1 см (а был ниже на 1 см), то он должен был бы вырасти на $a + 2$ см, как и Гриша; а если бы Вася оказался сразу после Гриши, то должен был бы вырасти на a см, как и Антон, значит эти варианты невозможны, и ребята стоят в одном из трёх порядков: БВАГ, ВАГБ или АГБВ, но в первом и третьем случаях Боря и Вася оба выросли одинаково (на $a + 2$ и $a - 1$ см, соответственно).

   Ответ: Вася.

2. Проверим случаи, когда какое-нибудь из этих уравнений не является квадратным:

   1) Если $b = 0$, то первое уравнение (вне зависимости от a) имеет корень 0.

   2) Если $b \neq 0$, и $a = 0$, то второе уравнение имеет корень $\left(-\frac{91}{b}\right)$.

   Если ни одно из чисел a и b не равно 0, то оба уравнения являются квадратными. Чтобы квадратное уравнение имело хотя бы один корень, достаточно, чтобы дискриминант был неотрицательным. Выпишем дискриминанты обоих уравнений: $D_1 = a^2 - 4 \cdot 91b \cdot 19a$ и $D_2 = b^2 + 4 \cdot 91 \cdot 19ab$. Осталось заметить, что сумма дискриминантов $D_1 + D_2 = a^2 + b^2 > 0$, а значит хотя бы один из них больше нуля.

3. Пусть Лёша не меняет направление. Когда он пройдёт ещё 4/9 моста (ему останется пройти 1/9 моста), на мост въедет машина. Догонит она его на конце моста, то есть за одно и то же время машина проедет мост, а Лёша пройдет 1/9 моста. Отношение скоростей $9 : 1$.

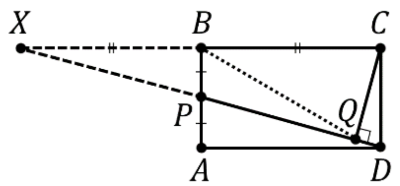
   Ответ: 9 : 1.

4. Поскольку сумма Жениных чисел нечетна, значит и одно из них тоже нечетно. Пусть эти числа a (четное) и b (нечетное). Тогда $2280 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 = a \cdot b$.

   В разложении на простые множители числа b могут быть только нечетные числа, являющиеся делителями числа 2280, и число b должно быть меньше 99 (иначе $a + b \geq 100$). С другой стороны, a тоже меньше 99, значит $b > \frac{2280}{99} > 22$. Остается всего два варианта: либо $b = 5 \cdot 19 = 95$, но тогда $a = 24$ и $a + b = 119$, т.е. не двузначное; либо $b = 3 \cdot 19 = 57$, тогда $a = 40$ и $a + b = 97$.

   Ответ: 57 и 40.

5. Продлим PD за точку P, а BC за точку B, их пересечение обозначим X. Треугольники XBP и PAD равны по 2 углам и стороне между ними, поэтому $XB = AD = BC$. Тогда QB – медиана в прямоугольном треугольнике QXC, проведённая к гипотенузе, поэтому $QB = BC$, **ч.т.д.**



6. Раскроем в данном равенстве скобки и перенесём все слагаемые в левую часть:

$$a^2 + c^2 - 2bc + b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + (c - b)^2 = 0.$$

   Сумма квадратов равна 0 тогда и только тогда, когда каждый квадрат равен 0, поэтому $a = 0$ и $b = c$. Осталось подставить это в то выражение, которое надо вычислить:

$$b(b - 5c) + (a + 2c)^2 = b(b - 5b) + (0 + 2b)^2 = b^2 - 5b^2 + 4b^2 = 0.$$

   Ответ: 0.