В. И. РЫЖИК

Геометрия

Дидактические материалы

11 класс

Пособие для общеобразовательных организаций

Углублённый уровень

5-е издание, переработанное

Москва
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2015

УДК 372.8:514 12+

ББК 74.262.21

Р93

Рыжик В. И.

Р93 Геометрия. Дидактические материалы. 11 класс.: пособие для общеобразоват. организаций : углубл. уровень / В. И. Рыжик. — 5-е изд., перераб. — М. : Просвещение, 2015.

Данное пособие содержит самостоятельные и контрольные работы по геометрии в двух вариантах для учащихся, изучающих математику на углублённом уровне.

УДК 372.8:514

ББК 74.262.21

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эти проверочные работы предназначены в первую очередь для тех учеников, которые изучают геометрию в специализированных математических классах по учебнику А. Д. Александрова, А. Л. Вернера и В. И. Рыжика. (Возможно, их смогут использовать учителя математики, преподающие и по другим учебникам геометрии.) Проверочные работы написаны в том же стиле, что и сам учебник. Геометрия представлена здесь как неразрывное единство воображения и логики, поэтому каждая проверочная работа в той или иной степени направлена на развитие геометрического воображения.

При составлении этих работ были учтены самые разные соображения. Вот некоторые из них.

Каждая конкретная работа должна быть реальной для ученика. Иначе говоря, какая-то часть работы может быть выполнена им, хотя и без тщательного оформления.

В то же время эта работа должна быть реальной и для учителя, т. е. удобной для проверки, а это значит, что она не должна содержать длинных доказательств, варианты должны быть схожими, почти идентичными, геометрические фигуры изначально получают фиксированные буквенные обозначения и т. д.

В большинстве случаев задания в самостоятельных и контрольных работах построены по принципу «стрелы заданий», идущих по нарастающей сложности, что обеспечивает некий уровень индивидуализации. Хотелось также в каждое задание добавить немного неожиданности для ученика.

В целом каждая работа получилась достаточно объёмной, и вряд ли большинство учеников будет выполнять все задания. В этом случае учитель может действовать по своему усмотрению. Можно уменьшить число заданий или увеличить время, отведённое для решения (самостоятельная работа — 1 урок, контрольная работа — 2 урока), жёсткая система оценок в данном случае не очень разумна, выкладки и ссылки учеников могут быть свёрнутыми. Вообще при работе на скорость (а таковой является любая самостоятельная работа, проводимая на уроке) ученики должны доверять своей пространственной интуиции, а учитель — быть не столь придирчивым по части обоснований.

Несколько технических замечаний.

1. Четырёхугольник $ABCD$ или треугольник ABC будем считать нижним основанием призмы.

2. Если в задаче надо найти угол, то достаточно найти какую-либо его тригонометрическую функцию.

Предлагаемое пособие для учителя если и имеет аналогичных предшественников, то их не слишком много. Отсюда ясно, сколько у него может быть недостатков. Я буду признателен всем доброжелательным критикам. Все замечания и предложения можно присылать на мой электронный адрес: rvi@inbox.ru или на электронный адрес издательства «Просвещение»: irekman@prosv.ru.

Автор

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

С—5.1. Понятие многогранника

Вариант 1

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Рассматриваются два тетраэдра: AB_1D_1C и A_1BC_1D.

1. Нарисуйте фигуру F, являющуюся пересечением этих тетраэдров.

а) Если F — многогранник, то сколько в нём вершин, рёбер и граней?

б) Нарисуйте ортогональную проекцию фигуры F на плоскость AA_1D_1D.

в) Нарисуйте ортогональную проекцию фигуры F на плоскость AA_1C_1C.

г) Является ли фигура, ограниченная гранями куба и гранями фигуры F, многогранником?

2. Нарисуйте фигуру G, являющуюся объединением двух данных тетраэдров. Выполните для фигуры G те же задания, что и для фигуры F.

Вариант 2

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Рассматриваются два тетраэдра: BA_1C_1D и D_1CB_1A.

1. Нарисуйте фигуру F, являющуюся пересечением этих тетраэдров.

а) Если F — многогранник, то сколько в нём вершин, рёбер и граней?

б) Нарисуйте ортогональную проекцию фигуры F на плоскость BB_1C_1C.

в) Нарисуйте ортогональную проекцию фигуры F на плоскость BB_1D_1D.

г) Является ли фигура, ограниченная гранями куба и гранями фигуры F, многогранником?

2. Нарисуйте фигуру G, являющуюся объединением двух данных тетраэдров. Выполните для фигуры G те же задания, что и для фигуры F.

С—5.2. <u>Призма</u>

Вариант 1

Все рёбра треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 1, $\angle BCC_1 = \alpha$, грань ABB_1A_1 — квадрат.

1. Пусть $\alpha = 60°$.

а) Нарисуйте проекцию ребра CC_1 на плоскость ABC.

б) Найдите угол x между прямой CC_1 и плоскостью ABC.

в) Найдите угол y между гранями ABC и ABA_1B_1.

г) Найдите угол z между гранями ACC_1A_1 и BCC_1B_1.

д) Нарисуйте кратчайший отрезок между основаниями призмы.

е) Вычислите расстояние между плоскостями оснований призмы.

2. Установите границы при изменении острого угла α для:

а) угла z;

б) расстояния между основаниями призмы;

в) диаметра (расстояния между наиболее удалёнными друг от друга точками) призмы.

Вариант 2

Все рёбра треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 1, $\angle ABB_1 = \alpha$, грань CAA_1C_1 — квадрат.

1. Пусть $\alpha = 120°$.

а) Нарисуйте проекцию ребра BB_1 на плоскость ABC.

б) Найдите угол x между прямой BB_1 и плоскостью ABC.

в) Найдите угол y между гранями ABC и CAC_1A_1.

г) Найдите угол z между гранями CBB_1C_1 и ABB_1A_1.

д) Нарисуйте кратчайший отрезок между основаниями призмы.

е) Вычислите расстояние r между плоскостями оснований призмы.

2. Установите границы при изменении острого угла α для:

а) угла z;

б) расстояния между основаниями призмы;

в) диаметра (расстояния между наиболее удалёнными друг от друга точками) призмы.

С—5.3. <u>Параллелепипед</u>

Вариант 1

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание $ABCD$ — ромб с углом 60° при вершине A. Ребро AA_1 составляет с рёбрами AB и AD углы α. Все рёбра параллелепипеда равны 1.

1. Пусть α = 60°.

а) Нарисуйте проекцию ребра AA_1 на плоскость основания.

б) Найдите угол x между прямой AA_1 и плоскостью основания.

в) Нарисуйте кратчайший отрезок между основаниями.

г) Найдите расстояние между основаниями параллелепипеда.

2. Для произвольного угла α найдите:

а) угол x между прямой AA_1 и плоскостью основания;

б) расстояние между основаниями параллелепипеда;

в) угол α, при котором расстояния между плоскостями противоположных граней равны;

г) границы для его диаметра d (расстояния между наиболее удалёнными друг от друга точками параллелепипеда).

Вариант 2

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание $ABCD$ — ромб с углом 120° при вершине B. Ребро CC_1 составляет с рёбрами CB и CD углы α. Все рёбра параллелепипеда равны 1.

1. Пусть α = 120°.

а) Нарисуйте проекцию ребра CC_1 на плоскость основания.

б) Найдите угол x между прямой CC_1 и плоскостью основания.

в) Нарисуйте кратчайший отрезок между основаниями.

г) Найдите расстояние между основаниями параллелепипеда.

2. Для произвольного угла α найдите:

а) угол x между прямой CC_1 и плоскостью основания;

б) расстояние между основаниями параллелепипеда;

в) угол α, при котором расстояния между плоскостями противоположных граней равны;

г) границы для его диаметра d (расстояния между наиболее удалёнными друг от друга точками параллелепипеда).

С—5.4. <u>Куб</u>

Вариант 1

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. В кубе находится цилиндр, ось которого лежит на диагонали A_1C. Окружности оснований цилиндра вписаны в треугольные сечения куба плоскостями этих оснований.

1. Чему равен диаметр d цилиндра, основания которого делят диагональ куба A_1C на три равные части?

2. Найдите зависимость $d(H)$, где H — высота цилиндра.

3. В каких границах изменяется $d(H)$?

4. Изменится ли результат, полученный в пункте 3, если рассматривать не только треугольные сечения куба?

Вариант 2

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. В кубе находится цилиндр, ось которого лежит на диагонали AC_1. Окружности оснований цилиндра вписаны в треугольные сечения куба плоскостями этих оснований.

1. Чему равен диаметр d цилиндра, основания которого делят диагональ куба A_1C на три равные части?

2. Найдите зависимость $d(H)$, где H — высота цилиндра.

3. В каких границах изменяется $d(H)$?

4. Изменится ли результат, полученный в пункте 3, если рассматривать не только треугольные сечения куба?

С—5.5. <u>Правильная пирамида</u>

Вариант 1

Дана правильная треугольная пирамида. Пусть двугранный угол при основании равен α, а двугранный угол при боковом ребре равен β.

1. Пусть $\beta = 90°$. Чему равен угол α?

2. а) Найдите зависимость β от α.

б) Пусть угол α растёт. Что происходит с углом β?

в) Найдите плоский угол при вершине пирамиды, если $\beta = \alpha$.

г) При каком плоском угле φ при вершине пирамиды $\beta > \alpha$?

д) Может ли выполняться равенство $\beta = 2\alpha$ и при этом одно из рёбер пирамиды быть в два раза больше другого?

Вариант 2

Дана правильная треугольная пирамида. Пусть двугранный угол при основании равен α, а двугранный угол при боковом ребре равен β.

1. Пусть $\beta = 120°$. Чему равен угол α?

2. а) Найдите зависимость α от β.

б) Пусть угол β растёт. Что происходит с углом α?

в) Найдите плоский угол при ребре основания пирамиды, если $\alpha = \beta$.

г) При каком плоском угле φ при ребре основания пирамиды $\alpha > \beta$?

д) Может ли выполняться равенство $\alpha = \frac{\beta}{2}$ и при этом одно из рёбер пирамиды быть в два раза больше другого?

С—5.6. <u>Произвольный тетраэдр</u>

Вариант 1

В тетраэдре $ABCD$ грани BCD и ABC перпендикулярны. Каждая из них — прямоугольный равнобедренный треугольник с гипотенузой BC, равной 2.

1. Докажите, что середина BC равноудалена от всех вершин тетраэдра.

2. Какое ребро в нём является наибольшим?

3. Докажите, что рёбра BC и AD взаимно перпендикулярны.

4. Чему равен угол между прямыми BD и AC?

5. Какой двугранный угол в нём является наименьшим?

6. Чему равно расстояние между прямыми BD и AC?

Вариант 2

В тетраэдре $ABCD$ грани ACD и ABC перпендикулярны. Каждая из них — прямоугольный равнобедренный треугольник с гипотенузой AC, равной 2.

1. Докажите, что середина AC равноудалена от всех вершин тетраэдра.

2. Какое ребро в нём является наибольшим?

3. Докажите, что рёбра AC и BD взаимно перпендикулярны.

4. Чему равен угол между прямыми AD и BC?

5. Какой двугранный угол в нём является наименьшим?

6. Чему равно расстояние между прямыми AD и BC?

С—5.7. <u>Правильная усечённая пирамида</u>

Вариант 1

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырёхугольная усечённая пирамида, которая является частью правильной четырёхугольной пирамиды с равными рёбрами. При этом ребро меньшего основания усечённой пирамиды в два раза меньше ребра большего основания этой пирамиды. Существует ли точка, которая равноудалена от всех:

а) вершин усечённой пирамиды;

б) граней усечённой пирамиды;

в) рёбер усечённой пирамиды?

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырёхугольная усечённая пирамида. $AB = 2$, $A_1B_1 = 1$, $AA_1 = x$. При каком значении x существует:

а) точка M, равноудалённая от всех её вершин?

б) точка N, равноудалённая от всех её граней?

в) точка Q, равноудалённая от всех её рёбер?

Вариант 2

1. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная усечённая пирамида, которая является частью правильной треугольной пирамиды с равными рёбрами. При этом ребро меньшего основания усечённой пирамиды в два раза меньше ребра большего основания этой пирамиды. Существует ли точка, которая равноудалена от всех:

а) вершин усечённой пирамиды;

б) граней усечённой пирамиды;

в) рёбер усечённой пирамиды?

2. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная усечённая пирамида, $AB = 2$, $A_1B_1 = 1$, $AA_1 = x$. При каком значении x существует:

а) точка M, равноудалённая от всех её вершин?

б) точка N, равноудалённая от всех её граней?

в) точка Q, равноудалённая от всех её рёбер?

С—5.8. <u>Выпуклый многогранник</u>

Вариант 1

Треугольник ABC — равносторонний со стороной, равной 2. На его сторонах в одну сторону от его плоскости как на гипотенузах построены равнобедренные прямоугольные треугольники AKC, ALB, BMC. Плоскости этих треугольников перпендикулярны плоскости ABC. Рассматривается многогранник с вершинами A, B, C, K, L, M.

1. Является ли он выпуклым?

2. Сколько его граней являются правильными треугольниками?

3. Вычислите его диаметр (расстояния между наиболее удалёнными друг от друга точками многогранника).

4. Сколько в нём тупых двугранных углов?

5. Есть ли такая точка, которая равноудалена от всех его вершин?

6. Есть ли такая точка, которая равноудалена от всех его граней?

Вариант 2

Треугольник ABC — равносторонний со стороной, равной 2. На его сторонах в одну сторону от его плоскости как на гипотенузах построены равносторонние треугольники AKC, ALB, BMC. Плоскости этих треугольников перпендикулярны плоскости ABC. Рассматривается многогранник с вершинами A, B, C, K, L, M.

1. Является ли он выпуклым?

2. Сколько его граней являются правильными треугольниками?

3. Вычислите его диаметр (расстояния между наиболее удалёнными друг от друга точками многогранника).

4. Сколько в нём тупых двугранных углов?

5. Есть ли такая точка, которая равноудалена от всех его вершин?

6. Есть ли такая точка, которая равноудалена от всех его граней?

С—5.9. <u>Правильные многогранники</u>

Вариант 1

Правильный октаэдр составлен из двух четырёхугольных пирамид $PABCD$ и $QABCD$. Каждое ребро этих пирамид равно 2.

1. Вычислите расстояние:

а) между серединами рёбер PA и DQ;

б) от вершины *P* до треугольника *ADQ*;

в) между плоскостями *PAB* и *CDQ*;

г) между прямыми *PD* и *AQ*.

2. Вычислите угол между:

а) прямыми *PB* и *CQ*;

б) плоскостями *PBC* и *QBC*;

в) прямой *PC* и плоскостью *QCD*;

г) гранями *PBC* и *ABQ*.

Вариант 2

Правильный октаэдр составлен из двух четырёхугольных пирамид *AKLMN* и *BKLMN*. Каждое ребро этих пирамид равно 2.

1. Вычислите расстояние:

а) между серединами рёбер *AK* и *BN*;

б) от *B* до треугольника *KAN*;

в) между плоскостями *BKL* и *MAN*;

г) между прямыми *BN* и *AM*.

2. Вычислите угол между:

а) прямыми *BN* и *KA*;

б) плоскостями *BMN* и *AMN*;

в) прямой *BM* и плоскостью *AMN*;

г) гранями *BMN* и *AKN*.

С—6.1. <u>Объём прямого кругового цилиндра</u>

Вариант 1

Дана четырёхугольная пирамида, у которой все рёбра равны. Плоскость основания пирамиды и плоскости двух её противоположных боковых граней являются опорными для цилиндра. Ось этого цилиндра параллельна стороне основания пирамиды, центр симметрии цилиндра находится на высоте пирамиды.

1. Пусть ребро пирамиды равно 2. Чему равен объём такого цилиндра, если диаметр основания цилиндра равен половине высоты пирамиды?
2. Чему равно отношение радиуса основания цилиндра к его высоте тогда, когда объём такого цилиндра наибольший?

Вариант 2

Дана четырёхугольная пирамида, у которой все рёбра равны. Ось цилиндра лежит на высоте этой пирамиды. Плоскость основания пирамиды и плоскости боковых граней являются опорными для этого цилиндра.

1. Пусть ребро пирамиды равно 2. Чему равен объём такого цилиндра, если высота цилиндра равна половине высоты пирамиды?
2. Чему равно отношение радиуса основания цилиндра к его высоте тогда, когда объём такого цилиндра наибольший?

С—6.2. <u>Объём прямой призмы</u>

Вариант 1

1. В правильной четырёхугольной призме диагональ равна 1. Она составляет с основанием угол α.

   а) Найдите объём этой призмы, если $\alpha = 45°$.

   б) Найдите объём призмы в общем случае.

   в) Может ли объём этой призмы равняться 1, если $\alpha < 45°$?

   г) При каком отношении ребра основания призмы к боковому ребру объём этой призмы будет наибольшим?
2. Призму с наибольшим объёмом (задача 1г) поставили основанием на стол, сняли с неё верхнюю грань и наполнили водой доверху, а потом наклонили так, что одно ребро осталось на столе, а основание стало составлять с плоскостью стола угол 30°. Какая часть объёма воды вылилась?

Вариант 2

1. В правильной четырёхугольной призме диагональ равна 1. Она составляет с боковой гранью угол α.

а) Найдите объём этой призмы, если $\alpha = 30°$.

б) Найдите объём призмы в общем случае.

в) Может ли объём этой призмы равняться 1, если $\alpha < 30°$?

г) При каком отношении ребра основания призмы к боковому ребру объём этой призмы будет наибольшим?

2. Призму с наибольшим объёмом (задача 1г) поставили основанием на стол, сняли с неё верхнюю грань и наполнили водой доверху, а потом наклонили так, что одно ребро осталось на столе, а боковая грань стала составлять с плоскостью стола угол 60°. Какая часть объёма воды вылилась?

С—6.3. <u>Объём как интеграл</u>

Вариант 1

Дан равносторонний треугольник ABC со стороной, равной 2. На всех хордах этого треугольника, параллельных стороне AB, с одной стороны от плоскости ABC и перпендикулярно ей построены:

а) квадраты;

б) полукруги;

в) сегменты парабол постоянной высоты 1, причём ось каждой параболы проходит через середину соответствующей хорды треугольника.

Найдите объём полученного тела.

Вариант 2

Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной 2. На всех хордах этого треугольника, параллельных стороне AB, с одной стороны от плоскости ABC и перпендикулярно ей построены:

а) квадраты;

б) полукруги;

в) сегменты парабол постоянной высоты 1, причём ось каждой параболы проходит через середину соответствующей хорды треугольника.

Найдите объём полученного тела.

С—6.4. <u>Объём наклонной призмы</u>

Вариант 1

Основание наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник со стороной, равной 1. Боковое ребро AA_1 равно 1 и образует с рёбрами AB и AC равные углы.

1. Вычислите объём призмы, когда двугранный угол при ребре BC равен 60°.

2. Пусть двугранный угол при ребре AA_1 равен α.

а) Вычислите объём призмы, когда $\alpha = 135°$.

б) Найдите зависимость $V(\alpha)$, где V — объём призмы.

в) В каких границах лежит $V(\alpha)$?

Вариант 2

Основание наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб со стороной, равной 1 и углом 60° между сторонами AB и AD. Боковое ребро AA_1 равно 1 и образует с рёбрами AB и AD равные углы.

1. Вычислите объём параллелепипеда, когда плоскость BB_1D_1D образует с основанием угол 60°.

2. Пусть двугранный угол при ребре AA_1 равен α.

а) Вычислите объём параллелепипеда, когда $\alpha = 135°$.

б) Найдите зависимость $V(\alpha)$, где V — объём параллелепипеда.

в) В каких границах лежит $V(\alpha)$?

С—6.5. <u>Объём конуса</u>

Вариант 1

Конус и усечённый конус имеют общее основание. Других общих точек у них нет. Образующая поверхности конуса равна образующей поверхности усечённого конуса. Суммарная высота объединения конуса и усечённого конуса равна 2. Радиус другого, большего основания усечённого конуса равен 1.

1. а) Чему равен объём всего тела, когда радиус основания конуса равен 0,9?

б) Чему равен объём всего тела, когда высота конуса равна высоте усечённого конуса?

2. В каких границах лежит объём такого тела?

Вариант 2

Конус и усечённый конус имеют общее основание. Других общих точек у них нет. Образующая поверхности конуса равна образующей поверхности усечённого конуса. Суммарная высота объединения конуса и усечённого конуса равна 4. Радиус другого, большего основания усечённого конуса равен 2.

1. а) Чему равен объём всего тела, когда радиус основания конуса равен 1,8?

б) Чему равен объём всего тела, когда высота конуса равна высоте усечённого конуса?

2. В каких границах лежит объём такого тела?

С—6.6. <u>Объём пирамиды</u>

Вариант 1

Высота правильной треугольной пирамиды равна 1, двугранный угол при её боковом ребре равен φ.

1. Найдите объём этой пирамиды при $\varphi = 90°$.

2. а) Найдите её объём в общем случае.

б) Найдите границы её объёма при изменении φ.

Вариант 2

Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 1, двугранный угол при её боковом ребре равен φ.

1. Найдите объём этой пирамиды при $\varphi = 90°$.

2. а) Найдите её объём в общем случае.

б) Найдите границы её объёма при изменении φ.

С—6.7. <u>Объём шара</u>

Вариант 1

Какой из шаров имеет наибольший объём, если эти шары описаны около:

а) куба с ребром 1;

б) правильной треугольной пирамиды с ребром основания, равным $\sqrt{2}$, у которой все двугранные углы равны;

в) прямой призмы, основанием которой является прямоугольный равнобедренный треугольник, высота её равна катету основания, а диаметр (т. е. расстояние между наиболее удалёнными друг от друга точками) призмы равен $\sqrt{3}$;

г) четырёхугольной пирамиды, основанием которой является квадрат со стороной, равной 1, две соседние боковые грани которой перпендикулярны основанию, а две другие образуют двугранный угол 120°?

Вариант 2

Какой из шаров имеет наибольший объём, если эти шары описаны около:

а) куба с ребром 2;

б) правильной треугольной пирамиды с боковым ребром, равным $2\sqrt{2}$, у которой все двугранные углы равны;

в) прямой призмы, основанием которой является прямоугольный равнобедренный треугольник, высота которой равна катету основания, а площадь наибольшей грани равна $4\sqrt{2}$;

г) четырёхугольной пирамиды, основанием которой является квадрат со стороной, равной 2, две соседние боковые грани которой перпендикулярны основанию, а угол между плоскостями других его боковых граней равен 60°?

С—6.8. <u>Объём шарового сегмента</u>

Вариант 1

Центр шара находится в точке пересечения диагоналей правильной четырёхугольной призмы. Ребро основания призмы равно a, боковое ребро равно b. Пусть сфера этого шара касается всех боковых рёбер призмы. Будет ли объём части шара, которая находится в призме, больше половины этого объёма шара, если:

а) $a = b = 2$;

б) $a = 2$, $b = 4$;

в) $a = 2$, $b = 1$?

Вариант 2

Центр шара находится в точке пересечения диагоналей правильной четырёхугольной призмы. Ребро основания призмы равно a, боковое ребро равно b. Пусть сфера этого шара касается всех боковых рёбер призмы. Будет ли объём части шара, которая находится в призме, больше половины этого объёма шара, если:

а) $a = b = 4$;

б) $a = 4$, $b = 8$;

в) $a = 4$, $b = 2$?

С—6.9. <u>Объём фигуры вращения</u>

Вариант 1

Дана трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = CD = 1$.

1. Пусть $AD = a$. Чему равен объём фигуры вращения этой трапеции вокруг:

а) AD; б) BC?

2. Пусть $AD = 2$. Чему равен объём фигуры вращения этой трапеции вокруг:

а) CD; б) AC?

3. Вернитесь к задаче 1. Пусть a увеличивается. Что происходит при этом с объёмом фигуры вращения вокруг:

а) AD; б) BC?

Вариант 2

Дана трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = CD = 1$.

1. Пусть острый угол трапеции равен α. Чему равен объём фигуры вращения этой трапеции вокруг:

а) AD; б) BC?

2. Пусть $\alpha = 60°$. Чему равен объём фигуры вращения этой трапеции вокруг:

а) AB; б) BD?

3. Вернитесь к задаче 1. Пусть a увеличивается. Что происходит при этом с объёмом фигуры вращения вокруг:

а) AD; б) BC?

С—6.10. <u>Объём комбинации тел вращения</u>

Вариант 1

Тело T является объединением конуса и усечённого конуса. Пересечением конусов является их общее основание. Тело T вписано в полушар, причём одно основание усечённого конуса совпадает с основанием полушара, а окружность другого основания лежит на полусфере. Радиус полушара равен 1.

1. Чему равно отношение объёмов тела T и полушара, если образующая поверхности усечённого конуса равна 1?
2. Могут ли быть равны объёмы этих конусов в теле T?
3. Может ли объём тела T быть больше половины объёма полушара?

Вариант 2

Тело T является объединением конуса и усечённого конуса. Пересечением этих конусов является их общее основание. Тело T вписано в полушар, причём одно основание усечённого конуса совпадает с основанием полушара, а окружность другого основания лежит на полусфере. Радиус полушара равен 1.

1. Чему равно отношение объёмов тела T и полушара, если образующая поверхности конуса равна 1?
2. Могут ли быть равны объёмы этих конусов в теле T?
3. Может ли объём тела T быть меньше половины объёма полушара?

С—6.11. <u>Комбинация многогранника и тела вращения</u>

Вариант 1

В правильной треугольной пирамиде объём равен 1, а плоский угол при вершине — 90°. Пусть V_1 — объём описанного шара, V_2 — объём вписанного шара.

1. Найдите V_1.

2. Верно ли, что $V_2 < \frac{2}{3}$?

Вариант 2

В правильной четырёхугольной пирамиде объём равен 1, а плоский угол при вершине — 60°. Пусть V_1 — объём описанного шара, V_2 — объём вписанного шара.

1. Найдите V_1.

2. Верно ли, что $V_2 < \frac{4}{5}$?

С—7.1. <u>Площадь поверхности многогранника</u>

Вариант 1

ABC и *ABD* — прямоугольные равнобедренные треугольники с гипотенузой *AB*. Угол между треугольниками *ABC* и *ABD* равен φ, $AB = 4$. Отрезок *CK* равен 2 и перпендикулярен плоскости *ABC*.

1. Нарисуйте многогранник с вершинами в точках *A*, *B*, *C*, *D*, *K*.

2. Пусть точки *K* и *D* находятся с одной стороны от плоскости *ABC*.

а) Чему равна площадь поверхности выпуклого многогранника с вершинами в точках *A*, *B*, *C*, *D*, *K*, если $\varphi = 90°$?

б) Что происходит с этой площадью при увеличении угла φ от 90°?

Вариант 2

Треугольники *ABC* и *ABD* — равносторонние. Угол между треугольниками *ABC* и *ABD* равен φ, $AB = 2$. Отрезок *CK* равен 1 и перпендикулярен плоскости *ABC*.

1. Нарисуйте многогранник с вершинами в точках *A*, *B*, *C*, *D*, *K*.

2. Пусть точки *K* и *D* находятся с одной стороны от плоскости *ABC*.

а) Чему равна площадь поверхности выпуклого многогранника с вершинами в точках *A*, *B*, *C*, *D*, *K*, если $\varphi = 90°$?

б) Что происходит с этой площадью при увеличении угла φ от 90°?

С—7.2. <u>Площадь поверхности правильной пирамиды</u>

Вариант 1

1. Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 1, а площадь её боковой поверхности равна 2. Чему равен её объём?

2. Обозначим её объём через V, площадь её основания через $S_о$, площадь её боковой поверхности через $S_б$.

а) Выразите V через $S_о$ и $S_б$.

б) Всегда ли, зная V и $S_б$, можно найти $S_о$ однозначно?

Вариант 2

1. Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна 1, а площадь её боковой поверхности равна 2. Чему равен её объём?

2. Обозначим её объём через V, площадь её основания через $S_о$, площадь её боковой поверхности через $S_б$.

а) Выразите V через $S_о$ и $S_б$.

б) Всегда ли, зная V и $S_б$, можно найти $S_о$ однозначно?

С—7.3. <u>Площадь поверхности призмы</u>

Вариант 1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания равно 1, а боковое ребро равно 4.

1. Обозначим площадь её поверхности как S_0. Вычислите S_0.

2. Через AB и A_1B_1 проведены две параллельные плоскости под углом 60° к основаниям. Они пересекают прямую CC_1 в точках K и K_1. Обозначим площадь поверхности многогранника с вершинами в точках A, B, K, A_1, B_1, K_1 как S_1. Вычислите S_1.

3. Через AB и A_1B_1 проведены две плоскости под углом 60° к основаниям. Каждая из них пересекает данную призму по ребру основания, а прямую

CC_1 в точках L и L_1. Обозначим площадь поверхности многогранника, ограниченного проведёнными плоскостями и плоскостями боковых граней призмы, как S_2. Вычислите S_2.

4. Через AB и A_1B_1 проведены две плоскости под углом 60° к основаниям. Они пересекают призму по треугольникам, а ребро CC_1 в точках M и M_1. Обозначим площадь поверхности многогранника, полученного в призме, как S_3. Вычислите S_3.

5. Расположите в порядке возрастания S_0, S_1, S_2, S_3 в общем случае, когда угол равен не 60°, а φ.

Вариант 2

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания равно 1, а боковое ребро равно 4.

1. Обозначим площадь её поверхности как S_0. Вычислите S_0.

2. Через AB и A_1B_1 проведены две параллельные плоскости под углом 45° к основаниям. Они пересекают прямую CC_1 в точках K и K_1. Обозначим площадь поверхности многогранника с вершинами в точках A, B, K, A_1, B_1, K_1 как S_1. Вычислите S_1.

3. Через AB и A_1B_1 проведены две плоскости под углом 45° к основаниям. Каждая из них пересекает данную призму по ребру основания, а прямую CC_1 в точках L и L_1. Обозначим площадь поверхности многогранника, ограниченного проведёнными плоскостями и плоскостями боковых граней призмы, как S_2. Вычислите S_2.

4. Через AB и A_1B_1 проведены две плоскости под углом 45° к основаниям. Они пересекают призму по треугольникам, а ребро CC_1 в точках M и M_1. Обозначим площадь поверхности многогранника, полученного в призме, как S_3. Вычислите S_3.

5. Расположите в порядке возрастания S_0, S_1, S_2, S_3 в общем случае, когда угол равен не 45°, а φ.

С—7.4. Формула $R = \frac{3V}{S}$ для радиуса сферы, вписанной в многогранник

Вариант 1

ABCD — тетраэдр, в котором $AD = 4$, $BC = 4$, $AB = AC = 3$, $DB = DC = 5$.

1. Чему равен радиус шара, вписанного в этот тетраэдр?

2. Пусть *AD* начинает увеличиваться и при этом $DA \perp (ABC)$. Что происходит с этим радиусом, если основание *ABC* не изменяется?

3. Параллельно плоскости *ABC* проводится сечение данного тетраэдра. При этом в полученную усечённую пирамиду можно вписать сферу.

а) Чему равен радиус этой сферы?

б) Будет ли объём усечённой пирамиды составлять больше $\frac{3}{4}$ объёма исходной пирамиды?

Вариант 2

ABCD — тетраэдр, в котором $AD = 4$, $BC = 2$, $AB = AC = 3$, $DB = DC = 5$.

1. Чему равен радиус шара, вписанного в этот тетраэдр?

2. Пусть *AD* начинает уменьшаться и при этом $DA \perp (ABC)$. Что происходит с этим радиусом, если основание *ABC* не изменяется?

3. Параллельно плоскости *ABC* проводится сечение данного тетраэдра. При этом в полученную усечённую пирамиду можно вписать сферу.

а) Чему равен радиус этой сферы?

б) Будет ли объём усечённой пирамиды составлять больше $\frac{1}{2}$ объёма исходной пирамиды?

С—7.5. Площадь сферы и её частей

Вариант 1

Площадь сферы, описанной около правильного тетраэдра, равна 1.

1. Чему равна площадь сферы:

а) вписанной в этот тетраэдр;

б) касающейся всех его рёбер?

2. Какая часть сферы, касающейся всех его рёбер, имеет большую площадь: та, которая вне тетраэдра, или та, которая внутри его?

Вариант 2

Площадь сферы, вписанной в правильный тетраэдр, равна 1.

1. Чему равна площадь сферы:

а) описанной около этого тетраэдра;

б) касающейся всех его рёбер?

2. Какая часть сферы, касающейся всех его рёбер, имеет большую площадь: та, которая вне тетраэдра, или та, которая внутри его?

С—7.6. <u>Площадь поверхности цилиндра</u>

Вариант 1

Развёрткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник с диагональю, равной 1. Её угол с большей стороной прямоугольника равен φ.

1. Чему равна площадь поверхности цилиндра, если $\varphi = 30°$.

2. Чему она равна в общем случае, когда меньшая сторона прямоугольника является образующей цилиндра?

3. Будет ли она в общем случае меньше $\frac{2}{3}$?

4. Чему равно её наибольшее значение?

Вариант 2

Развёрткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник с диагональю, равной 1. Её угол с меньшей стороной прямоугольника равен φ.

1. Чему равна площадь поверхности цилиндра, если $\varphi = 60°$?

2. Чему она равна в общем случае, когда бо2льшая сторона прямоугольника является образующей цилиндра?

3. Будет ли она в общем случае меньше $\frac{2}{3}$?

4. Чему равно её наибольшее значение?

С—7.7. <u>Площадь поверхности конуса</u>

Вариант 1

Имеются два конуса. Обозначим соответственно как S_1 и S_2 площади их боковых поверхностей, $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ — площади их поверхностей V_1 и V_2 — их объёмы.

1. Может ли быть, что:

а) $S_1 > S_2$, а $\overline{S}_1 < \overline{S}_2$;

б) $S_1 > S_2$, а $V_1 < V_2$;

в) $\overline{S}_1 > \overline{S}_2$, а $V_1 < V_2$?

2. а) Пусть $V_1 = V_2$. В каких границах лежит отношение $\frac{S_1}{S_2}$?

б) Пусть $\frac{S_1}{S_2} = 2$. В каких границах лежит отношение $\frac{\overline{S}_1}{\overline{S}_2}$?

Вариант 2

Имеются два конуса. Обозначим соответственно как S_1 и S_2 площади их боковых поверхностей, $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ площади их поверхностей, V_1 и V_2 их объёмы.

1. Может ли быть, что:

а) $S_1 < S_2$, а $\overline{S}_1 > \overline{S}_2$;

б) $S_1 < S_2$, а $V_1 > V_2$;

в) $\overline{S}_1 < \overline{S}_2$, а $V_1 > V_2$?

2. а) Пусть $V_1 = V_2$. В каких границах лежит отношение $\frac{\overline{S}_1}{\overline{S}_2}$?

б) Пусть $\frac{\overline{S}_1}{\overline{S}_2} = 2$. В каких границах лежит отношение $\frac{S_1}{S_2}$?

С—8.1. <u>Линейные операции с векторами</u>

Вариант 1

1. Пусть $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}$. Может ли выполняться равенство $\vec{a}-\vec{c}+\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$?

2. Пусть $\overrightarrow{AX}+2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ и $\overrightarrow{BY}-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Будет ли вектор $\overrightarrow{XY}$ линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$?

3. *ABCD* — тетраэдр. Точки *M*, *N*, *P*, *Q* таковы, что $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DQ}=y\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=\vec{0}$.

а) Найдите *x* и *y*.

б) Обобщите задачу.

4. Треугольники *ABC* и $A_1B_1C_1$ имеют общую точку пересечения медиан. При этом $\overrightarrow{A_1A}=\vec{a}$, $\overrightarrow{B_1B}=\vec{b}$. Чему равен вектор $\overrightarrow{CC_1}$?

Вариант 2

1. Пусть $\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}+\vec{a}$. Может ли выполняться равенство $\vec{c}-\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-\vec{c}-\vec{b}$?

2. Пусть $\overrightarrow{BX}+2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ и $\overrightarrow{AY}-\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}=\vec{0}$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Будет ли вектор $\overrightarrow{XY}$ линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$?

3. *ABCD* — тетраэдр. Точки *M*, *N*, *P*, *Q* таковы, что $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DP}=y\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=\vec{0}$.

а) Найдите *x* и *y*.

б) Обобщите задачу.

4. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют общую точку пересечения медиан. При этом $\overrightarrow{B_1A} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1B} = \vec{b}$. Чему равен вектор $\overrightarrow{CC_1}$?

С—8.2. Определение скалярного умножения

Вариант 1

Пусть $PABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с основанием $ABCD$, все рёбра которой равны 1.

1. Вычислите:

а) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$; б) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{DB}$; в) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{PA}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}\right)$;

д) $\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}\right)\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}\right)$.

2. Найдите точку X:

а) на прямой AD, такую, что $PA \perp CX$;

б) на прямой PA, такую, что $CD \perp BX$.

Вариант 2

Пусть $PABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с основанием $ABCD$, все рёбра которой равны 1.

1. Вычислите:

а) $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$; б) $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{DA}$; г) $\overrightarrow{PB}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$;

д) $\left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}\right)\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}\right)$.

2. Найдите точку X:

а) на прямой BA, такую, что $PB \perp DX$;

б) на прямой PB, такую, что $DA \perp CX$.

С—8.3. <u>Базис пространства</u>

Вариант 1

1. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис пространства.

а) Образуют ли базис пространства векторы $\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$?

б) Будет ли базисом тройка векторов $\alpha\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\alpha\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}+\alpha\vec{c}$ $(\alpha \in \boldsymbol{R})$?

2. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис пространства. Найдутся ли отличные от нуля такие числа x и y, что $\vec{m} = x^3\vec{a} + x^2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = -y^3\vec{a} + y^2\vec{b} + xy\vec{c}$, если:

а) $\vec{m} = \vec{n}$; б) $\vec{m} \parallel \vec{n}$; в) $\vec{m} \perp \vec{n}$ (в случае «в» исходный базис ортогональный)?

3. а) Верно ли для любого вектора $\vec{x}$, что $\left((\vec{x}\vec{b})\vec{c} - (\vec{x}\vec{c})\vec{b}\right) \perp \vec{a}$?

б) Если нет, то для какого вектора $\vec{x}$ это условие выполняется?

Вариант 2

1. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис пространства.

а) Образуют ли базис пространства векторы $\vec{a}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$?

б) Будет ли базисом тройка векторов $\alpha\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}-\alpha\vec{b}+\alpha\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}+\alpha\vec{c}$ $(\alpha \in \boldsymbol{R})$?

2. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис пространства. Найдутся ли отличные от нуля такие числа x, y, что $\vec{m} = x^3\vec{a} + x^2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = y^3\vec{a} + y^2\vec{b} - xy\vec{c}$, если:

а) $\vec{m} = \vec{n}$; б) $\vec{m} \parallel \vec{n}$; в) $\vec{m} \perp \vec{n}$ (в случае «в» исходный базис ортогональный)?

3. а) Верно ли для любого вектора $\vec{x}$, что $\left((\vec{x}\vec{b})\vec{a} - (\vec{x}\vec{a})\vec{b}\right) \perp \vec{c}$?

б) Если нет, то для какого вектора $\vec{x}$ это условие выполняется?

С—8.4. Разложение вектора на составляющие по базису

Вариант 1

$ABCDAB_1C_1B_1D_1$ — куб. Точка K — центр грани $A_1B_1C_1D_1$, точка L — центр грани CDD_1C_1, точка M — центр треугольника BDC_1, точка T — центр тетраэдра A_1BDC_1. Пусть $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BB_1}$ — базис. Найдите коэффициенты разложения по этому базису векторов:

а) $\overrightarrow{BK}$; б) $\overrightarrow{DK}$; в) $\overrightarrow{KL}$; г) $\overrightarrow{CM}$; д) $\overrightarrow{A_1T}$.

Вариант 2

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка K — центр грани $A_1B_1C_1D_1$, точка L — центр грани AA_1B_1B, точка M — центр треугольника CB_1A, точка T — центр тетраэдра B_1ACD_1. Пусть $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CC_1}$ — базис. Найдите коэффициенты разложения по этому базису векторов:

а) $\overrightarrow{CK}$; б) $\overrightarrow{AK}$; в) $\overrightarrow{KL}$; г) $\overrightarrow{BM}$; д) $\overrightarrow{D_1T}$.

С—8.5. Координаты вектора

Вариант 1

1. Дан ортонормированный базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Пусть $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (-1, 1, 0)$, $\vec{c} = (0, -1, 1)$.

а) Каковы координаты вектора $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$?

б) Образуют ли базис векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$?

в) Запишите вектор (0, 2, –2) как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

2. Вектор $\vec{x}$ имеет одинаковые координаты в данном базисе и базисе $\vec{j}$, $\vec{k}$, $-\vec{i}$. Что это за вектор?

Вариант 2

1. Дан ортонормированный базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Пусть $\vec{a}=(-1,0,1)$, $\vec{b}=(1,-1,0)$, $\vec{c}=(0,1,-1)$.

а) Каковы координаты вектора $3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$?

б) Образуют ли базис векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$?

в) Запишите вектор (–2, 2, 0) как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

2. Вектор $\vec{x}$ имеет одинаковые координаты в данном базисе и базисе $\vec{k}$, $\vec{i}$, $-\vec{j}$. Что это за вектор?

С—8.6. <u>Скалярное произведение в координатах</u>

Вариант 1

1. $\vec{a}=(-1,0,1)$, $\vec{b}=(1,0,1)$. Найдите:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $|\vec{a}|-|\vec{b}|$; в) $\angle\vec{a}\,(\vec{a}+\vec{b})$.

2. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы осей координат, и пусть $\vec{x}\vec{i}=\vec{x}\vec{j}=0{,}5$, $|\vec{x}|=1$. Чему равно $\vec{x}\vec{k}$?

3. $\vec{a}=(x,\ 1,\ 0)$, $\vec{b}=(1,\ 0,\ x)$. В каких границах лежит угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

4. Пусть $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$. Найдите такой вектор $\vec{b}$, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ и $|\vec{b}|=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Вариант 2

1. $\vec{a}=(-1,\ 0,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 0,\ -1)$. Найдите:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $|\vec{a}|-|\vec{b}|$; в) $\angle\vec{a},\ (\vec{a}+\vec{b})$.

2. Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы осей координат, и пусть $\vec{x}\vec{i}=\vec{x}\vec{j}=-0{,}5$, $|\vec{x}|=1$. Чему равно $\vec{x}\vec{k}$?

3. $\vec{a}$ = (0, *x*, 1), $\vec{b}$ = (*x*, 1, 0). В каких границах лежит угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

4. Пусть $\vec{a} = (1,\ 1,\ 1)$. Найдите такой вектор $\vec{b}$, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ и $|\vec{b}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

С—8.7. <u>Радиус-вектор</u>

Вариант 1

Даны три точки *A*, *B*, *C*, не лежащие на одной прямой.

1. Докажите, что при любом α существует точка *X*, такая, что $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} - 3\overrightarrow{XC} = \alpha\overrightarrow{AB}$.

2. Верно ли, что:

а) точка $X \in (ABC)$ при любом α;

б) точка *X* лежит в полуплоскости, определяемой прямой *AB* и точкой *C*?

3. При каких α для точки *X* задачи 1:

а) *X* принадлежит одной из трёх прямых: *AB*, *AC* или *BC*;

б) *X* лежит между какими-то двумя из данных точек;

в) *X* лежит внутри угла *ABC*?

4. Лежит ли точка *X* из задачи 1 внутри треугольника *ABC*?

Вариант 2

Даны три точки *A*, *B*, *C*, не лежащие на одной прямой.

1. Докажите, что при любом α существует точка *X*, такая, что $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} - 3\overrightarrow{XB} = \alpha\overrightarrow{AC}$.

2. Верно ли, что:

а) $X \in (ABC)$ при любом α;

б) точка *X* лежит в полуплоскости, определяемой прямой *AC* и точкой *B*?

3. При каких α для точки *X* задачи 1:

а) X принадлежит одной из трёх прямых: AB, AC или BC;

б) X лежит между какими-то двумя из данных точек;

в) X лежит внутри угла ACB?

4. Лежит ли точка X из задачи 1 внутри треугольника ABC?

С—8.8. Векторный метод (аффинные задачи)

Вариант 1

Четыре точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Пусть M_1 — точка пересечения медиан треугольника ABD, M_2 — точка пересечения медиан треугольника ADC, M_3 — середина BD, M_4 — середина CD.

1. Есть ли среди прямых, определяемых точками M_1, M_2, M_3, M_4, параллельные?

2. Пересекаются ли плоскость AM_3M_2 и прямая BC?

3. Докажите, что прямые M_3M_1 и M_4M_2 пересекаются.

4. Пусть M_3M_2 пересекает плоскость ABC в точке K, M_4M_1 пересекает плоскость ABC в точке L. Найдите отношение $KL : M_3M_4$.

Вариант 2

Четыре точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Пусть M_1 — точка пересечения медиан треугольника ACD, M_2 — точка пересечения медиан треугольника ABC, M_3 — середина CD, M_4 — середина CB.

1. Есть ли среди прямых, определяемых точками M_1, M_2, M_3, M_4, параллельные?

2. Пересекаются ли плоскость AM_3M_2 и прямая BD?

3. Докажите, что прямые M_3M_1 и M_4M_2 пересекаются.

4. Пусть M_3M_2 пересекает плоскость ABD в точке K, M_4M_1 пересекает плоскость ABD в точке L. Найдите отношение $KL : M_3M_4$.

С—8.9. <u>Векторный метод (метрические задачи)</u>

Вариант 1

1. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 2. Вычислите:

а) угол между прямыми A_1K и C_1L, где K — середина AC, L — середина CB;

б) расстояние между серединами отрезков A_1K и C_1L;

в) расстояние от точки K до прямой B_1L.

2. Принадлежит ли этой призме общий перпендикуляр прямых A_1K и C_1L?

Вариант 2

1. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 2. Вычислите:

а) угол между прямыми A_1K и B_1L, где K — середина AC, L — середина AB;

б) расстояние между серединами отрезков A_1K и B_1L;

в) расстояние от точки L до прямой A_1K.

2. Принадлежит ли этой призме общий перпендикуляр прямых A_1K и B_1L?

С—8.10. <u>Система координат. Координаты точки</u>

Вариант 1

1. Дана точка $A(-1, 2, 2)$.

а) Нарисуйте её.

б) Пусть A_x — проекция точки A на ось x, A_{xy} — проекция точки A на плоскость xy. Остальные её проекции записываются аналогично. Каковы координаты точек A_x, A_y, A_z, A_{xy}, A_{xz}, A_{yz}?

2. Дана ещё точка $B(1, -2, 2)$.

а) Нарисуйте отрезок AB.

б) Какие координатные плоскости он пересекает?

в) Какие координатные оси он пересекает?

3. Отрезок AB проектируется на:

а) ось x;

б) ось z;

в) плоскость xy;

г) плоскость yz.

Найдите длины этих проекций.

Вариант 2

1. Дана точка $A(1, -2, -2)$.

а) Нарисуйте её.

б) Пусть A_x — проекция точки A на ось x, A_{xy} — проекция точки A на плоскость xy. Остальные её проекции записываются аналогично. Каковы координаты точек A_x, A_y, A_z, A_{xy}, A_{xz}, A_{yz}?

2. Дана ещё точка $B(-1, 2, -2)$.

а) Нарисуйте отрезок AB.

б) Какие координатные плоскости он пересекает?

в) Какие координатные оси он пересекает?

3. Отрезок AB проектируется на:

а) ось x;

б) ось z;

в) плоскость xy;

г) плоскость yz.

Найдите длины этих проекций.

С—8.11. <u>Деление отрезка в заданном отношении</u>

Вариант 1

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 2. Пусть начало координат находится в точке B, а лучи положительных направлений осей координат — BA, BC, BB_1. Каковы координаты точки:

а) K — середины ребра DD_1;

б) L — центра грани CDC_1D_1;

в) M — центра куба;

г) N — центра треугольника A_1DC_1;

д) P — центра масс точек K, L, M, N?

Вариант 2

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 2. Пусть начало координат находится в точке C, а лучи положительных направлений осей координат — CB, CD, CC_1. Каковы координаты точки:

а) K — середины ребра AA_1;

б) L — центра грани AA_1B_1B;

в) M — центра куба;

г) N — центра треугольника AB_1D_1;

д) P — центра масс точек K, L, M, N?

С—8.12. <u>Формула расстояния между точками</u>

Вариант 1

1. Даны точки $A(3, 2, 0)$, $B(–3, 2, 0)$, $C(0, 0, a)$.

а) При каких значениях a эти точки являются вершинами треугольника?

б) Может ли треугольник ABC быть равносторонним?

в) При каких значениях a треугольник ABC тупоугольный?

г) Каковы координаты точки P, равноудалённой от точек A, B, C и лежащей в одной из координатных плоскостей?

д) В плоскости xz найдите точку K, такую, что $KA + KB$ имеет наименьшее значение.

2. Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2} = 1?$$

Вариант 2

1. Даны точки $A(3, –2, 0)$, $B(–3, –2, 0)$, $C(0, 0, a)$.

а) При каких значениях a эти точки являются вершинами треугольника?

б) Может ли треугольник ABC быть равносторонним?

в) При каких значениях a треугольник ABC тупоугольный?

г) Каковы координаты точки P, равноудалённой от A, B, C и лежащей в одной из координатных плоскостей?

д) В плоскости xz найдите точку K, такую, что $KA + KB$ имеет наименьшее значение.

2. Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2 + z^2} = 1?$$

С—8.13. <u>Уравнение сферы</u>

Вариант 1

Сфера проходит через точки $A(1, –1, 1)$, $B(0, –1, 0)$, $C(1, 0, 0)$, $D(0, 0, 1)$.

1. Проходит ли она через точку с координатами (0, 1, 1)?

2. Какова длина самого длинного отрезка осей координат, лежащего в полученном шаре?

3. Найдите радиус наибольшей окружности, по которой эта сфера пересекает координатные плоскости.

4. Найдите на этой сфере такую точку, которая удалена от начала координат на 2.

5. От каждой точки этой сферы находят расстояние до плоскостей координат. Для какой точки сферы наименьшее из этих расстояний является наибольшим?

Вариант 2

Сфера проходит через точки $A(–1, 1, –1)$, $B(0, 1, 0)$, $C(–1, 0, 0)$, $D(0, 0, –1)$.

1. Проходит ли она через точку с координатами (0, –1, –1)?
2. Какова длина самого длинного отрезка осей координат, лежащего в полученном шаре?
3. Найдите радиус наибольшей окружности, по которой эта сфера пересекает координатные плоскости.
4. Найдите на этой сфере такую точку, которая удалена от начала координат на 2.
5. От каждой точки этой сферы находят расстояние до плоскостей координат. Для какой точки сферы наименьшее из этих расстояний является наибольшим?

С—8.14. <u>**Уравнение плоскости**</u>

Вариант 1

Даны две точки $A(0, 1, 0{,}25)$ и $B(1, 1{,}25, 0)$.

1. Напишите уравнение плоскости α, каждая точка которой равноудалена от точек A и B.
2. Нарисуйте треугольник следов этой плоскости (т. е. треугольник, образованный пересечением этой плоскости с плоскостями координат).
3. Пересекается ли полученная плоскость с плоскостью β, уравнение которой $x = -1$?
4. Напишите уравнение плоскости, параллельной плоскости α и проходящей через начало координат — точку O.
5. Чему равно расстояние от точки O до плоскости α?

Вариант 2

Даны две точки $A(0, 1, 0{,}25)$ и $B(-1, 1{,}25, 0)$.

1. Напишите уравнение плоскости α, каждая точка которой равноудалена от A и B.
2. Нарисуйте треугольник следов этой плоскости (т. е. треугольник, образованный пересечением этой плоскости с плоскостями координат).

3. Пересекается ли полученная плоскость с плоскостью β, уравнение которой $x = 1$? Если да, то какова длина отрезка пересечения треугольника следов с плоскостью β?

4. Напишите уравнение плоскости, параллельной плоскости α и проходящей через начало координат — точку O.

5. Чему равно расстояние от точки O до плоскости α?

С—8.15. Уравнение прямой

Вариант 1

1. Прямая p задана условием $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$

а) Нарисуйте её.

б) Как она расположена по отношению к плоскостям координат? осям координат?

в) Как расположены прямая p и прямая q, заданная условием $x = z = 2$?

г) Напишите уравнение какой-либо прямой, пересекающей прямые p и q.

д) Напишите уравнение какой-либо прямой, перпендикулярной прямым p и q.

2. Даны точки $A(1, –2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(–4, 1, 1)$, $D(–5, –5, 3)$.

а) Будут ли перпендикулярны прямые AC и BD?

б) Будут ли пересекаться прямые AC и BD?

Вариант 2

1. Прямая p задана условием $\begin{cases} x = 2, \\ y = 2. \end{cases}$

а) Нарисуйте её.

б) Как она расположена по отношению к плоскостям координат? осям координат?

в) Как расположены прямая p и прямая q, заданная условием $x = z = 1$?

г) Напишите уравнение какой-либо прямой, пересекающей прямые p и q.

д) Напишите уравнение какой-либо прямой, перпендикулярной прямым p и q.

2. Даны точки $A(-1, 2, -2)$, $B(-1, -4, 0)$, $C(4, -1, -1)$, $D(5, 5, -3)$.

а) Будут ли перпендикулярны прямые AC и BD?

б) Будут ли пересекаться прямые AC и BD?

С—8.16. <u>Уравнение фигур</u>

Вариант 1

Какую фигуру в пространстве определяет такое условие:

а) $|y| \le |x|$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8z \le 0$;

в) $\begin{cases} x + y \ge z, \\ x + z \ge y; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ xy + yz + xz = a; \end{cases}$

д) $\begin{cases} xyz = 1, \\ xy + yz + xz = x + y + z, \\ x \text{ А } 1,\ z \text{ А } 1? \end{cases}$

Вариант 2

Какую фигуру в пространстве определяет такое условие:

а) $|y| \ge |x|$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8z \le 0$;

в) $\begin{cases} x + z \le y, \\ x + y \le z; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y + z = a, \\ xy + yz + xz = 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} xyz = 1, \\ xy + yz + xz = x + y + z, \\ x \text{ А } 1,\ y \text{ А } 1? \end{cases}$

С—8.17. <u>Расстояние между фигурами</u>

Вариант 1

1. Точка A удалена на 1 от плоскости xy и от плоскости yz. Можно ли найти расстояние от точки A до:

а) плоскости xz;

б) какой-либо координатной оси;

в) начала координат?

2. Плоскость α задана уравнением $x - y + z = 1$.

а) Найдите какую-либо точку, удалённую от плоскости α на расстояние, равное 1, и лежащую в плоскости xy.

б) Найдите расстояние от плоскости α до плоскости β, уравнение которой $x - y + z = 2$.

3. Чему равно расстояние между фигурами $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ и $y^2 + (z - 1)^2 = 1$?

Вариант 2

1. Точка A удалена на 1 от плоскости xy и от плоскости xz. Можно ли найти расстояние от точки A до:

а) плоскости yz;

б) какой-либо координатной оси;

в) начала координат?

2. Плоскость α задана уравнением $x + y - z = 1$.

а) Найдите какую-либо точку, удалённую от плоскости α на расстояние, равное 1, и лежащую в плоскости xy.

б) Найдите расстояние от плоскости α до плоскости β, уравнение которой $x + y - z = 2$.

3. Чему равно расстояние между фигурами $(y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$ и $(x - 1)^2 + z^2 = 1$?

С—8.18. <u>Вычисление углов</u>

Вариант 1

Вычислите угол между:

а) прямой $x = y = z$ и прямой $x = y = -z$;

б) прямой $x = y = z$ и плоскостью $x + y - z = 1$;

в) плоскостью $x + y - z = 1$ и плоскостью $x - y + z = 1$.

Вариант 2

Вычислите угол между:

а) прямой $x = y = z$ и прямой $x = -y = z$;

б) прямой $x = y = z$ и плоскостью $x - y + z = 1$;

в) плоскостью $x - y + z = 1$ и плоскостью $-x + y + z = 1$.

С—8.19. <u>Метод координат</u>

Вариант 1

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K — середина ребра A_1B_1, точка L — середина ребра CC_1.

1. Вычислите угол между:

а) прямыми DK и AL;

б) прямой DK и плоскостью AB_1L;

в) плоскостями DKC_1 и AB_1L.

2. Пусть точка P находится на ребре A_1B_1, а точка Q — на ребре CC_1, $CQ = A_1P$. В каких границах лежит угол между прямыми DP и AQ?

3. Пусть ребро куба равно 2. Чему равен радиус сферы, проходящей через точки A, K, L, D?

Вариант 2

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K — середина ребра B_1C_1, точка L — середина ребра DD_1.

1. Вычислите угол между:

а) прямыми AK и BL;

б) прямой AK и плоскостью BC_1L;

в) плоскостями AKD_1 и BC_1L.

2. Пусть точка P находится на ребре B_1C_1, а точка Q — на ребре DD_1, $B_1P = DQ$. В каких границах лежит угол между прямыми AP и BQ?

3. Пусть ребро куба равно 2. Чему равен радиус сферы, проходящей через точки B, K, L, A?

С—9.1. <u>Отображение пространства</u>

Вариант 1

1. Отображение пространства f каждой точке $A(x, y, z)$ ставит в соответствие точку $A_1(ax, y, z)$. При этом $a > 0$.

а) Является ли f отображением пространства на себя?

б) Существует ли прямая p, такая, что $f(p) = p$?

в) Верно ли, что образом любой прямой в этом отображении является прямая?

г) Является ли f движением?

2. Отображение g каждому вектору $\vec{x}$ ставит в соответствие вектор $k\vec{x}$ $(k > 0)$.

а) Пусть три вектора образуют базис. Будут ли образовывать базис их образы при таком отображении?

б) Сохраняется ли при таком отображении угол между векторами?

Вариант 2

1. Отображение пространства f каждой точке $A(x, y, z)$ ставит в соответствие точку $A_1(x, ay, z)$. При этом $a > 0$.

а) Является ли f отображением пространства на себя?

б) Существует ли прямая p, такая, что $f(p) = p$?

в) Верно ли, что образом любой прямой в этом отображении является прямая?

г) Является ли f движением?

2. Отображение g каждому вектору $\vec{x}$ ставит в соответствие вектор $k\vec{x}\ (k < 0)$.

а) Пусть три вектора образуют базис. Будут ли образовывать базис их образы при таком отображении?

б) Сохраняется ли при таком отображении угол между векторами?

С—9.2. <u>Перенос</u>

Вариант 1

1. Точки $A(-7, 3, -2)$, $B(0, 2, 1)$, $C(4, -1, 0)$, $D(-l, 0, -3)$ являются вершинами тетраэдра. В результате переноса центроид грани ABC перешёл в центроид грани BCD.

а) Каковы координаты образа центроида самого тетраэдра?

б) В какую прямую перешла прямая AD?

в) В какую плоскость перешла плоскость BKL, где K — середина CD, L — середина CA?

2. На плоскости α находятся основания двух неравных правильных треугольных пирамид: $PABC$ и $P_1A_1B_1C_1$, точки P и P_1 лежат с одной стороны от плоскости α. При этом стороны их оснований соответственно параллельны. Можно ли провести плоскость β, параллельную плоскости α, так, чтобы сечения этих пирамид плоскостью β оказались равновелики?

Вариант 2

1. Точки $A(7, –3, 2)$, $B(0, –2, 1)$, $C(–4, 1, 0)$, $D(1, 0, 3)$ являются вершинами тетраэдра. В результате переноса центроид грани ABC перешёл в центроид грани BCD.

а) Каковы координаты образа центроида самого тетраэдра?

б) В какую прямую перешла прямая AD?

в) В какую плоскость перешла плоскость BKL, где K — середина CD, L — середина CA?

2. На плоскости α находятся основания двух неравных правильных четырёхугольных пирамид: $PABCD$ и $P_1A_1B_1C_1D_1$, точки P и P_1 лежат с одной стороны от плоскости α. При этом стороны их оснований соответственно параллельны.

Можно ли провести плоскость β, параллельную плоскости α, так, чтобы сечения этих пирамид плоскостью β оказались равновелики?

С—9.3. <u>Центральная симметрия</u>

Вариант 1

1. а) Плоскость α имеет уравнение $x + 2y – 3z + 4 = 0$. Найдите её образ в результате центральной симметрии с центром в начале координат.

б) Пусть $2x + 4y – 6z + 5 = 0$ — уравнение плоскости β. Найдите центр симметрии, в результате которой α переходит в β.

2. Две равные правильные четырёхугольные пирамиды $PABCD$ и P_1ABCD пересечены плоскостью, проходящей через прямую BD. Эта плоскость пересекает ребро PA в точке K, а ребро P_1C в точке L. Каждое ребро данных пирамид равно 1. Рассмотрим многогранник с вершинами в точках P, B, D, K, L, C. Чему равен его объём?

Вариант 2

1. а) Плоскость α имеет уравнение $3x + 4y - 2z - 1 = 0$. Найдите её образ в результате центральной симметрии с центром в начале координат.

б) Пусть $6x + 8y - 4z - 3 = 0$ — уравнение плоскости β. Найдите центр симметрии, в результате которой α переходит в β.

2. Две равные правильные четырёхугольные пирамиды $PABCD$ и P_1ABCD пересечены плоскостью, проходящей через прямую AC. Эта плоскость пересекает ребро PD в точке K, а ребро P_1B в точке L. Каждое ребро данных пирамид равно 1. Рассмотрим многогранник с вершинами в точках P, K, A, C, B, L. Чему равен его объём?

С—9.4. Зеркальная симметрия

Вариант 1

1. Рассмотрим отражение в плоскости α, уравнение которой $x + y - z - 3 = 0$.

а) Какие координаты имеет образ начала координат?

б) Каково уравнение образа оси x?

в) Каково уравнение какой-либо плоскости, которая переходит в себя?

2. Дан тетраэдр $ABCD$. В нём грани DBC и ABC перпендикулярны и являются равносторонними треугольниками со стороной, равной 1. Проводится плоскость β, перпендикулярная его высоте из вершины D, через середину этой высоты.

а) Нарисуйте образ этого тетраэдра в результате симметрии относительно β.

б) Нарисуйте пересечение исходного и полученного тетраэдров.

в) Вычислите объём этого пересечения.

Вариант 2

1. Рассмотрим отражение в плоскости α, уравнение которой $x - y + z - 6 = 0$.

а) Какие координаты имеет образ начала координат?

б) Каково уравнение образа оси x?

в) Каково уравнение какой-либо плоскости, которая переходит в себя?

2. Дан тетраэдр $ABCD$. В нём грани ABD и ABC перпендикулярны и являются равнобедренными прямоугольными треугольниками с гипотенузой AB, равной 2. Проводится плоскость β, перпендикулярная его высоте из вершины D, через середину этой высоты.

а) Нарисуйте образ этого тетраэдра в результате симметрии относительно β.

б) Нарисуйте пересечение исходного и полученного тетраэдров.

в) Вычислите объём этого пересечения.

С—9.5. <u>Осевая симметрия</u>

Вариант 1

1. Дана точка $A(2, 2, -4)$.

а) Найдите её образ в результате осевой симметрии относительно оси x.

б) Найдите её образ в результате осевой симметрии относительно прямой $y = x$; $z = 0$.

в) Найдите какую-либо ось симметрии отрезка OA (O — начало координат).

2. В цилиндре точки O и O_1 — центры оснований, AB и A_1B_1 — непараллельные диаметры этих оснований. Верно ли, что:

а) $AA_1 = BB_1$;

б) прямые AA_1 и BB_1 образуют с каждым основанием равные углы;

в) плоскости AA_1B и AB_1B образуют с каждым основанием равные углы;

г) площади треугольников AA_1B и AB_1B равны?

Вариант 2

1. Дана точка $A(-2, -2, 4)$.

а) Найдите её образ в результате осевой симметрии относительно оси x.

б) Найдите её образ в результате осевой симметрии относительно прямой $y = x$; $z = 0$.

в) Найдите какую-либо ось симметрии отрезка OA (O — начало координат).

2. В цилиндре точки O и O_1 — центры оснований, AB и A_1B_1 — непараллельные диаметры этих оснований.

Верно ли, что:

а) $AB_1 = BA_1$;

б) прямые AB_1 и BA_1 образуют с каждым основанием равные углы;

в) плоскости AA_1B_1 и BA_1B_1 образуют с каждым основанием равные углы;

г) площади треугольников AA_1B_1 и BA_1B_1 равны?

С—9.6. <u>Поворот</u>

Вариант 1

Дана правильная треугольная пирамида $PABC$ с ребром основания, равным 2, и плоским углом α при вершине P. Чему равен объём фигуры вращения, полученной в результате вращения её вокруг:

а) высоты из вершины P;

б) ребра основания;

в) бокового ребра?

Вариант 2

Дана правильная треугольная пирамида $PABC$ с боковым ребром, равным 1, и плоским углом α в боковой грани при ребре основания. Чему равен объём фигуры вращения, полученной в результате вращения её вокруг:

а) высоты из вершины P;

б) ребра основания;

в) бокового ребра?

С—9.7. <u>Симметрия фигур</u>

Вариант 1

1. Какие симметрии имеет куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого закрашены одним цветом грани $ABCD$, ABB_1A_1, AA_1D_1D?

2. Существует ли неплоская фигура, которая имеет ровно три элемента симметрии?

Вариант 2

1. Какие симметрии имеет куб $ABCDA_1B_1C_lD_l$, у которого закрашены одним цветом грани $A_1B_1C_1D_1$, A_1D_1DA, A_1ABB_1?

2. Существует ли неплоская фигура, которая имеет ровно три элемента симметрии?

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К—1 **Вариант 1**

Каждое ребро куба, равное 1, разделили на три части. Точки деления являются вершинами многогранника *M*. Грани этого многогранника — правильные восьмиугольники или правильные треугольники.

1. Проверьте справедливость теоремы Эйлера для многогранника *M*.

2. Существует ли такая точка, которая равноудалена от всех:

а) вершин *M*; б) граней *M*; в) рёбер *M*?

3. Вычислите:

а) диаметр (расстояния между наиболее удалёнными друг от друга точками) *M*;

б) угол между двумя непараллельными треугольными гранями *M*;

в) расстояние между какими-либо скрещивающимися прямыми, на которых лежат рёбра *M*, не лежащие в параллельных гранях куба.

4. В каких границах лежит площадь *S* сечения:

а) параллельного грани исходного куба;

б) перпендикулярного диагонали исходного куба?

К—1 **Вариант 2**

Каждое ребро куба, равное 1, разделили пополам. Точки деления являются вершинами многогранника *M*. Грани этого многогранника — правильные четырёхугольники или правильные треугольники.

1. Проверьте справедливость теоремы Эйлера для многогранника *M*.

2. Существует ли такая точка, которая равноудалена от всех:

а) вершин *M*; б) граней *M*; в) рёбер *M*?

3. Вычислите:

а) диаметр (расстояния между наиболее удалёнными друг от друга точками) *M*;

б) угол между двумя непараллельными треугольными гранями *M*;

в) расстояние между какими-либо скрещивающимися прямыми, на которых лежат рёбра *M*, не лежащие в параллельных гранях куба.

4. В каких границах лежит площадь *S* сечения:

а) параллельного грани исходного куба;

б) перпендикулярного диагонали исходного куба?

К—2 **Вариант 1**

Дан шар радиуса 1.

1. Какую часть от его объёма составляет наибольший объём вписанной в него правильной треугольной пирамиды?

2. В пирамиду, полученную в задании 1, вписывают шар. Каково отношение объёмов этого и исходного шаров?

3. В исходную сферу вписывают правильную треугольную пирамиду, а в неё вписывают сферу. Какой из этих вписанных шаров имеет наибольший объём? Совпадает ли он с шаром из второго задания?

К—2 **Вариант 2**

Дан шар радиуса 1.

1. Какую часть от его объёма составляет наибольший объём вписанной в него правильной четырёхугольной пирамиды?

2. В пирамиду, полученную в задании 1, вписывают шар. Каково отношение объёмов этого и исходного шаров?

3. В исходную сферу вписывают правильную четырёхугольную пирамиду, а в неё вписывают сферу. Какой из этих вписанных шаров имеет наибольший объём? Совпадает ли он с шаром из второго задания?

К—3 **Вариант 1**

В шаре с площадью поверхности S находится тело, составленное из цилиндра и конуса. Они имеют общее основание, граница которого лежит на данной сфере. Вершина конуса и окружность другого основания цилиндра лежат на данной сфере.

1. Пусть угол при вершине осевого сечения конуса равен φ.

а) Чему равна площадь поверхности этого тела?

б) Вычислите эту площадь, когда $\varphi = 120°$.

в) Вычислите эту площадь, когда $\varphi = 60°$.

2. Пусть образующая поверхности конуса равна образующей цилиндра. Чему равна площадь поверхности этого тела?

3. Может ли площадь конической поверхности этого тела равняться площади цилиндрической поверхности этого тела?

4. Может ли площадь поверхности этого тела равняться $0{,}25S$?

К—3 **Вариант 2**

В шаре с площадью поверхности S находится тело, составленное из цилиндра и двух конусов. Каждый конус имеет с цилиндром общее основание, граница которого лежит на данной сфере. Вершины конусов лежат на данной сфере.

1. Пусть угол при вершине осевого сечения каждого конуса равен φ.

а) Чему равна площадь поверхности этого тела?

б) Вычислите эту площадь, когда $\varphi = 120°$.

в) Вычислите эту площадь, когда $\varphi = 60°$.

2. Пусть образующая поверхности конуса равна образующей цилиндра. Чему равна площадь поверхности этого тела?

3. Может ли площадь цилиндрической поверхности этого тела составлять половину от площади всей поверхности этого тела?

4. Может ли площадь поверхности этого тела равняться $0{,}25S$?

К—4 **Вариант 1**

1. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — векторы базиса. Найдите вектор, перпендикулярный вектору $\vec{a}$, если:

а) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = |\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}| = |\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}| = |-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$;

б) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = |\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}| = |\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|$;

в) $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}| = |\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|$.

2. Множество M — это множество всех единичных векторов $\vec{x}$, таких, что $\vec{x}\vec{a}=1$, где $\vec{a}$ — данный вектор. Найдутся ли в M такие три вектора, которые образуют базис?

3. $ABCD$ — тетраэдр.

а) Докажите, что $BC^2 + CA^2 + AB^2 \le 4R^2 + DA^2 + DB^2 + DC^2$, где R — радиус описанной сферы.

б) Когда достигается равенство?

К—4 **Вариант 2**

1. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — векторы базиса. Найдите вектор, перпендикулярный вектору $\vec{b}$, если:

а) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = |\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}| = |\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}| = |-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$;

б) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = |\vec{b}+\vec{a}-\vec{c}| = |\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}|$;

в) $|\vec{b}+\vec{a}-\vec{c}| = |\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}|$.

2. Множество M — это множество всех единичных векторов $\vec{x}$, таких, что $\vec{x}\vec{a} = -1$, где $\vec{a}$ — данный вектор. Найдутся ли в M такие три вектора, которые образуют базис?

3. $ABCD$ — тетраэдр.

а) Докажите, что $BC^2 + CD^2 + BD^2 \le 4R^2 + AB^2 + AC^2 + AD^2$, где R — радиус описанной сферы.

б) Когда достигается равенство?

К—5 **Вариант 1**

Даны точки $A(7, 6, 6)$, $B(3, 0, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $D(1, 0, 2)$.

1. Найдите угол между:

а) прямыми AB и CD;

б) плоскостями ABC и ABD;

в) прямой AB и плоскостью BCD.

2. а) Является ли тетраэдр $ABCD$ правильной пирамидой?

б) Лежит ли начало координат в этом тетраэдре?

3. Найдите:

а) проекцию точки A на плоскость BCD;

б) объём этого тетраэдра;

в) центр масс;

г) радиус описанной сферы.

К—5 **Вариант 2**

Даны точки $A(6, 7, 6)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, 3, 0)$, $D(0, 1, 2)$.

1. Найдите угол между:

а) прямыми AB и CD;

б) плоскостями ABC и ABD;

в) прямой AB и плоскостью BCD.

2. а) Является ли тетраэдр $ABCD$ правильной пирамидой?

б) Лежит ли начало координат в этом тетраэдре?

3. Найдите:

а) проекцию точки A на плоскость BCD;

б) объём этого тетраэдра;

в) центр масс;

г) радиус описанной сферы.

К—6 **Вариант 1**

1. Какие элементы симметрии имеет многогранник, составленный из двух равных прямых треугольных призм, имеющих общую боковую грань?

2. Правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром 1 повернули на $90°$ вокруг отрезка, перпендикулярного скрещивающимся рёбрам AB и CD.

а) Нарисуйте пересечение и объединение исходного и полученного многогранников.

б) Вычислите их объёмы.

3. Плоскости α, β и γ попарно перпендикулярны. Каким движением является композиция трёх зеркальных отражений относительно этих плоскостей?

К—6 **Вариант 2**

1. Какие элементы симметрии имеет многогранник, составленный из двух равных прямых четырёхугольных призм, имеющих общую боковую грань?

2. Правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром 1 повернули на $90°$ вокруг отрезка, перпендикулярного скрещивающимся рёбрам BC и AD.

а) Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного многогранников.

б) Вычислите их объёмы.

3. Прямые a, b и c попарно перпендикулярны и имеют общую точку. Каким движением является композиция трёх осевых симметрий относительно этих прямых?

СОДЕРЖАНИЕ

С—7.6. Площадь поверхности цилиндра

С—7.7. Площадь поверхности конуса

С—8.1. Линейные операции с векторами

С—8.2. Определение скалярного умножения

С—8.3. Базис пространства

С—8.4. Разложение вектора на составляющие по базису

С—8.5. Координаты вектора

С—8.6. Скалярное произведение в координатах

С—8.7. Радиус-вектор

С—8.8. Векторный метод (аффинные задачи)

С—8.9. Векторный метод (метрические задачи)

С—8.10. Система координат. Координаты точки

С—8.11. Деление отрезка в заданном отношении

С—8.12. Формула расстояния между точками

С—8.13. Уравнение сферы

С—8.14. Уравнение плоскости

С—8.15. Уравнение прямой

С—8.16. Уравнение фигур

С—8.17. Расстояние между фигурами

С—8.18. Вычисление углов

С—8.19. Метод координат

С—9.1. Отображение пространства

С—9.2. Перенос

С—9.3. Центральная симметрия

С—9.4. Зеркальная симметрия

С—9.5. Осевая симметрия

С—9.6. Поворот

С—9.7. Симметрия фигур

Контрольные работы

К—1

К—2

К—3

К—4

К—5

К—6

У ч е б н о е   и з д а н и е

Рыжик Валерий Идельевич

ГЕОМЕТРИЯ

Дидактические материалы

11 класс

Пособие для общеобразовательных организаций

Углублённый уровень

Центр естественно-математического образования

Редакция математики и информатики

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*

Редакторы *Н. Б. Грызлова*, *И. В. Рекман*

Младший редактор *Е. А. Андреенкова*

Художник *О. Г. Иванова*

Художественный редактор *О. П. Богомолова*

Корректоры