Стоит ли запоминать то, что запоминать не стоит?

(После чтения статьи В.И.Кузьминова «О наглядности формул приведения» Математика в школе, N 10 2008 и заметки Т.М. Вуколовой, М.К.Потапова, А.В. Шевкина Математика для школьников, N 4 2008)

Со школьных времён не любил формул приведения. Их много, все их надо знать да ещё какие – то мнемонические правила… Причём запоминать их, с помощью виртуальной учёной лошади, которая мотает головой …Тихий ужас.

.Мне не нравилось к тому же насилие над переменной, которая оказалась на втором месте. В других случаях в подобных ситуациях она стояла первой.

Поэтому когда начал работать, стал искать, как избавить учеников от этой напасти. И способ нашёлся, причём совершенно естественный. Как часто бывает, выручила геометрия.

Какова цель этих формул? Таблицы тригонометрических функций составлены для углов первой четверти. Когда требуется по таблицам найти значения тригонометрических функций других углов, то требуется «загнать» их в этот промежуток.

Каково математическое содержание этих незатейливых формул с геометрической точки зрения? Имеется график $y = f(x - a)$ или $y = f(a - x)$, каждый из которых получается движением из графика тригонометрической функции $f(x)$ Благодаря свойству «ётности» (чётности или нечётности) функции $f(x)$ выполняется равенство $f(a - x) = \pm\, f(x - a)$. Поэтому график $y = f(a - x)$ может рассматриваться как не имеющий самостоятельного значения.

График $y = f(x - a)$ получается из графика $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси x (буду дальше называть его сдвигом, можно при желании уточнить – горизонтальным сдвигом). При смене знака аргумента добавляется симметрия относительно оси ординат (для чётного косинуса) или относительно начала координат (для нечётных синуса, тангенса и котангенса). Требуется установить связь между точками нового графика $y = f(x - a)$ и точками исходного графика $y = f(x)$, находящимися в первой четверти, образно говоря, «вернуть» их, куда – то убежавших, в первую четверть.

Разберу процедуру «возвращения» на косинусе. Из чётности косинуса следует, что $\cos(a - x) = \cos(x - a)$. Из периодичности косинуса следует, что $\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$ ($k \in Z$) .

Рассматриваются два (всего два !) преобразования аргумента.

Первая формула приведения основана на «полупериодичности» косинуса:

$$\cos(x \pm \pi) = -\cos x .$$

Словесно: изменение аргумента косинуса на полупериод меняет косинус на противоположный.

Эту формулу (как и все формулы приведения) можно получить из теоремы сложения. Если же они нам нужны до теоремы сложения, то её можно получить из графика косинуса.

Известно общее утверждение (для любой функции) , что график $y = f(x - a)$ получается из графика $y = f(x)$ сдвигом на величину a: вправо при $a > 0$ и влево при $a < 0$.

Отсюда получаем, что график $y = \cos(x - \pi)$ получается из графика $y = \cos x$ сдвигом последнего вправо на π. Ничего не рисуя, можно «увидеть», что получена кривая, симметричная относительно оси абсцисс графику $y = \cos x$. А если это сходу не «видно», то можно нарисовать соответствующую картинку.

Аналогично получаем формулу для $\cos(x + \pi)$. Впрочем, можно заметить, что аргумент $x + \pi$ отличается от аргумента $x - \pi$ на 2π и поэтому $\cos(x + \pi) = \cos(x - \pi)$ в силу его периодичности.

Вторая формула приведения основана на «четвертьпериодичности» косинуса:

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x.$$

Для доказательства воспользуемся сдвигом графика.

$y = \cos x$. График $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ смещён вправо относительно графика $y = \cos x$ на $\frac{\pi}{2}$. Можно «увидеть», что получен график $y = \sin x$. При необходимости для подтверждения «увиденного» можно нарисовать соответствующую картинку.

Аналогично получаем формулу для $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Впрочем, можно заметить, что аргумент $x + \frac{\pi}{2}$ отличается от аргумента $x - \frac{\pi}{2}$ на π и поэтому $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ в силу «полупериодичности» косинуса.

Покажу на примере, как работает эта техника. Пусть требуется «привести» $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$. Сначала в силу чётности косинуса меняем порядок выражения в скобках: $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$. Затем пользуюсь «полупериодичностью» косинуса, увеличиваю аргумент на π, получаю: $\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. И затем в силу «четвертьпериодичности» косинуса получаем окончательный результат : $-\sin x$.

Можно действовать иначе, привожу такую цепочку равенств:

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

Здесь первое равенство вытекает из «полупериодичности» косинуса, второе – из его чётности, третье – из его «четвертьпериодичности».

Возможны и другие цепочки равенств.

Формулы приведения для синуса могут быть получены совершенно аналогично, я не буду приводить соответствующие выкладки.

Первая формула приведения основана на «полупериодичности» синуса:

$$\sin(x \pm \pi) = -\sin x.$$

Вторая формула приведения основана на «четвертьпериодичности» синуса:

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x.$$

Можно не заниматься их выводом специально, а использовать переход от синуса к косинусу по формуле «четвертьпериодичности» косинуса: $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. И тогда, к примеру, $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x - \pi) = -\cos x$.

Вот пример тому, как работает эта техника. Пусть требуется «привести» $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$. Сначала в силу периодичности синуса переходим к выражению $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Затем пользуемся «четвертьпериодичностью» синуса, окончательный результат : $-\cos x$.

Можно действовать иначе:

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$. Первый знак равенства основан на «полупериодичности» синуса, второй знак равенства основан на его «четвертьпериодичности».

Формула приведения для тангенса основана на «полупериодичности» тангенса:

$$\operatorname{tg}\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} x .$$

Для получения равенства достаточно увидеть, что происходит с графиком тангенса при сдвиге на $\frac{\pi}{2}$ в ту или иную сторону.

Для котангенса можно действовать буквально так же, как для тангенса. Иначе формулу приведения для котангенса можно получить, перейдя к нему от уже полученной формулы для тангенса.

Немного тренировки и всё начнёт получаться быстро.

«На сладкое» ко всем геометрическим рассуждениям о том, что происходит с графиком тригонометрической функции при сдвиге, полезно добавить известную механическую интерпретацию: считать, что по оси абсцисс идёт время и толковать сдвиг график как опережение или отставание при изучении некоторого процесса – это толкование помогает при изучении гармонического колебания.

Что важно здесь для дифференцированного преподавания: одни ученики могут пойти по пути механического запоминания, другим достаточно запомнить существенные свойства тригонометрических функций и влияние движений на их графики. На втором пути не нужно мнемоники и можно действовать из наглядных представлений. Мы прекрасно к тому же знаем, что механическая память может подвести и всегда полезны знать другие варианты получения формулы.

В заключение – несколько общих соображений. Формулы приведения появились для работы с таблицами тригонометрических функций. Сейчас, когда эти таблицы становятся архаизмом благодаря инженерным калькуляторам, зачем они так важны сейчас? Встречаются, правда, примеры, где эти формулы работают для других целей. Например, требуется установить знак выражения $\cos 100$ или решить уравнение $\sin x + \cos x = 1$ на промежутке $(99, 101)$. Но, опять же, их использование имеет смысл только при отсутствии хорошего калькулятора.

Поэтому сохранение этих формул в рамках общего образования – зряшное дело. Кому они будут нужны после школы? И уж если их оставлять, то с математическим содержанием.

Вот оно. Формулы приведения уместно трактовать как частный случай общего понятия о построении графика функции при линейном преобразовании аргумента. С этой позиции нет принципиальной разницы в выражениях, к примеру, $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ и $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Когда надо построить график $y = f(1 - x)$ lдля произвольной функции, в частности, тригонометрической, не помогут никакие формулы приведения, а использование движений (сдвига и симметрий) приводит к нужному результату.

Добавление.

Формулы приведения можно получить, рассматривая не только сдвиги, но и симметрию относительно прямой, параллельной оси ординат.

Известно, что график $y = \mathrm{f}\,(a - x)$ симметричен графику $y = \mathrm{f}\,(x)$ относительно прямой $x = a / 2$. Отсюда следует, что график $y = \sin(\pi - x)$ симметричен графику $y = \sin x$ относительно прямой $x = \pi / 2$. В результате этой симметрии, как можно «увидеть» без рисунка (но можно и нарисовать), что получается график $y = \sin x$. Отсюда: $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Возможен и другой вариант. Выражение $f\,(a - x)$ можно представить в виде $f\,(-(x - a))$. Потому график $y = f\,(a - x)$ может быть получен из графика $y = \mathrm{f}\,(x)$ композицией сдвига на вектор $(a, 0)$ и последующей симметрией относительно прямой $x = a$.