Скалярное умножение. И прочие умножения

I История, терминология, обозначения, определение

II свойства скалярного умножения

III От алгебры к геометрии

IY От скалярного умножения к геометрии

Y От скалярного умножения к алгебре

YI Другое скалярное умножение

1. Сначала – о терминологии: умножение – это операция на множестве векторов, произведение – это результат операции, вещественное число.
   Необычность результата – это операция внешняя. Результатом является объект не из того множества, на котором заданы компоненты.
   Как же такое действие могло появиться и зачем?
   К этому понятию можно придти, исходя из механики. Давно было известно, что при прямолинейном движении точки из положения A в положение B работа силы F при перемещении $\vec{AB} = \vec{S}$ измеряется произведением $F \cdot S \cdot \cos \varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{S}$.
   Но исторически это понятие появилось в работах ирландского математика В.Гамильтона, когда он обобщил понятие комплексного числа.
   Сама операция несколько таинственна. В самом деле, мы привыкли перемножать числа – получается число. Перемножаем функции – получаем функцию. Перемножаем многочлены – получаем многочлен. Вообще – совершаем некое действие с объектами одной и той же природы и получаем объект той же природы, то есть из того же множества, в котором находились исходные объекты.
   Однако не всегда так. В самом деле, когда мы пишем формулу $S = vt$ для равномерного прямолинейного движения, то мы перемножаем

объекты разной природы: время и скорость. И даже в таком выражении $S_1 = 2S_2$ при сравнении площадей двух фигур площадями S_1 и S_2 мы число умножаем на площадь.

А тут совсем иное – перемножаем векторы, а получаем вовсе не вектор, а число.

В теории векторов действительно не всё так, как нам было известно ранее. Можно умножать число и вектор. А векторы можно перемножать двумя различными способами, один из которых скалярное умножение, когда в результате получается число; другой способ – векторное умножение, когда получается вектор.

Записывать скалярное умножение двух векторов можно так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, но позволительно и без точки, как мы это делаем с буквами в алгебре - $\vec{a}\,\vec{b}$. Если векторы записывать без стрелочки сверху, а только выделяя их жирным шрифтом, то получаем такую запись скалярного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – $\boldsymbol{ab}$.

Определяют скалярное умножение по-разному, в зависимости от удобства дальнейшего изложения, в первуюочередь для доказательства его свойств..

Возможны такие определения: «геометрическое», «проекционное», координатное.

Геометрическое определение таково. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется выражение $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$, где $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ - длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно, φ – угол между этими векторами. Сокращённая запись этого определения такова: $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\varphi$, ещё компактнее так:

$\boldsymbol{ab} = ab\cos\varphi$ где a и b - сокращённые обозначения длин векторов соответственно $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Такое определение особенно понятно и удобно, когда векторы единичные, то есть длины их равны 1. Тогда скалярное произведение двух векторов – это просто

косинус угла между такими векторами или, при случае, синус дополнительного к нему угла (дополнительный угол – это угол, дополняющий данный до прямого).
(Перефразируя выражение для скалярного произведения не единичных векторов, скажем, что оно – «длинный» косинус, то есть косинус, снабжённый длинами).

В этом определении есть шероховатость. Дело в том, что вектор может быть нулевым, а угол между векторами, среди которых есть нулевой вектор, не определяется – незачем, да и с однозначностью непонятно, что делать, какое же направление ему приписать? - Поэтому геометрическое определение дополняется таким условием: если среди векторов есть нулевой, то скалярное произведение таких векторов равно нулю.

Геометрическое определение приятно своей наглядностью – векторы нарисованы, угол между ними виден.

Доказательство свойств скалярного умножения при таком определении не слишком просто – об этом далее.

Рассмотрим другое определение скалярного умножения – «проекционное».

Определение «проекционное» таково
$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\text{Пр}_a\vec{b}$. Расшифровка такова: надо вектор $\vec{a}$ умножить на проекцию вектора $\vec{b}$ на ось a. (Ось а сонаправлена с вектором $\vec{a}$.) Разумеется, возможен другой (симметричный) вариант формулы скалярного умножения:
$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\text{Пр}_b\vec{a}$. Оба этих варианта могут быть получены из формулы $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\varphi$. (Рис. *)

* Каким образом из этой формулы можно получить «проекционное» определение скалярного умножения?

Проекционное определение позволяет также «увидеть» скалярное произведение единичных векторов. Оно равно проекции одного из векторов на другой, то есть длине некоторого отрезка, взятой со знаком. Причём один из этих векторов может и не быть единичным. При таком определении необходимо учесть случай перпендикулярности векторов. Тогда проекция любого из них на ось, проходящую через другой, становится точкой, и этот случай приходится рассматривать специально. И так же, как в предыдущем определении приходится учитывать, что один из векторов может быть нулевым – как тогда на него проектировать?

Доказательство свойств скалярного умножения особых трудностей не представляет, однако предполагает дополнительное знание – именно знание действий с проекциями векторов.

Координатное определение таково:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$, где (a_x, a_y) - координаты вектора $\vec{a}$, (b_x, b_y) - координаты вектора $\vec{b}$. Оно удобно уже тем, что нулевой вектор тут ничего не портит и не усложняет – все дальнейшие доказательства не потребуют специальных оговорок. Доказательства свойств скалярного умножения сводятся к несложным алгебраическим выкладкам.

Но опять не всё безоблачно. Если принять координатное определение скалярного умножения, то появится некая проблема. В самом деле, а что будет, если перейти в другую систему координат, ведь координаты исходных векторов изменятся, а потому надо выяснять, что будет со скалярным произведением. А вдруг оно изменится? На самом деле не изменится, но это вовсе не очевидно, надо доказывать.

В дальнейшем все содержательные разговоры будут касаться ненулевых векторов. Исключения будут очевидны или оговорены.

II Свойства скалярного умножения

Основных свойств всего 4 (они названы основными потому, что из них можно вывести все остальные, учитываю и линейные операции с векторами)

1. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ _= $\vec{b} \cdot \vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Это свойство называется коммутативностью.

2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Это свойство называется дистрибутивностью.

3. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любого числа λ.

Это свойство называется ассоциативностью для числа и двух векторов.

4. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ для любого вектора $\vec{a}$. $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ только при $\vec{a} = \vec{0}$.

Это свойство называется положительной определённостью.

.

Перейдём к их доказательству.

Доказывается это так.

Выводится каким либо образом (но без применения координат) формула

$$\frac{\vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - (\vec{a} - \vec{b})^2}{2} = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Но скалярный квадрат вектора есть квадрат его длины. Поэтому эту формулу можно переписать, заменив скалярные квадраты векторов на квадраты их длин. А длина вектора не меняется при любой смене системы координат, то есть она не зависит от системы координат, в которой была вычислена. Поэтому и скалярное произведение векторов не зависит от системы координат.

Естественно возникает вопрос – откуда берутся такие определения? И зачем их так много? И как доказать их эквивалентность?

Дело в том, что для решения содержательных задач нужно не столько определение скалярного умножения, сколько его свойства.

(Обычное дело – сначала объект изучается содержательно, затем выявляются его свойства, из них выделяются характерные свойства и только затем из таких свойств выделяется его определение. Согласитесь, про квадрат мы знаем гораздо раньше, чем нам дадут его определение.)

Аксиоматическое определение сразу фиксирует основные свойства скалярного умножения в качестве аксиом. Очень удобно. Однако в реальной работе потребуются другие выражения для скалярного произведения. Чему оно будет равно для конкретных векторов? Нужный нам ответ на этот вопрос получается, какой нам нужно, то есть из аксиоматического определения скалярного произведения можно вывести и геометрическое, и координатное определение, но не слишком быстро. Такое определение особенно эффективно, когда мы от обычной (то есть евклидовой) геометрии переходим к другим геометриям: неевклидовой, или не только трёхмерной.

Аксиомы скалярного умножения

Основная операция — скалярное умножение векторов. Для каждых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует единственное число, называемое скалярным произведением $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначение: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. При этом:

II Свойства скалярного умножения

Важны свойства скалярного умножения. Особо отметим такие:

1. $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Иначе:

$-ab \le \vec{a}\cdot\vec{b} \le ab$.

Читается так: модуль скалярного произведения не больше произведения длин (модулей) векторов – сомножителей.

При этом $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab$ тогда и только тогда, когда данные векторы сонаправлены;

$\vec{a}\cdot\vec{b} = -ab$ тогда и только тогда, когда данные векторы направлены противоположно.

2. $\vec{a}^{\,2} = a^2 \ge 0$. (Читается так: скалярный квадрат вектора неотрицателен.) При этом $\vec{a}^{\,2} = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a} = \vec{0}$.

3. $\vec{a}\perp\vec{b} \leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Читается так: векторы перпендикулярны (ортогональны) тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

4. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (коммутативность скалярного умножения)

Тут же замечу, что не выполняется ассоциативность скалярного умножения, то есть равенство $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$. То есть оно выполняется только для некоторых векторов, а не для всех. Звучит это примерно так: вектор нельзя выносить за знак скалярного умножения.

*Как в этом убедиться?

*Для каких векторов оно выполняется?

Отсюда следует, что бессмысленно говорить о скалярном кубе.

* Объясните, почему?

Чуть сложнее получить равенство

5. $(\alpha\vec{a})\cdot(\beta\vec{b}) = (\alpha\beta)(\vec{a}\cdot\vec{b})$ для любых чисел α, β.

В частности, при β = 1 получаем $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$ Звучит это свойство примерно так: число можно выносить за знак скалярного умножения.

Проблемой будет доказательство дистрибутивности скалярного умножения, то есть доказательство равенства $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Вот одно из доказательств при геометрическом определении скалярного умножения..

Обозначим $\vec{a}+\vec{c} = \vec{p}$, $\vec{b}+\vec{c} = \vec{q}$.

Будем считать известным равенство

$(\vec{p}+\vec{q})^2 + (\vec{p}-\vec{q})^2 = 2(p^2 + q^2)$. Оно есть не что иное как векторное выражение для теоремы о сумме квадратов диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Будем считать также известной формулу для скалярного квадрата суммы векторов

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\vec{b}$$

и скалярного квадрата разности векторов

$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b}$$

Теперь получаем

$$(2\vec{c}+\vec{a}+b)^2 + (\vec{a}-\vec{b})^2 = 2((\vec{a}+\vec{c})^2 + (\vec{b}+\vec{c})^2).$$

После возведения в квадрат каждого вектора, заключённого в скобки получаем равенство, которое после упрощений приводит нас к тому, что мы хотели доказать.

* Проделайте эту выкладку самостоятельно.

Но истинный геометр, увидев такое доказательство, обязательно подумает – а нет ли доказательства собственно геометрического, в котором основную роль играют рисунки, которые сделают это свойство наглядным.

Это можно сделать, используя «проекционное» определение скалярного умножения.

**

.

2. Свойства скалярного умножения: аналогичные умножению чисел и отличные от них.
3. Особо отметим дистрибутивность скалярного умножения.

Перейдем теперь к *метрической части курса стереометрии.* Из аксиом скалярного умножения вытекают его простейшие свойства, например, такие:

$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2$, $(\alpha\vec{a})\cdot(\beta\vec{b}) = (\alpha\beta)(\vec{a}\cdot\vec{b})$,

$\vec{a}(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c}$.

Метрика вводится списком аксиом скалярного умножения. Как обычно,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2},\ |AB| = |\vec{AB}|,\ \cos\angle(\vec{a}\,\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

4. Специальные свойства скалярного умножения (скалярный квадрат, условие равенства нулю, прочее.). Исходя только из свойств скалярного умножения, докажите такие утверждения

   * $\vec{a} \perp \vec{b} \to \vec{a} \perp k\vec{b}$. Если первый вектор перпендикулярен второму, то он перпендикулярен любому вектору, коллинеарному второму.

   * $\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{c} \to \vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$. Если первый вектор перпендикулярен двум неколлинеарным векторам, от он перпендикулярен любой их линейной комбинации.

5. Применение скалярного умножения:

   А) в геометрии (вычисление длин и углов, доказательство теорем)

   * теорема о трёх перпендикулярах

   * Если прямая перпендикулярна плоскости, то:

   а) любая прямая, ей параллельная, также перпендикулярна этой плоскости.

   б) она перпендикулярна любой плоскости, параллельной данной.

   * теорема косинуса для трёхгранного угла

   * расстояние между скрещивающимися прямыми.

   Пусть прямые a и b скрещиваются. Требуется найти такие точки A на прямой a и B на прямой b, что прямая AB перпендикулярна как прямой a, так и прямой b. Выберем на прямой a точку M такую, что $AM = 1$, а на прямой b точку N такую, что $BN = 1$.

Обозначим угол между векторами $\vec{AM}, \vec{BN}$ как φ. Так как прямые скрещиваются, то φ отличен от 0 и от π.

Пусть вектор $\vec{c}$ перпендикулярен и вектору $\vec{AM}$, и вектору $\vec{BN}$. (В существовании такого вектора легко убедиться, если векторы $\vec{AM}$, $\vec{BN}$ и $\vec{c}$ отложить от одной точки – ситуация сведётся к существованию прямой, перпендикулярной плоскости. в которой лежат векторы $\vec{AM}$, $\vec{BN}$) Так как векторы $\vec{AM}$, $\vec{BN}$, $\vec{c}$ не компланарны (не лежат в одной плоскости) то вектор $\vec{AB}$ можно разложить по этим трём векторам: $\vec{AB} = \alpha\vec{AM} + \beta\vec{BN} + \gamma\vec{c}$. Вектор $\vec{AB}$ перпендикулярен прямым a и b тогда и только тогда, когда выполнены два равенства нулю скалярных произведений:

$\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 0$, $\vec{AB} \cdot \vec{BN} = 0$. То есть выполняются равенства $(\alpha\vec{AM} + \beta\vec{BN} + \gamma\vec{c}) \cdot \vec{AM} = 0$, $(\alpha\vec{AM} + \beta\vec{BN} + \gamma\vec{c}) \cdot \vec{BN} = 0$.

Перемножая согласно свойствам скалярного умножения, учитывая исходные перпендикулярности то, что векторы $\vec{AM}$ и $\vec{BN}$ единичные и обозначив угол между этими векторами как φ, получаем такую систему:

$\alpha + \beta\cos\varphi = 0$, $\alpha\cos\varphi + \beta = 0$. Несложно убедиться, что такая система (относительно α,β)имеет единственное решение именно потому, что данные прямые скрещиваются. Значение γ не существенно, потому существование общего перпендикуляра доказано.

Осталось доказать, что его длина и есть расстояние между скрещивающимися прямыми a и b. Для этого возьмём на прямой a произвольную точку P, а на прямой b произвольную точку Q. Вектор $\vec{PQ}$ является суммой векторов $\vec{PA}$, $\vec{AB}$, $\vec{BQ}$.

$\vec{PQ} = \vec{PA} + \vec{AB} + \vec{BQ}$

Возведём обе части равенства $\vec{PQ} = \vec{PA} + \vec{AB} + \vec{BQ}$ в квадрат и учитывая перпендикулярности, придём к такому равенству $\vec{PQ}^2 = \vec{AB}^2 + (\vec{PA}+\vec{BQ})^2$. Так как векторы $\vec{PA}$ и $\vec{BQ}$ не коллинеарны, то выражение $(\vec{PA}+\vec{BQ})^2$ положительно.

Тогда $\vec{PQ}^2 > \vec{AB}^2$, откуда и следует то, что мы хотим доказать.

Б) алгебре (решение уравнений, систем). Доказательство тождеств, неравенств

В) в тригонометрии (решение уравнений, систем). Доказательство тождеств, неравенств

Г) в анализе

Любопытно, что некоторые равенства, связанные со скалярным умножением, переводятся в содержательные утверждения геометрические.

Например.

1. Из алгебры известно: $a(b+c) = ab + ac$.
   Переходим к векторам

2. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$.

Из этого равенства можно получить теорему о трёх перпендикулярах.
Рис. *

2. Из алгебры известно: $a(b-c) = ab - ac$. Переходим к векторам

$\vec{a}(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c}$.

Из этого равенства можно получить перпендикулярность бокового ребра правильной треугольной пирамиды и противоположного ему ребра основания. Рис. *

3. Из алгебры известно: $\frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} = ab$,

Переходим к векторам.

$$\frac{(\vec{a}+\vec{b})^2 - \vec{a}^2 - \vec{b}^2}{2} = \vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Из алгебры известно:

$$\frac{a^2 + b^2 - (a-b)^2}{2} = ab.$$

Переходим к векторам.

$$\frac{\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}-(\vec{a}-\vec{b})^2}{2}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Из этих двух равенств имеем:

$$\frac{(\vec{a}+\vec{b})^2-\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}}{2}=\frac{\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}-(\vec{a}-\vec{b})^2}{2}.$$

Отсюда следует $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2(\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2})$.

За этим равенством стоит теорема о сумме квадратов диагоналей параллелограмма. Рис.*

4. Из алгебры известно: $\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}=ab$,

Переходим к векторам:

$$\frac{(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2}{4}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Отсюда получаем, что равенство нулю скалярного произведения $\vec{a}\cdot\vec{b}$ равносильно равенству скалярных квадратов: $(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b})^2$, откуда следует равенство длин векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$.

Из этого следует, равенство диагоналей параллелограмма равносильно тому, что этот параллелограмм является прямоугольником. Рис *

5. Из алгебры известно: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$.

Переходим к векторам: $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+2\vec{a}\vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то получаем теорему Пифагора. Рис. *

6. Из алгебры известно: $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$.

Переходим к векторам: $(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}-2\vec{a}\vec{b}$.

Получаем теорему косинуса. Рис. *

Как доказательство это проходит только после того как будет независимо доказана дистрибутивность скалярного произведения.

7. Из алгебры известно: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Переходим к векторам: $(\vec{a}+\vec{b})\,(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}$.

Из этого следует: перпендикулярность диагоналей параллелограмма равносильна тому, что этот параллелограмм является ромбом. Рис *

Из этого следует: перпендикулярность диагоналей параллелограмма равносильна тому, что этот параллелограмм является ромбом. Рис *

8. Из алгебры известен такой пример:
$(a - b)^2 + (c - d)^2 = (a - c)^2 - (b - d)^2$ тогда и только тогда, когда $(a - d)(b - c) = 0$.

Переходим к векторам, рассмотрев тетраэдр *ABCD*, в котором малым латинским буквам этого равенства соответствуют большие латинские буквы – вершины тетраэдра. Именно, от разности $a - b$ перейдём к векторам $\vec{a}-\vec{b}$, затем к радиус - векторам с общим началом в точке *O*: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$, а затем уйдём от радиус – векторной техники и получим вектор $\overrightarrow{BA}$. Теперь мы вместо $(a - b)^2$ напишем AB^2. В итоге мы приходим к такому утверждению:

в тетраэдре *ABCD* равенство $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ равносильно перпендикулярности рёбер *AD* и *BC*. Словами это можно выразить так: равенство сумм квадратов двух пар противоположных рёбер тетраэдра равносильно перпендикулярности третьей пары рёбер.

Так как в доказательстве никак не использовалась трёхмерность расположения данных точек, то это утверждение верно и в том случае, когда исходные четыре точки являются вершинами четырёхугольника. Именно: равенство сумм квадратов двух пар противоположных сторон четырёхугольника равносильно перпендикулярности его диагоналей..

9. Из алгебры известен такой пример: упростить
$a(b - c) + c(a - b) + b(c - a)$. Оказывается, что эта сумма равна 0.

Перейдём к векторам. Получим такое равенство

$\vec{a}(\vec{b}-\vec{c}) + \vec{c}(\vec{a}-\vec{b}) + \vec{b}(\vec{c}-\vec{a}) = \vec{0}$.

И если в этом равенстве каждое из первых двух слагаемых равно нулю, то и третье слагаемое тоже рано нулю.

Отсюда мы получаем теорему о том, что высоты треугольника лежат на перпендикулярных прямых, имеющих общую точку. (Рис. *)

Теперь самая пора перейти к скалярному умножению векторов — оно тоже может хорошо поработать в деле «геометризации». Как это происходит? Приведем **примеры.**

5.Известно, что модуль вектора $\vec{a}(x, y)$ вычисляется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2}$, Но это равенство можно читать в обратном порядке:, $\sqrt{x^2+y^2} = |\vec{a}|$, откуда следует, что всякое выражение вида $\sqrt{x^2+y^2}$ имеет ясный геометрический смысл; если говорить о векторах — это модуль некоторого вектора. Аналогичное соображение: скалярное произведение двух векторов $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2)$ вычисляется по формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$. Прочитав это равенство справа налево, получим $= x_1x_2 + y_1y_2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$. Отсюда ясно, что всякое выражение вида $= x_1x_2 + y_1y_2$ можно считать скалярным произведением векторов $(x_1 y_1)$ и (x_2, y_2).

6. Докажем неравенство

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}.$$

Для доказательства рассмотрим векторы $\vec{x} = (a, b)$ и $\vec{y} = (c, d)$. Тогда $\sqrt{a^2+b^2} = |\vec{x}|$, $\sqrt{c^2+d^2} = |\vec{y}|$,

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} = |\vec{x} + \vec{y}|.$$

Данное неравенство свелось к векторному: $|\vec{x}| + |\vec{y}| \geq |\vec{x}+\vec{y}|$, которое хорошо известно. Кроме того, сразу ясно, когда достигается знак равенства: при сонаправленности векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Неравенство обобщается, причем доказательство остаётся тем же.

7. Докажем, что $a^2 + b^2 \geq 0{,}5$, если $a + b = 1$.

И здесь можно распознать скалярное произведение. В самом деле, $a + b = a \cdot 1 + b \cdot 1$. Поэтому мы можем ввести векторы $\vec{x} = (a, b)$ и $\vec{y} = (1, 1)$. Далее, $\vec{x} \cdot \vec{y} = a + b = 1$, $|\vec{y}| = \sqrt{2}$, $|\vec{x}| = \sqrt{a^2+b^2}$ и по неравенству $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

Имеем 1 =a + b =a·1 + b· 1 $\leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{2}$, откуда $a^2 + b^2 \geq 0{,}5$.

8. Найдем наибольшее значение выражения 5sin*x*-12cos*x*.

Пусть $\vec{a}$ = (5,-12), $\vec{b}$ = (sin$x$, cos$x$). Тогда данное выражение является скалярным произведением векторов a и $\vec{b}$. Используя неравенство $\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ и то, что $|\vec{a}|$= 13, $|\vec{b}|$ = 1, получаем искомое наибольшее значение выражения равное 13. Достигается оно при условии равенства: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, а оно имеет место в случае сонаправленности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. когда имеет место пропорция (sin$x$) /5 = (cos$x$)/13 . Отсюда 5cos$x$ + 12sin$x$ = 0 $\Leftrightarrow$ tg$x$=-$\frac{5}{12}$ и, значит,

$$x = \mathrm{arctg}\,(-\frac{5}{12}) + k\pi,\ k \in Z.$$

Аналогично можно найти и наименьшее значение данного выражения.

Вообще, выражение $a$cos$x$ + $b$sin$x$ есть не что иное, как скалярное произведение векторов $\vec{p}$ = (a, b) и $\vec{q}$ = (cos$x$, sin$x$) , и в общем случае заключается в границы - $\sqrt{a^2+b^2} \le |\, a\cos x + b\sin x\,| \le \sqrt{a^2+b^2}$.

Замечу, что в обобщённом виде неравенство $\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ приводит к неравенству Коши:

$(a_1b_1+...+a_{n1}b_n)^2 \le (a_1 +\ldots+a_n)^2\,(b_1+\ldots:+bn)^2$.

Равенство достигается в случае пропорциональности: $b_i=\lambda a_i$.

2. Решим уравнение

$a$cos$x$ + $b$sinx = 0 ($a \ne 0$, $b \ne 0$).

Пусть $\vec{p}$ = (a, b) и $\vec{q}$ = (cos$x$, sin$x$). Тогда $\vec{p}\cdot\vec{q}$ = 0, т. е. векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ ортогональны. Условие ортогональности двух этих векторов можно записать в виде $k_1\kappa_2 =-1$, где κ_1 = b/a , κ_2 = tg x. Значит, (b/a) tg$x$ = - 1, откуда

tg$x$ = - (a /b). Тем самым проясняется геометрическая природа задачи: мы находим угол x, который образует с осью абсцисс вектор $\vec{q}$ единичной длины, ортогональный данному вектору $\vec{p}$.

10. Уравнение

$$a\cos x + b\sin x = c\ (a\ne0,\ b\ne0,\ c\ne0) \qquad (1)$$

обычно решают так. Выражение $\sqrt{a^2+b^2}$ выносят за скобки в левой части равенства, тогда имеем

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) = c.$$

После этого замечают, что $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1.$

В такой ситуации одну из этих дробей можно считать косинусом (синусом) некоторого угла φ, а другую — синусом (косинусом) того же угла φ. Тогда мы приходим к равенству

$\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, откуда $\cos(x - \varphi) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, после чего решение очевидно.

Эта идея решения, однако, с трудом (психологически) воспринимается учениками: откуда стало известно

про выражение $\sqrt{a^2+b^2}$ и почему его надо выносить за скобки? До этого додуматься непросто. Во всяком случае мне долго не удавалось добиться этого от учеников. Сначала я пробовал подход чисто геометрический, приведу только один из них.

Рассмотрим такую ситуацию. Пусть есть прямая *p* и прямоугольный треугольник *ABC* с гипотенузой *AB*. Для удобства расположим его с одной стороны от прямой *p*, а вершину *C* на самой прямой *p* (рис. 7).

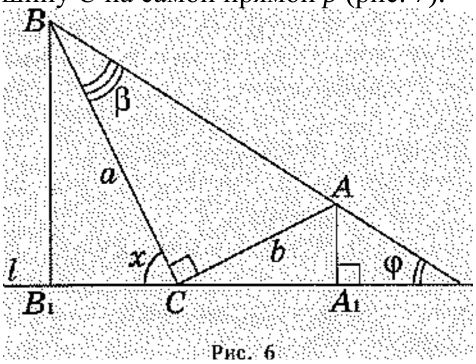

Рис. 7

Нам надо найти угол, который составляет с прямой *p* катет *BC*.

Спроектируем *AB* на *p*, и пусть A_1B_1 — проекция *AB*. Тогда, с одной стороны, $A_1B_1 = AB\cos\varphi$, где $\varphi = \angle AB, A_1B_1$.

А с другой стороны, $A_1B_1 = A_1C + CB_1 = b\cos(90° - x) + a\cos x = a\cos x + b\sin x$.

Поэтому $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi$. Значит, решая уравнение вида $a\cos x + b\sin x = c$, мы вместо левой части можем из приведённых геометрических соображений можем придти к более простому уравнению $\sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi = c$, откуда найдем $\cos\varphi$, далее сам угол φ. А угол *x* найдем из равенства $x = \beta + \varphi$, где $\beta = \angle ABC$.

Но окончательно всё встало на своё место после работы с векторами.

Уравнение $a\cos x + b\sin x = c$ запишем при тех же обозначениях, что и в примере 5, в виде уравнения

$\vec{p}\cdot\vec{q} = c$, которое можно переписать так: $|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cos\angle(\vec{p},\vec{q}) = c$. Но $|\vec{q}| = 1$. Поэтому

$$\cos\angle(\vec{p},\vec{q}) = c\,/\,|\vec{p}| = c\,/\,\sqrt{a^2+b^2}.$$

Отсюда мы находим угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Для ориентированных углов между векторами $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ верно равенство

$(\vec{p},\vec{q}) + \angle(\vec{q},\vec{r}) = \angle(\vec{p},\vec{r})$ У нас оно выглядит так: $\angle(\vec{p},\vec{q}) + \angle(\vec{q},\vec{i}) = \angle(\vec{p},\vec{i})$

($\vec{i}$ - единичный вектор оси абсцисс); $\angle(\vec{q},\vec{i})$ и есть искомый угол *x*, $\angle(\vec{p},\vec{q})$ мы нашли, а

$\angle(\vec{p}, \vec{i})$ — угол между известным вектором $\vec{p}$ и осью абсцисс. Отсюда находим неизвестный угол *x*.

И здесь становится ясно, из каких геометрических соображений появляется это уравнение: ищется угол, который образует с осью абсцисс вектор единичной длины, образующий с данным вектором фиксированный угол.

Для решения задачи, т. е. для нахождения значения угла *x*, вместо вектора $\vec{p} = (a, b)$ возьмём для упрощения вектор $\vec{p_1}$, сонаправленный с $\vec{p}$, но единичной длины. При этом все углы, и данные, и неизвестные, не изменяются. Но тогда в уравнении (2) слева будет уже скалярное произведение векторов $\vec{p_1}$ и $\vec{q}$, равное cos $\angle(\vec{p_1}, \vec{q})$, а справа — известное число. В принципе задача решена. Для её решения только и понадобилось, что заменить вектор $\vec{p}$ на вектор $\vec{p_1}$. А как это делается? Ясно как: для всякого ненулевого вектора $\vec{p}$ вектор $\frac{1}{|\vec{p}|}\vec{p}$ имеет единичную длину. В нашем случае $\vec{p} = (a, b)$. Значит, $\vec{p_1} = \frac{1}{|\vec{p}|}\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot (a, b) =$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

При таком понимании задача легко подаётся. Сначала можно предложить решить уравнение, где участвуют два единичных вектора, например $\sqrt{\frac{1}{3}}\cos x + \sqrt{\frac{2}{3}}\sin x = 1$. А затем решать задачу и в общем виде.

Замечу, что, не имея такой ясной интерпретации исходного уравнения, поневоле начинают искать обходные решения, например, используя формулы двойного угла для синуса и косинуса.

11. Векторы помогают разбираться и с более трудными уравнениями.

Вот пример. Рассмотрим уравнение вида

$a\cos x + b\cos(x + \varphi) = c$ или $a\cos x + b\cos(x + \varphi) + c\cos(x + 2\varphi) = d$.

(аналогичные уравнения для синуса). Для простоты возьмём уравнение первого вида с единичными коэффициентами и $\varphi = 0{,}25\pi$.

$\cos x + \cos(x + 0{,}25\pi) = 1$. Нарисуем в системе координат с началом *O* и осями *p* и *q* векторы единичной длины $\vec{OA}$ и $\vec{AB}$ так, что вектор $\vec{OA}$ составляет с осью *p* угол *x*, а вектор $\vec{AB}$ составляет с вектором $\vec{OA}$ угол 0,25π (рис. 8). (Рисунок нарочито упрощён.)

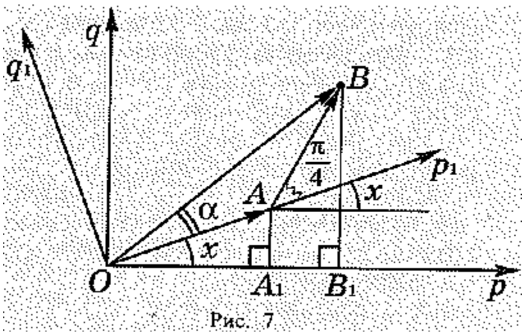

Рис.8

Точки A_1 и B_1 на этом рисунке — проекции точек A и B на ось p. Тогда $OA_1 = \cos x$, $A_1B_1 = \cos(x + 0{,}25\pi)$.

С другой стороны, OB_1 - проекция вектора $\vec{OB}$ на ось p, поэтому $OB_1 = |\vec{OB}|\cos(x+\alpha)$, где α — угол между векторами $\vec{OB}$ и $\vec{OA}$. Длину $\vec{OB}$ найдём, повернув систему координат на угол x так, что ось p пойдет вдоль вектора $\vec{OA}$.

В этой новой системе координат Op_1q_1 длина вектора $\vec{OB}$ вычисляется по формуле длины вектора через его проекции:

$$|\vec{OB}| = \sqrt{1+(\cos 0{,}25\pi)^2+(\sin 0{,}25\pi)^2} = \sqrt{2+\sqrt{2}} .$$

Имеем $OB_1 = |\vec{OB}|\cos(x+\alpha) \Leftrightarrow OA_1 + A_1B_1 = OB\cos(x+\alpha) \Leftrightarrow \cos x + \cos(x+\alpha) = \sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(x+\alpha)$. Тогда исходное уравнение заменяем на такое: $\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(x+\alpha) = 1 \Leftrightarrow \cos(x+\alpha) = 1/\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Отсюда находим $x + \alpha$. Угол α можно выразить с помощью тангенса, ибо tg α =(sin 0,25π) / (1 + cos 0,25π)= $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

Зная $x + \alpha$ и α, находим x.

Аналогично решается уравнение и более общего вида.

В период моего увлечения векторами я старался «выкопать» их где только возможно. Вот ещё пример использования скалярного произведения.

12. Ясно, выражение cos α cos β +sin α sin β является скалярным произведением векторов

$\vec{a}$ = (cosα, sinα) и $\vec{b}$ =(cosβ,sinβ). С другой стороны, в силу того, что $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$,

скалярное произведение можно понимать как «длинный косинус», т. е. косинус, только умноженный на какие-то длины. Причём, если эти длины равны 1, то в таком случае это«чистый косинус». Но у нас векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как раз имеют единичную длину. Итак, выражение cosαcosβ + sin α sin β есть косинус. Встаёт вопрос: косинус чего? Дальше следует доказательство известной формулы для косинуса разности двух углов.

13. И даже в исследовании уравнения $ax + b = 0$ «спрятано» скалярное произведение. Запишем его в виде $a \cdot x + b \cdot 1 = 0$, после чего ясно, что нас интересует такое значение x, которое обеспечивает ортогональность векторов (a, b) и (x, 1). Дальнейшее очевидно.

И что забавно. Эта ситуация обобщается на уравнение $Pn(x) = 0$, в котором один вектор задаётся коэффициентами многочлена степени n , а другой вектор задаётся последовательными степенями неизвестного x – и всё это происходит в (n + 1) – мерном пространстве.

14. Скалярное умножение обычно привлекают для доказательства теоремы косинуса. Но оно же может быть использовано и при доказательстве теоремы синусов.

Пусть вектор $\vec{c}$ длиной 1 равен сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, длины которых обозначим соответственно a и b. Нарисуем треугольник ABC, в котором $\vec{BA} = \vec{c}$, $\vec{BC} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$, $\angle ABC=\beta$ $\angle CAB=\alpha$ (рис. 9). (На рисунке $\beta < 90°$, но доказательство проходит и тогда, когда $\beta > 90°$.)

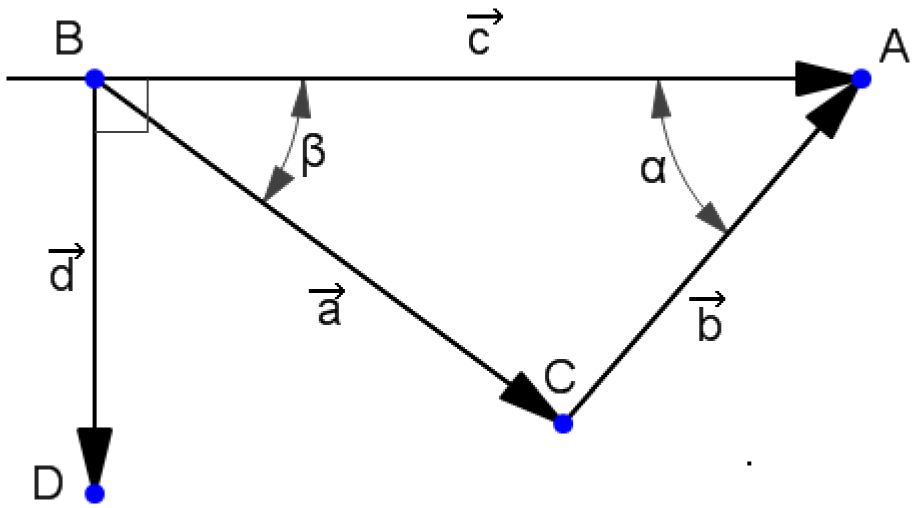

Рис. 9

Вектор $\vec{BD} = \vec{d}$ на этом рисунке таков, что его модуль равен 1, сам он ортогонален вектору $\vec{c}$. Теперь имеем цепочку равенств

$0 = \vec{c}\,\vec{d} = (\vec{a} + \vec{b})\,\vec{d} = \vec{a}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{d} = a \cdot 1 \cdot \cos(90° - \beta) + b \cdot 1 \cdot \cos(90^{o} + \alpha) = a \sin\beta - b \sin \alpha \Leftrightarrow a \sin\beta = b \sin \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a / b = \sin \alpha / \sin\beta$.

15. Решим, используя векторы, систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Пусть мы имеем систему вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Для перехода к векторному истолкованию вспомним, что всякий вектор на координатной плоскости может быть записан в виде упорядоченной пары чисел и, наоборот, всякую упорядоченную пару чисел можно понимать как такой вектор на плоскости, координатами которого являются эти числа. Теперь обозначим $(a_1, a_2) = \vec{a}$, $(b_1, b_2) = \vec{b}$, $(c_1, c_2) = \vec{c}$.

Используя умножение вектора на число в координатном виде, можно систему (1) переписать в таком векторном виде:

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{c}. \qquad (2)$$

Вопрос о существовании и числе решений системы (1) сведётся теперь к равносильному вопросу о нахождении чисел x и y, удовлетворяющих равенству (2). Ответ на последний вопрос хорошо известен. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются коллинеарными, то всякий вектор $\vec{c}$ плоскости можно разложить по этим векторам, причем единственным образом. Тем самым числа x и y находятся однозначно. Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются коллинеарными, то ответ на вопрос зависит от вектора $\vec{c}$. Если вектор $\vec{c}$ не коллинеарен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то ясно, что решения нет, ибо линейная комбинация коллинеарных векторов даёт вектор, коллинеарный каждому из них. Если же вектор $\vec{c}$ коллинеарен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то искомых чисел x и y сколько угодно. Для того чтобы убедиться в последнем, достаточно взять, к примеру, такой случай: $\vec{b} = 2\vec{a}$ и $\vec{c} = 3\vec{a}$. Тогда мы приходим к равенству $x(\vec{a}) + y(2\vec{a}) = 3\vec{a}$, откуда $x + 2y = 3$. Понятно, что такое уравнение имеет сколько угодно решений. Аналогично можно разобраться и в общем случае, хотя, вообще говоря, ответ ясен из наглядных соображений.

Коллинеарность векторов (а также её отсутствие) легко переводится на привычные алгебраические соотношения. Именно: коллинеарность векторов равносильна пропорциональности соответствующих координат этих векторов (с оговоркой относительно нулей). Поэтому если $\vec{b} \parallel \vec{a}$, то $b_1 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda a_2$ или, с большей общностью, определитель системы (1) равен нулю. Если при этом вектор $\vec{c}$ коллинеарен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, точно так же равны нулю и два других определителя системы: при x и при y. Таким образом, получается известное условие существования бесконечного множества решений у такой системы — равенство нулю всех трёх определителей.

Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются коллинеарными, то нет и пропорциональности их соответствующих координат, а потому определитель системы отличен от нуля.

Любопытно, что векторным путём можно не только провести исследование системы (1), как мы только что сделали, но и решить эту систему. Для этого понадобится и скалярное умножение. Пусть вектор $\vec{a}^{\perp}$ получен из вектора $\vec{a}$ поворотом на

90° вокруг начала координат и пусть вектор $\vec{b}^{\perp}$ получен из вектора $\vec{b}$ таким же поворотом. Легко проверить, используя координатную запись для скалярного произведения и условие перпендикулярности векторов, что вектор $\vec{a}^{\perp}$ имеет координаты

($-a_2, a_1$), а вектор $\vec{b}^{\perp}$ имеет координаты $\vec{b}$ ($-b_2, b_1$). Теперь обе части равенства (2) умножим на вектор $\vec{a}^{\perp}$

и получим $(x\vec{a}+y\vec{b})\,\vec{a}^{\perp} = \vec{c}\cdot\vec{a}^{\perp}$. Из свойств скалярного умножения и ортогональности векторов $\vec{a}$ и $\vec{a}^{\perp}$ приходим к равенству

$y\,(\vec{b}\,\vec{a}^{\perp}) = \vec{c}\cdot\vec{a}^{\perp}$. Отсюда при условии, что $(\vec{b}\,\vec{a}^{\perp}) \neq 0$, имеем $y = (\vec{c}\,\vec{a}^{\perp})/(\vec{b}\,\vec{a}^{\perp})$,

Аналогично действуя и умножив обе части равенства (2) на вектор $\vec{b}^{\perp}$, придём (при условии, что $(\vec{a}\,\vec{b}^{\perp}) \neq 0$ к равенству $x = (\vec{c}\,\vec{b}^{\perp})/(\vec{a}\,\vec{b}^{\perp})$,

Чтобы перейти от этих решений в векторном виде к привычным формулам, достаточно каждый из векторов в этих равенствах записать в координатах, после чего применить формулу для скалярного произведения. Условие $\vec{b}\,\vec{a}^{\perp} \neq 0$ и аналогичное условие $\vec{a}\,\vec{b}^{\perp} \neq 0$, как легко видеть, равносильно отсутствию коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. (Если, скажем, $\vec{a}\perp\vec{b}^{\perp}$, то вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{b}$.)

Векторный метод применяется в системах такого типа с большим числом неизвестных. Разговор об этом с учениками опять же приводит к разговору о пространстве с числом измерений, большим трёх.

Речь пойдёт о решении системы

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$$

Я приведу несколько вариантов векторной интерпретации этой системы. Введем такие обозначения:
$\vec{a} = (1,1,1)$, $\vec{b} = (x, y, z)$, $\vec{c} = (x-1, y-1, z-1)$,
$\vec{d} = (x+1, y+1, z+1)$.

*Решение*1. Первое уравнение данной системы можно записать в виде $x\cdot 1 + y\cdot 1 + z\cdot 1 = 3$ и оно запишется так: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3$.

Второе уравнение запишем в виде

$$(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{3})^2 = 9$$

Его можно переписать так:

$$(|\vec{a}||\vec{b}|)^2 = 9.$$

Из последнего равенства получаем, что

$$|\vec{a}|\bullet|\vec{b}| = 3.$$

Но тогда видим, что $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$.

Последнее возможно только при сонаправленности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. А так как все координаты вектора $\vec{a}$ равны, то равны все координаты и вектора $\vec{b}$. Иначе говоря, мы получили, что с необходимостью $x = y = z$. Отсюда следует, что $x = y = z = 1$.

*Решение*2. Уравнение $x + y + z = 3$ можно переписать в таком виде $(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$, а затем и в таком $(x-1) \cdot 1 + (y-1) \cdot 1 + (z-1) \cdot 1 = 0$. Иначе говоря, скалярное произведение векторов $\vec{c}$ и $\vec{a}$ равно нулю. Отсюда следует, что либо эти векторы перпендикулярны, либо один из них - нулевой. Вектор $\vec{a}$, очевидно, нулевым не является, поэтому нулевым может быть только вектор $\vec{c}$. Из этого получаем, что $x = y = z = 1$. Если же среди этих векторов нет нулевого, то векторы $\vec{c}$ и $\vec{a}$ перпендикулярны, и мы будем двигаться дальше.

Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ можно переписать в таком виде $(x^2-1) + (y^2-1) + (z^2-1) = 0$, а затем и в таком $(x - 1)(x + 1) + (y - 1)(y + 1) + (z - 1)(z + 1) = 0$. Последнее означает, что скалярное произведение векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ равно нулю. Поэтому среди векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ есть нулевой или эти векторы перпендикулярны. Из векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ нулевым может быть только вектор $\vec{d}$ (то, что вектор $\vec{c}$ не является нулевым мы уже учли). Но тогда $x = y = z = -1$, что противоречит условию. Значит векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ ненулевые, а потому перпендикулярны. Получили, что вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{d}$. Но если вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$и $\vec{d}$, то он перпендикулярен любой их линейной комбинации, в частности вектору $\vec{d}-2\vec{a}$. Этот последний есть вектор такой: $(x - 1, y - 1, z - 1)$. Но тогда получаем, что вектор $\vec{c}$ перпендикулярен самому себе, что возможно только в том случае, когда этот вектор - нулевой. Отсюда следует, что $x = y = z = 1$.

Решение 3. Вычтем из второго уравнения системы первое. Получим уравнение $x^2 - x + y^2 - y + z^2 - z = 0$, которое можно переписать в виде $x(x - 1) + y(y - 1) + z(z - 1) = 0$. Это равенство равносильно такому: $\vec{b}\vec{c} = 0$

С другой стороны, уже было получено, что $\vec{a}\vec{c} = 0$. Оба равенства возможны только при нулевом векторе $\vec{c}$ или коллинеарности векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. В каждом из этих случаев получаем, что $x = y = z = 1$.

И ещё о той геометризации, которую позволяют осуществить векторы. Очень ярким примером является векторное пространство непрерывных функций. Хотя этот пример далёк от программного школьного курса, мне удавалось рассказать о нём в виде небольшой лекции, и я помню круглые от удивления глаза учеников при этом. Сам пример достаточно прост. Множество непрерывных функций на одном и том же замкнутом промежутке удовлетворяет аксиомам векторного пространства, значит, каждая из таких непрерывных функций — это вектор. Но если мы имеем дело с векторами, то введём с помощью скалярного умножения модуль вектора и угол между векторами. Оказывается, для двух непрерывных функций f и g, заданных на промежутке $[a, b]$, число, определяемое как $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$, можно назвать их скалярным произведением, ибо при таком определении выполняются все основные свойства скалярного умножения, которые входят в список аксиом евклидова пространства. Но тогда, естественно, «модуль»функции f равен $\sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}$. После этого можно считать «расстояния между функциями» и «углы между функциями» по формулам, известным для векторов. Более того, такой разговор можно продолжить, введя понятие ортогональной системы функций на данном промежутке. Именно: система функций $\varphi_n(x)$ на промежутке $[a, b]$ называется ортогональной, если $\int\limits_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)dx = 0$ при $k \neq l$. Раскладывая произвольную функцию, заданную на этом промежутке, по ортогональной системе функций (как геометрический вектор в ортогональном базисе), выходим на разговор о ряде Фурье и его применениях.

г) «Докажем», что любые два не коллинеарных вектора равны.

Пусть векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны. Пусть $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{a} \perp \vec{c}$, Тогда $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}$. Сократим на $\vec{a}$ и получим, что $\vec{b} = \vec{c}$.

«Проекционное» определение позволяет вывести свойства скалярного умножения геометрически, особенно отмечу дистрибутивность, только вот доказательства этих свойств довольно занудны. И требуют специальных рассуждений для векторов пространства.