В.И.Рыжик

ОБ УГЛАХ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ И НЕМНОГО О ПРОЧИХ УГЛАХ

Обычно перед экзаменами повторяют пройденное. Я предлагаю вспомнить вроде бы несложное понятие угла между скрещивающимися прямыми. Это понятие важно не столько само по себе, сколько потому, что с его помощью можно решать многочисленные задачи стереометрии об углах: между прямой и плоскостью; двугранных; между двумя плоскостями. Более того, умея находить угол между скрещивающимися прямыми разными способами, вы можете существенно облегчить себе решение таких задач. А заодно вспомните многие разделы геометрии.

Я с детства не любил овал!
Я с детства угол рисовал!
П.Коган

В тексте не раз будет встречаться вопросительный знак в квадратных скобках — **[?]**. В таком месте вам надо бы остановиться и подумать, как получить результат, записанный перед этим знаком.

К предложенным задачам я не даю ответа. Понятно, почему. На экзамене у вас не будет возможности заглянуть в ответ, а потому надо научиться проверять его. Лучшая проверка — решение задачи разными способами. И только при совпадении найденных ответов можно надеяться, что полученные результаты верны.

Пара мелких замечаний. Геометрические объекты (точки, прямые, плоскости), обозначенные по-разному, считаются не совпадающими. Проекция некоторой фигуры почти всегда понимается как ортогональная, прочие случаи оговариваются в тексте.

Задачи, рядом с номером которых указана буква А (1А, 2А и т.д.), я предлагаю решить устно.

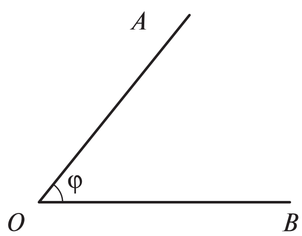
Угол как геометрическая фигура

И какие только углы не встречались вам в школьном курсе геометрии! Попробую перечислить.

Угол бывает плоским и неплоским. Сначала — о плоских углах, которые трактуют по-разному.

А) Угол — это пара лучей с общим началом (рис. 1).

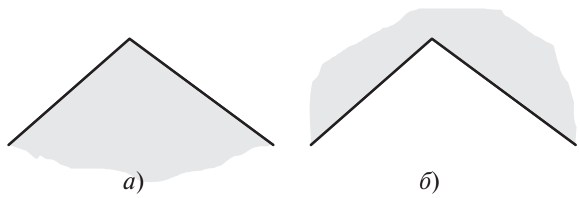
Б) Угол — это часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом. Такой угол неоднозначен (ибо плоскость разбивается на две части). Различают выпуклый (рис. 2, *а*) и невыпуклый угол (рис. 2, *б*).



$\varphi = \angle AOB = \angle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA}$ — обозначение луча OA или оси OA

Рис. 1



а) *б*)

Рис. 2

Обычно работают с выпуклым углом, но и невыпуклый встречается (например, в невыпуклом многоугольнике). Как сказал один мой ученик (из мелких), «выпуклый многоугольник — это такой многоугольник, у которого все углы торчат наружу». Довольно образно. Продолжая этот образ, скажу, что у невыпуклого многоугольника найдется угол, «торчащий внутрь».

Второе толкование угла полезно тем, что позволяет употреблять обороты вроде «точка внутри угла» (рис. 3), бессмысленные при первом толковании. Да и понятие биссектрисы угла (которая делит угол пополам) лучше понимается, если сам угол рассматривается как часть плоскости.

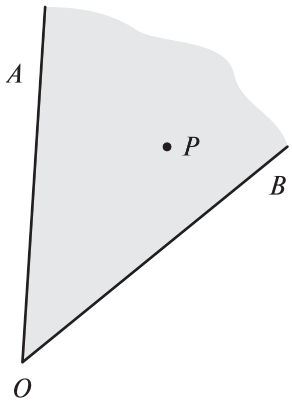


Рис. 3

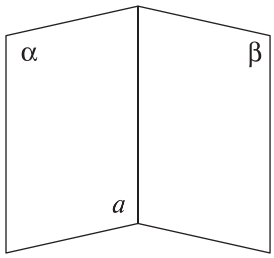
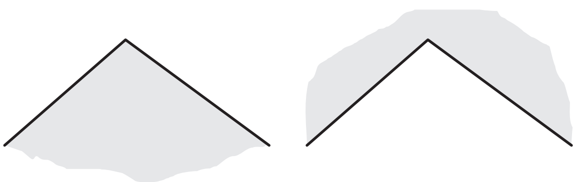


Рис. 4

В пространстве ситуация почти аналогична. Есть три трактовки угла.

А) Угол (двугранный) — это пара полуплоскостей с общей прямой, которая является границей каждой из полуплоскостей; общая прямая называется ребром двугранного угла (рис. 4).

Б) Угол — это часть пространства, ограниченная двумя полуплоскостями с общим ребром. Как и плоский угол, такой угол неоднозначен, различают выпуклый и невыпуклый двугранный угол (рис. 5).



Вид вдоль ребра

а) *б*)

Рис. 5

Обычно работают с выпуклым углом, но и невыпуклый встречается (например, в невыпуклом многограннике).

В) В определении правильного многогранника можно встретиться с понятием многогранного угла (рис. 6). «Правильный многогранник — это многогранник, все грани которого суть одинаковые правильные многоугольники и все многогранные углы при вершинах равны между собой», — говорится в «Математическом энциклопедическом словаре». Как понимать равенство многогранных углов? Как существование движения, которое один из этих углов переводит в другой.

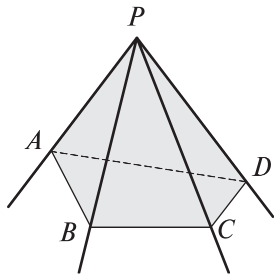


Рис. 6

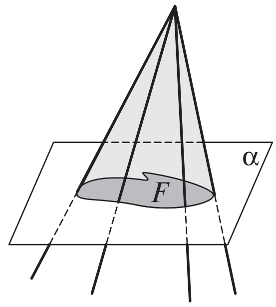
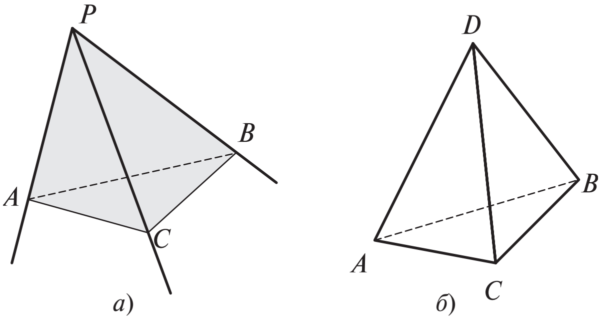


Рис. 7

Многогранный угол также имеет две трактовки. Первая: это поверхность, определенная совокупность плоских углов. Вторая: это часть пространства, ограниченная указанной поверхностью. Опять же, таких частей две — выпуклая и невыпуклая (их легче представить, чем наглядно изобразить на бумаге).

Многогранный угол можно понимать и как бесконечный конус, если исходить из общего толкования конуса. Возьмем на плоскости некоторую фигуру F, а вне плоскости — точку P. Проведя из точки P всевозможные лучи, пересекающие фигуру F, получим бесконечный конус (рис. 7). Такой конус называют телесным углом. В зависимости от вида фигуры F получим бесконечные конусы разных видов, в том числе и многогранный угол. Бесконечный конус вращения — пространственный аналог плоского угла: он получается при вращении одной из сторон плоского угла вокруг другой.

На практике чаще всего приходится иметь дело с трехгранным углом (рис. 8, *а*). В тетраэдре $ABCD$ таких углов четыре (по числу вершин). Например, один из них имеет вершину в точке A, а его ребрами служат лучи AB, AC, AD (рис. 8, *б*).



а) *б*)

Рис. 8

Угол как величина

На суше, на воде и в воздухе существуют разные направления. Витязя на распутье помните (рис. 9)?

Рис. 9

Рис. 10

Как-то надо измерять отклонение одного направления от другого. Например, знаменитая Пизанская башня отклонилась от вертикали (рис. 10), и если это отклонение превысит допустимое, то... Угол и работает как мера отклонения, т.е. как величина. Можно сказать также, что угол — мера множества лучей, выходящих из одной точки, мера всевозможных направлений.

Из-за двойного толкования угла (угол — фигура, угол — величина) иной раз происходят «ляпы». Иногда говорят «величина угла» и получается «величина величины». Так происходит, например, когда говорят о «величине угла между векторами», ведь угол между векторами — не фигура, а величина. Можно просто сказать: «угол между векторами».

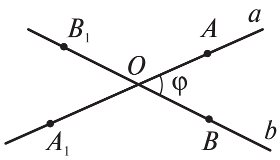
Однако надо понимать контекст. Фраза «В треугольнике три угла» предполагает толкование угла как фигуры, а фраза «Угол равен 30°» — как величины. Запись «$\angle A = 30^\circ$» говорит нам об угле — величине, а запись «$\angle A = \angle B$» может трактоваться в обоих смыслах — и как равенство фигур, и как равенство величин (на этот случай есть доказательство, весьма далекое от школьного курса).

Как величина угол определяется в разных ситуациях и, соответственно, по-разному фиксируются его границы. Вспомните:

1. *Угол* (выпуклый) *между двумя лучами с общим началом* (см. рис. 2, *а*) лежит в границах от 0 до π.

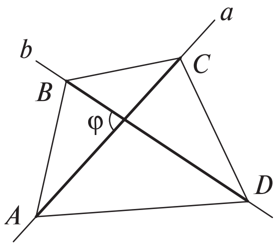
2. *Угол между двумя прямыми* (рис. 11) лежит в границах от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$.

3. *Угол между двумя отрезками* (например, диагоналями четырехугольника, рис. 12), лежит в границах от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$.



$\varphi = \angle ab = \angle AOB$

Рис. 11

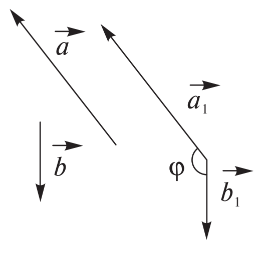


$\varphi = \angle AC, BD = \angle ab,$ если $\varphi \le 90^\circ$

Рис. 12

4. *Угол между двумя ненулевыми векторами* (рис. 13) лежит в границах от 0 до π.

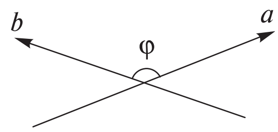
5. *Угол между двумя осями* (рис. 14) лежит в границах от 0 до π.



$\varphi = \angle \vec{a}\,\vec{b} = \angle \vec{a}_1\,\vec{b}_1$

$\vec{a}_1 = \vec{a},\ \vec{b}_1 = \vec{b}$

Рис. 13

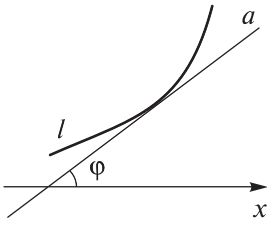


$\varphi = \angle \underrightarrow{a}\ \underrightarrow{b}$

Рис. 14

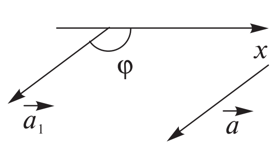
6. *Угол между прямой и осью* (например, касательной к графику функции и осью x, рис. 15) лежит в границах от 0 до π.

7. *Угол между ненулевым вектором и осью* (рис. 16) лежит в границах от 0 до π.



$\varphi = \angle \, a \, \underrightarrow{x}$

Рис. 15



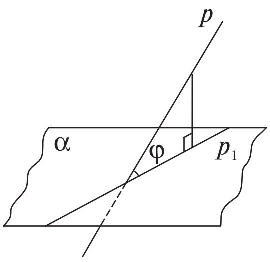
$\varphi = \angle \vec{a}\,\vec{x} = \angle \vec{a}_1 \vec{x}$

$\vec{a}_1 = \vec{a}$

Рис. 16

8. *Двугранный угол* (см. рис. 4) лежит в границах от 0 до π.

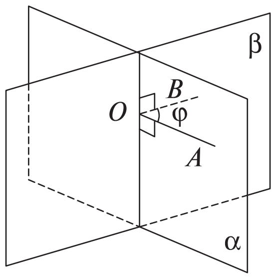
9. *Угол между прямой и плоскостью* (рис. 17) лежит в границах от 0 до $\frac{\pi}{2}$.



$\varphi = \angle p\,\alpha = \angle p\,p_1$

(p_1— проекция p на α)

Рис. 17



$\varphi = \angle \alpha\,\beta = \angle AOB$

Рис. 18

10. *Угол между двумя плоскостями* (рис. 18) лежит в границах от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

11. *Многогранный угол* тоже можно измерять; за единицу измерения принят *стерадиан* (телесный радиан).

Процесс похож на измерение угла между лучами на плоскости. Если рассмотреть единичную сферу с центром в вершине многогранного угла, то последний вырежет на сфере некую ее часть (рис. 19). (На плоскости рассматривают единичную окружность и центральный угол.) Угол, вырезающий на сфере часть площадью, равной 1, принимают за 1 стерадиан. (На плоскости за радиан принимают угол, соответствующий дуге единичной окружности.)

Стерадианная мера многогранного угла[1] лежит в границах от 0 до 4π.

[1] Она используется в физике. Если сфера имеет произвольный радиус, то стерадианная мера многогранного угла равна отношению площади части, вырезанной углом на сфере, к квадрату радиуса сферы. На плоскости радианная мера угла равна отношению длины дуги окружности произвольного радиуса к самому радиусу.

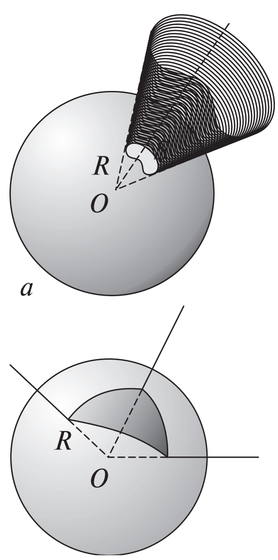
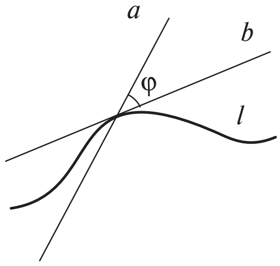


Рис. 19

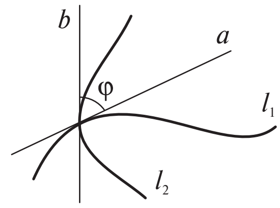
12. *Угол между пересекающимися прямой и кривой*, расположенными в одной плоскости (это угол между прямой и касательной к данной кривой в общей точке, рис. 20), лежит в границах от 0 до $\frac{\pi}{2}$.



$\varphi = \angle al = \angle ab$

b — касательная к кривой l

Рис. 20



$\varphi = \angle a\,b = \angle l_1\,l_2$

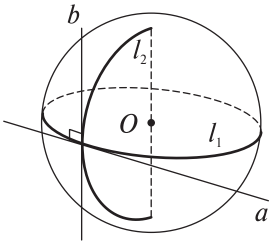
a — касательная к кривой l_1

b — касательная к кривой l_2

Рис. 21

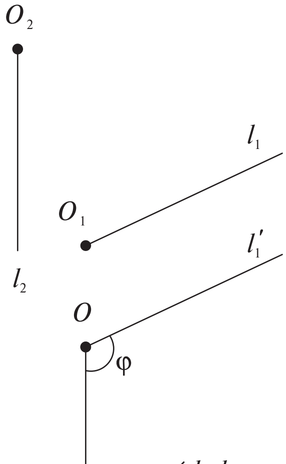
13. *Угол между двумя пересекающимися кривыми* (это угол между касательными к кривым в их общей точке, рис. 21) лежит в границах от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Пример — угол между двумя пересекающимися окружностями, причем они могут не лежать в одной плоскости. Так, меридиан и экватор на сфере пересекаются под углом 90° (рис. 22).



$\angle\, l_1\, l_2 = \angle\, a\, b = 90^\circ$

Рис. 22

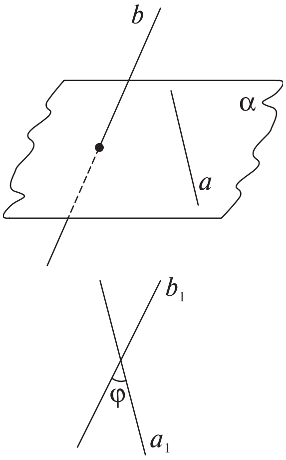


$\varphi = \angle\, \overrightarrow{l_1}\, \overrightarrow{l_2} = \angle\, \overrightarrow{l_1'}\, \overrightarrow{l_2'}$

Рис. 23

14. *Угол между двумя лучами, не имеющими общего начала* (рис. 23), лежит в границах от 0 до π.

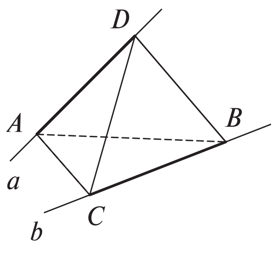
15. *Угол между двумя скрещивающимися прямыми* (рис. 24) лежит в границах от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$.



$\varphi = \angle\, a\, b = \angle\, a_1\, b_1$

$a_1 \parallel a,\ b_1 \parallel b$

Рис. 24

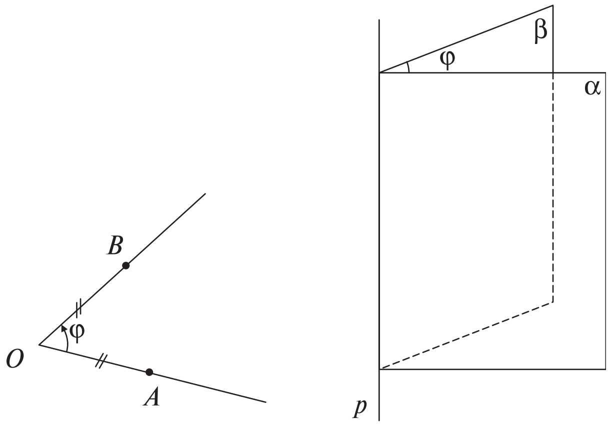


$\angle\, AD,\, BC = \angle\, a\, b$

Рис. 25

16. *Угол между двумя отрезками, лежащими на скрещивающихся прямых* (например, противоположными ребрами тетраэдра, рис. 25), лежит в границах от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$.

17. *Угол поворота* лежит в границах от 0 до π. Поворот — частный вид движения; рассматривают поворот на плоскости вокруг точки (рис. 26, *а*) и поворот в пространстве вокруг прямой (рис. 26, *б*).



$\varphi = \angle\, \overrightarrow{OA},\, \overrightarrow{OB}$ $\qquad$ $\varphi = \angle\, \alpha\, \beta$

а) $\qquad$ *б*)

Рис. 26

Для включения крайних границ указанных промежутков (0 и π) в иных случаях нет однозначных договоренностей — как договоримся, так и будет. Например, стоит ли включать угол, равный π, как меру развернутого двугранного угла?

Углы вне геометрии

Наверняка можно говорить о каких-то еще углах. Вот пример. Луч света падает на неплоскую поверхность (рис. 27). Интуитивно ясно, что и тут есть «угол падения», который к тому же равен «углу отражения»: и тот, и другой определяется как угол между направлением светового луча и нормалью к поверхности[2].

Лунная дорожка в море
Рис. 27

[2] О нормали к произвольной поверхности в школьном курсе геометрии не говорится — незачем. В частных случаях нормаль можно определить. Например, нормалью к сфере является прямая, содержащая ее диаметр.

Значения угла, большие 360°, а также отрицательные в геометрии встречаются редко. Больше 360° может быть сумма углов многоугольника или плоских углов граней многогранника. Углы, большие 360°, как и принимающие отрицательные значения, описывают вращение точки на плоскости, что существенно для тригонометрических функций.

Тут нам, геометрам, «повезло» — измерение таких углов и действия с ними обосновать непросто. Впрочем, и в геометрии иногда говорят об углах «со знаком», как, например, в задаче о нахождении суммы углов замкнутой самопересекающейся ломаной, пусть для простоты — четырехзвенной. Тут есть о чем поразмыслить **[?]**.

К углам, встречающимся в геометрии, добавляются (терминологически) углы, используюшиеся на практике. Вы, конечно, знаете про азимут, широту и долготу — из географии; склонение и прямое восхождение — из астрономии; угол падения, угол отражения и угол отклонения — из оптики. Угол наклона и угол подъема встречаются в технике; угол откоса — в земляных работах; курсовой угол, курс, румб, пеленг, магнитное склонение — в навигации; угловая частота и фазовый угол — в электротехнике; угол возвышения и угол прицеливания — в артиллерии... Список можно продолжать и дальше. Кроме того, вы, возможно, делали «угол», занимаясь гимнастикой.

Термин «угол» нашел отражение в термине «многоугольник» (хотя фигуру мог ли бы назвать «многовершинником» или «многосторонником»).

А как пройти мимо использования слова «угол» в быту и в языке? Достаточно вспомнить такие обороты речи и выражения, как «райский уголок», «угловой удар», «встань в угол», «встретимся на углу», «не красна изба углами...», «он весь какой-то угловатый». В Петербурге есть место, называемое «Пять углов». Наконец, в стихах: «Вновь я посетил тот уголок Земли...» Наверняка вы найдете и другие примеры.

Углы в теории

В курсе геометрии есть несколько теорем, связанных с углами.

1. Теорема о смежных углах.
2. Теорема о вертикальных углах.
3. Теорема о сумме углов треугольника.
4. Теорема о сумме углов многоугольника.
5. Теорема об углах с соответственно параллельными (перпендикулярными) сторонами.
6. Теоремы об углах, полученных при пересечении параллельных прямых секущей.
7. Признаки равенства треугольников.
8. Признаки подобия треугольников.
9. Теорема косинуса.
10. Теорема синусов.
11. Теоремы об углах, связанных с окружностью.

Вы помните все эти теоремы?

12. Теорема косинусов для трехгранного угла.

В трехгранном угле $PABC$ с вершиной P и ребрами PA, PB, PC выполняется равенство:

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}. \qquad (1)$$

13. Теорема синусов для трехгранного угла.

В трехгранном угле $PABC$ с вершиной P и ребрами PA, PB, PC выполняется равенство:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \qquad (2)$$

В формулах (1) и (2) латинскими буквами обозначены двугранные углы трехгранного угла: A — угол с ребром PA, B — с ребром PB. Греческими буквами обозначены противолежащие им плоские углы: α — углу A, β – B, γ – C (рис. 28).

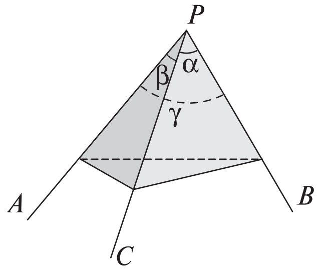


Рис. 28

Как я иногда говорю своим ученикам, последние две теоремы, особенно теорема косинусов, — секретное оружие абитуриента. Зная их, вы можете намного легче решить многие задачи из сборников для поступающих в вузы. Почему же секретное? Дело в том, что в стандартном курсе геометрии изучение этих теорем не предусмотрено.

Чаще всего в теоремах угол понимается как величина, но есть и такие, в которых речь идет об угле как о фигуре. Например, для существования трехгранного угла необходимо и достаточно, чтобы наибольший плоский угол был меньше суммы двух других его углов. Очень похоже на неравенство треугольника[3], не правда ли?

[3] Для тех, кто знаком со сферической геометрией: трехгранный угол с вершиной в центре сферы высекает на последней сферический треугольник. Его стороны — дуги больших окружностей сферы. Для них, как и для отрезков на плоскости, выполняется неравенство треугольника.

Не сомневаюсь, вы вспомните и другие утверждения, касающиеся углов. А если учесть, что и перпендикулярность увязана с углом (как с фигурой, так и с величиной), число теорем резко увеличится, не так ли?

Переходим к практике

В задачах школьного курса и в задачах из сборников для абитуриентов почти всегда требуется найти угол как величину. Если говорить о задачах по стереометрии, то нахождение угла (между прямой и плоскостью; двугранного; между плоскостями) можно свести к вычислению угла между скрещивающимися прямыми. О нем и поговорим далее.

Основные методы решения задач я буду демонстрировать, используя куб. Размеры его, как правило, не имеют значения, ибо угол, понимаемый как величина, не зависит от длины ребра куба (все кубы подобны, а подобие сохраняет величину угла). Иногда я буду считать ребро равным 1 (куб с таким ребром назовем единичным), иногда — ради удобства — равным 2.

Договоримся об обозначениях. Куб я буду обозначать так — $ABCDA_1B_1C_1D_1$, центр куба — I (рис. 29).

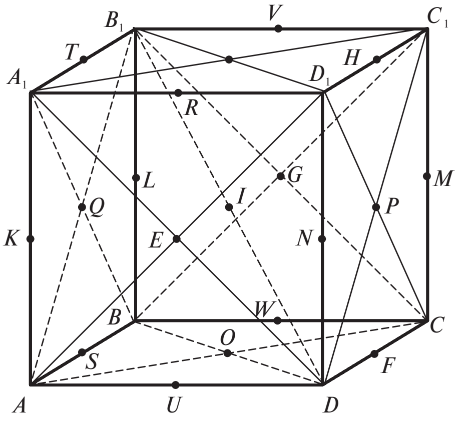


Рис. 29

Центры граней: $ABCD$ — точка O, $A_1B_1C_1D_1$ — O_1, AA_1B_1B — Q, AA_1D_1D — E, CC_1D_1D — P, BB_1C_1C — G.

Середины ребер: AA_1 — точка K, BB_1 — L, CC_1 — M, DD_1 — N, AD — U, AB — S, CD — F, A_1D_1 — R, B_1C_1 — V, C_1D_1 — H, A_1B_1 — T, BC — W.

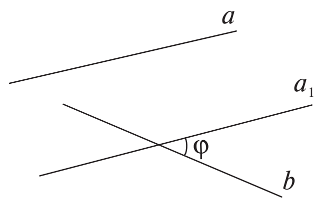
Для других фигур обозначения будут введены в самой задаче.

Задачи на установление перпендикулярности скрещивающихся прямых

Для начала разберемся с взаимной перпендикулярностью скрещивающихся прямых. Как ее установить? Для этого есть несколько способов. Сразу подчеркну, что для примеров я выберу наиболее простые (или известные) ситуации, ибо методы важнее результатов.

Первый способ — *способ параллельного переноса* основан на определении угла между скрещивающимися прямыми и встречается в двух вариантах.

А) Если мы перенесем одну из скрещивающихся прямых параллельно самой себе до пересечения с другой из данных прямых, то получим плоский угол между пересекающимися прямыми (рис. 30), который затем и вычислим.



$Q_1 \| Q_2$

$\varphi = \angle a\, b = \angle a_1\, b$

Рис. 30

Задача 1. Перпендикулярны ли прямые AB_1 и CD_1 (рис. 31)?

Решение. Совершим параллельный перенос диагонали AB_1 до грани CDD_1C_1, получим диагональ DC_1 (см. рис. 31). Диагонали DC_1 и CD_1 перпендикулярны, значит, перпендикулярны и исходные диагонали.

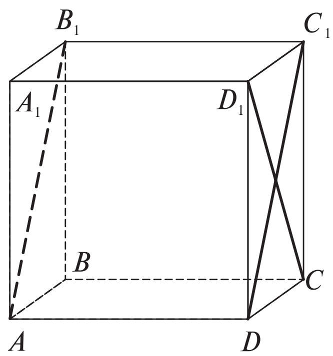


Рис. 31

Решите данным способом задачу 1А.

Задача 1А. Перпендикулярны ли прямые DA_1 и BC_1 (рис. 32)?

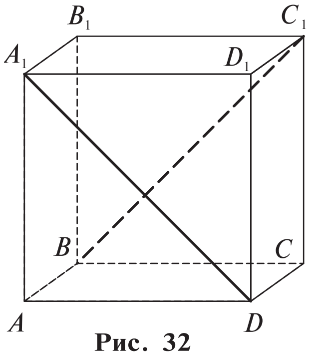


Рис. 32

Этим же способом (с некоторыми дополнительными соображениями) решается следующая задача.

Задача 2. Перпендикулярны прямые DA_1 и CD_1 (рис. 33)?

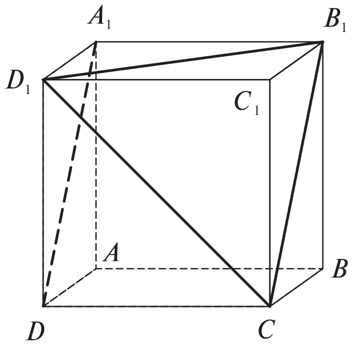


Рис. 33

Р е ш е н и е. Совершим параллельный перенос диагонали DA_1 до грани CBB_1C_1, получим диагональ CB_1. Проведя диагональ B_1D_1, получим равносторонний треугольник B_1CD_1 (см. рис. 33). Значит, исходные диагонали образуют угол 60°.

Решите описанным способом задачу 2А.

Задача 2А. Перпендикулярны ли прямые CD_1 и BC_1 (рис. 34)?

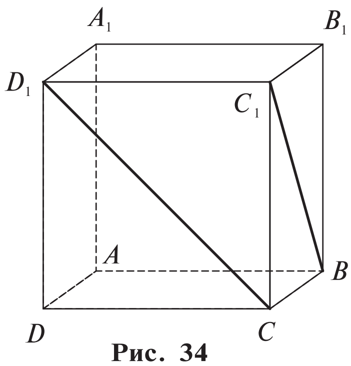


Рис. 34

Б) Воспользовавшись определением для угла между скрещивающимися прямыми, через фиксированную точку проведем прямые, соответственно параллельные данным скрещивающимся прямым. Получим плоский угол между пересекающимися прямыми, который затем и вычислим.

Проиллюстрирую этот способ на примере решения задачи 1. Рассмотрим сечение $RVWU$ куба (рис. 35). Оно является квадратом **[?]**, в котором диагонали UV и RW параллельны диагоналям AB_1 и CD_1 граней куба соответственно. Отсюда ясно, что прямые AB_1 и CD_1 перпендикулярны.

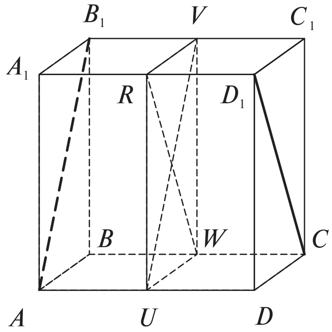
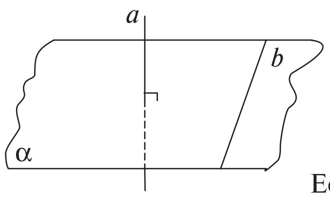


Рис. 35

Решите таким же способом задачу 1А.

Второй способ опирается на *перпендикулярность прямой и плоскости*. Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой этой плоскости (рис. 36).



Если $a \perp \alpha$, $b \subset \alpha$, то $a \perp b$

Рис. 36

Задача 3. Перпендикулярны ли прямые DB_1 и AD_1 (рис. 37)?

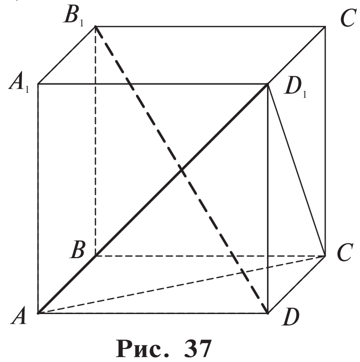


Рис. 37

Р е ш е н и е. Прямая AD_1 лежит в плоскости ACD_1, перпендикулярной прямой DB_1 **[?]** (см. рис. 37). Следовательно, диагональ DB_1 куба перпендикулярна диагонали AD_1 его грани (а заодно — диагоналям AC и CD_1).

Решите этим же способом задачу 3А.

Задача 3А. Перпендикулярны ли прямые CA_1 и DC_1 (рис. 38)?

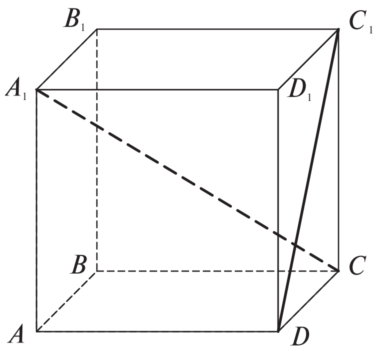
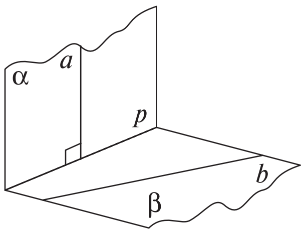


Рис. 38

Третий способ опирается на *перпендикулярность двух плоскостей*. Если плоскости α и β пересекаются по прямой p и взаимно перпендикулярны, прямые a и b лежит в α и β соответственно и a перпендикулярна p, то прямые a и b взаимно перпендикулярны (рис. 39).



Если $\alpha \perp \beta$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a \perp p$, то $a \perp b$

Рис. 39

Проиллюстрирую этот способ на примере решения следующей задачи.

Задача 4. Перпендикулярны ли прямые KM и BO_1 (рис. 40)?

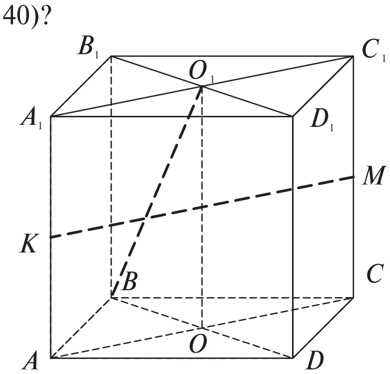


Рис. 40

Р е ш е н и е. Плоскости AA_1C_1 и BB_1D_1 взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой OO_1, прямая KM лежит в плоскости AA_1C_1 и перпендикулярна OO_1 (см. рис. 40), тогда KM перпендикулярна прямой BO_1, лежащей в плоскости BB_1D_1.

Решите описанным способом задачу 4А.

Задача 4А. Перпендикулярны ли прямые LN и AO_1 (рис. 41)?

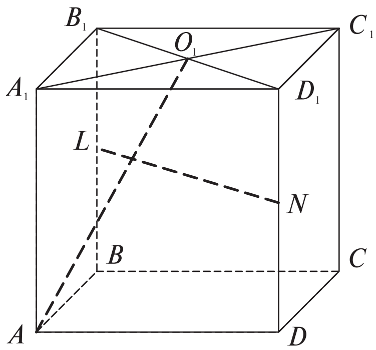
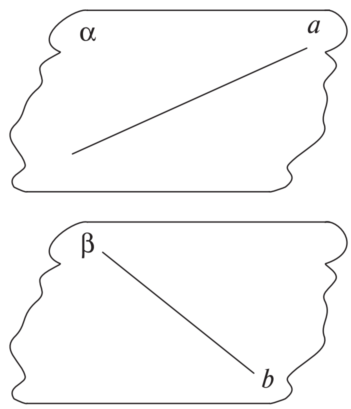


Рис. 41

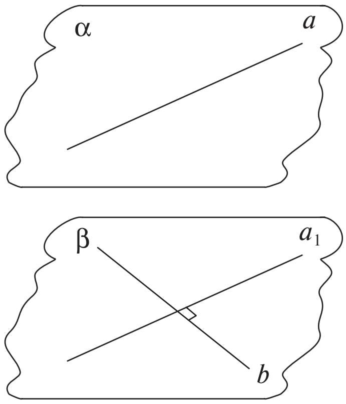
Четвертый способ опирается на *параллельность прямой и плоскости*. Известно, что существует одна пара параллельных плоскостей (обозначим их α и β), в которых лежат две скрещивающиеся прямые (a и b соответственно), при этом каждая из прямых параллельна другой плоскости (рис. 42).



$\alpha \parallel \beta$, a $\subset \alpha$, $\beta \subset \beta$

Рис. 42

Если при этом прямая b перпендикулярна проекции (не обязательно ортогональной) прямой a на плоскость β (назовем проекцию — a_1), то прямые a и b взаимно перпендикулярны (рис. 43). Верно и обратное **[?]**.



Если $\alpha \parallel \beta$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$,
a_1 — проекция a на β,
$b \perp a_1$, то $a \perp b$

Рис. 43

Задача 5. Перпендикулярны ли прямые KB_1 и RH (рис. 44)?

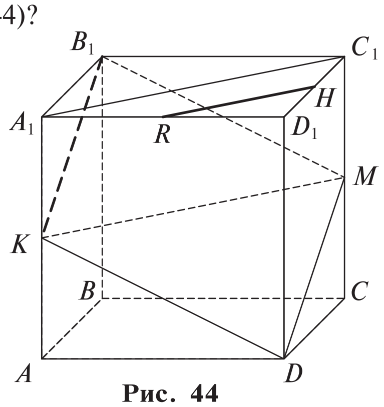


Рис. 44

Р е ш е н и е. Несложно убедиться в том, что прямая RH параллельна плоскости KB_1M, которая содержит прямую KB_1 и пересекает ребро CC_1 в его середине — точке M (см. рис. 44). Сечение куба этой плоскостью (четырехугольник KB_1MD) является ромбом **[?]**. Так как прямая RH параллельна прямой A_1C_1 и A_1C_1 параллельна прямой KM, прямые RH и KM параллельны. Таким образом, KM —параллельная проекция RH на плоскость KB_1M. А так как прямые KM и KB_1 не перпендикулярны, то не будут перпендикулярны и прямые RH и KB_1.

Можно было решить задачу иначе: сразу провести прямую KM, затем доказать, что она параллельна прямой RH и рассмотреть треугольник KB_1M [?].

Решите данным способом задачу 5А.

Задача 5А. Перпендикулярны ли прямые NA_1 и HV (рис. 45)?

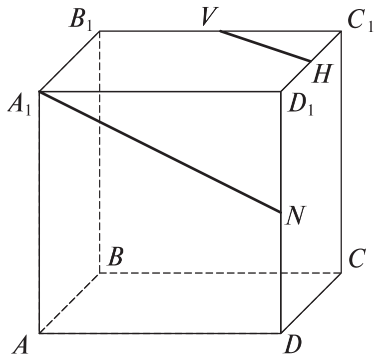


Рис. 45

Пятый способ — использование *теоремы о трех перпендикулярах*. Одна из ее формулировок такая: прямая на плоскости перпендикулярна наклонной к этой плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость.

Проиллюстрирую данный способ на примере решения такой задачи.

Задача 6. Перпендикулярны ли прямые DO_1 и ME (рис. 46)?

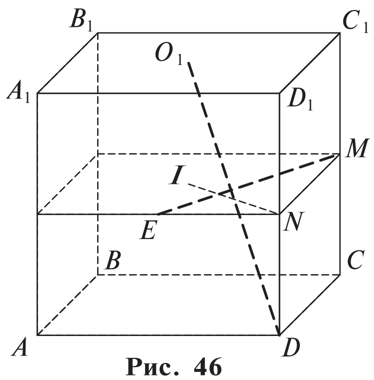


Рис. 46

Р е ш е н и е. Проведем сечение куба плоскостью, проходящей через точку M параллельно основанию $ABCD$ (см. рис. 46). Оно равно основанию **[?]**, а потому является квадратом. Прямая EM лежит в плоскости сечения **[?]**, проекцией наклонной DO_1 на эту плоскость будет прямой NI. Отрезки ME и NI не перпендикулярны **[?]**, поэтому не будут перпендикулярны и прямые DO_1 и ME.

Решите тем же способом задачу 6А.

Задача 6А. Перпендикулярны ли прямые DQ и LP (рис. 47)?

Шестой способ — *проектирование двух точек одной прямой на другую прямую*. На одной из данных прямых берем две произвольные точки и проектируем их на другую прямую. Данные прямые взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда проекции точек совпадают (рис. 48).

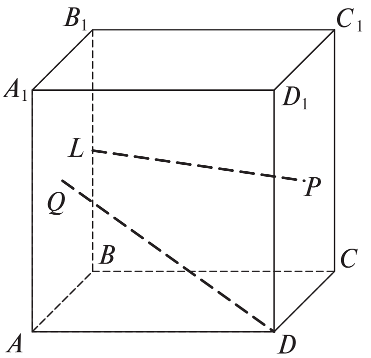
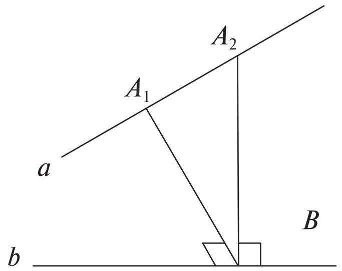


Рис. 47



Если точка B — проекция A_1 и A_2 на прямую b, то $a \perp b$

Рис. 48

Задача 7. Перпендикулярны ли прямые B_1D и A_1O (рис. 49)?

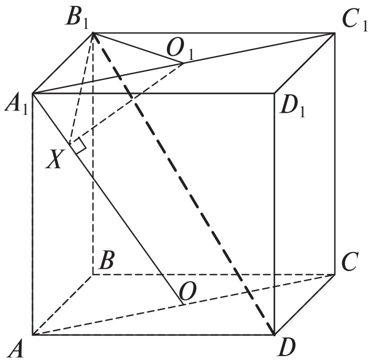


Рис. 49

Р е ш е н и е. Спроектируем две точки прямой B_1D на прямую A_1O. Для простоты возьмем точки B_1 и D. Проекцией D будет точка O **[?]** (см. рис. 49). Проекцию B_1 найдем в два приема. Сначала спроектируем точку B_1 на плоскость AA_1C_1 (в ней лежит прямая A_1O); проекцией будет точка O_1 **[?]**. Затем O_1 спроектируем в плоскости AA_1C_1 на прямую A_1O; проекцией будет какая-то точка X, лежащая внутри отрезка A_1O. Согласно теореме о трех перпендикулярах (в слегка измененной формулировке) точка X и будет проекцией точки B_1 на прямую A_1O.

Мы видим, что проекции точек B_1 и D на прямую A_1O не совпадают, следовательно, прямые B_1D и A_1O не перпендикулярны.

Решите таким же способом задачу 7А.

Задача 7А. Перпендикулярны ли прямые D_1B и AO_1 (рис. 50)?

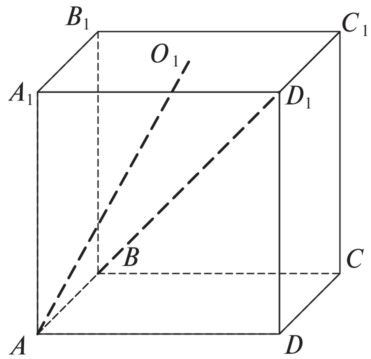


Рис. 50

Седьмой способ — *векторный*. В нем используется скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а именно формула

$$\cos\angle\vec{a}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \qquad (3)$$

Из нее ясно, что перпендикулярность векторов, и соответственно содержащих их прямых, равносильна равенству нулю скалярного произведения: $\vec{a}\vec{b} = 0.$ В противном случае прямые не перпендикулярны.

Отсюда — идея решения: для проверки перпендикулярности прямых ввести в рассмотрение лежащие на них векторы (такие векторы называются направляющими), а затем найти их скалярное произведение и сравнить с нулем. Эту идею можно реализовать в двух вариантах — без координат и с ними. Напомню, что в декартовой системе координат скалярное произведение векторов $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \qquad (4)$$

Задача 8. Перпендикулярны ли прямые A_1O и DG (рис. 51)?

Р е ш е н и е. Разберемся сначала с первым вариантом решения. Выберем три попарно перпендикулярных вектора (такую тройку векторов называют ортогональным базисом пространства), за-данных вершинами куба. Пусть это будут векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA_1}$ (см. рис. 51).

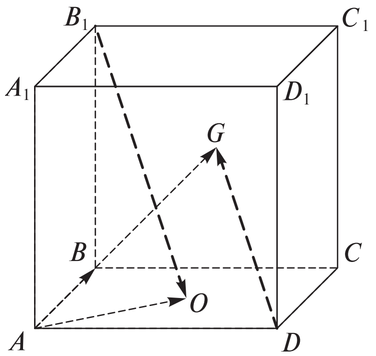


Рис. 51

Запишем вектор $\overrightarrow{A_1O}$ как разность векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{AA_1}$. Выразим $\overrightarrow{AO}$ через векторы базиса. В результате для вектора $\overrightarrow{A_1O}$ получим такое равенство **[?]**:

$$\overrightarrow{A_1O} = 0{,}5\overrightarrow{AD} + 0{,}5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}.$$

Найдем аналогичное выражение для вектора $\overrightarrow{DG}$. Представим его вначале в виде разности векторов $\overrightarrow{AG}$ и $\overrightarrow{AD}$. Затем выразим $\overrightarrow{AG}$ через векторы базиса. В итоге получим следующее равенство **[?]**:

$$\overrightarrow{DG} = -0{,}5\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + 0{,}5\overrightarrow{AA_1}.$$

Найдя скалярное произведение векторов $\overrightarrow{A_1O}$ и $\overrightarrow{DG}$, увидим, что оно не равно нулю. Значит, прямые A_1O и DG не являются перпендикулярными.

Следует учесть, что это доказательство для векторов пространства (как и другие с такой же техникой) предполагает знание свойства дистрибутивности скалярного произведения именно для векторов пространства (не плоскости), а для пространства оно доказывается (в школьном курсе) иначе, чем для векторов плоскости. Напомню это свойство: для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ верно равенство

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}. \qquad (5)$$

Рассмотрим теперь второй вариант решения.

Пусть начало координат находится в точке A, а оси x, y, z направлены по лучам AD, AB, AA_1 соответственно (рис. 52).

Для удобства вычислений будем считать, что ребро куба равно 2. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{A_1O}$ и $\overrightarrow{DG}$:

$$\overrightarrow{A_1O}\ (1;\ 1;\ -2), \quad \overrightarrow{DG}\ (-1;\ 2;\ 1).$$

Их скалярное произведение опять же отлично от нуля. Этим подтверждается результат предыдущего вычисления. Итак, прямые A_1O и DG не перпендикулярны.

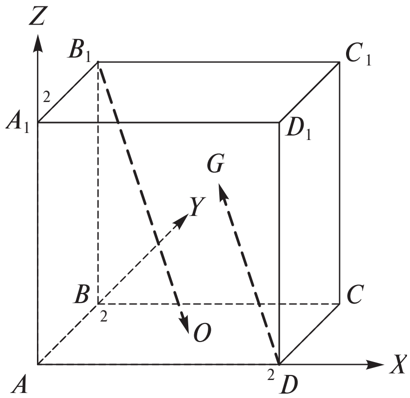


Рис. 52

Решите описанным способом задачу 8А.

Задача 8А. Перпендикулярны ли прямые AO_1 и BP (рис. 53).

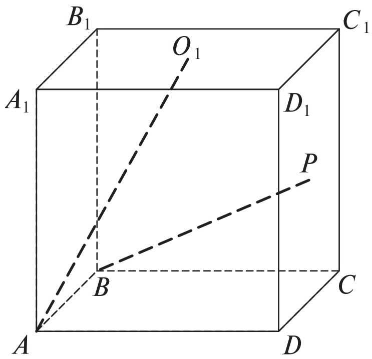


Рис. 53

Восьмой способ — *использование свойства ребер тетраэдра*. Из планиметрии вам, возможно, известно такое утверждение: диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противоположных сторон, т.е. для четырехугольнике $ABCD$ выполняется такое соотношение:

$$AC \perp BD \;\Leftrightarrow\; AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2. \qquad (6)$$

Перпендикулярность отрезков AC и BD равносильна равенству нулю скалярного произведения векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$. Кроме того, скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины. Докажем, что

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2.$$

Выберем на плоскости произвольную точку O и каждый из векторов шести векторов запишем как разность векторов с началом в точке O и концом в одной из точек A, B, C, D:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\quad \text{и т.д.}$$

Для удобства введем обозначения:

$$\overrightarrow{OA}=a,\ \overrightarrow{OB}=b,\ \overrightarrow{OC}=c,\ \overrightarrow{OD}=d.$$

Итак, требуется доказать **[?]**:

$$(c-a)(d-b)=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (b-a)^2+(d-c)^2=(d-a)^2+(c-b)^2.$$

Это несложно. Доведите выкладку до конца.

Для нас важно, что сие доказательство вместе с равенством (6) полностью переносятся на случай, когда точки A, B, C, D являются вершинами тетраэдра, т.е. когда прямые AC и BD скрещиваются.

Проиллюстрирую этот способ на примере решения следующей задачи.

Задача 9. Точка X находится на ребре CC_1, а точка Y находится на ребре A_1B_1 куба. Могут ли быть перпендикулярны прямые AX и DY (рис. 54)?

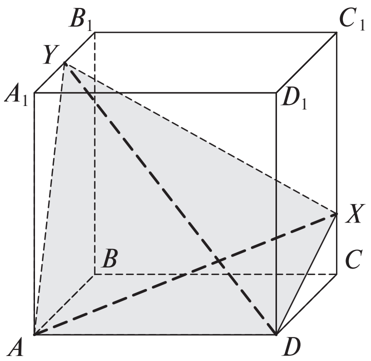


Рис. 54

Решение. Пусть $CX=a$, $A_1Y=b$. Рассмотрим тетраэдр $YADX$ (см. рис. 54). Считая куб единичным, выразим квадраты длин четырех ребер тетраэдра **[?]**:

$$AD^2=1,\ XD^2=1+a^2,\ AY^2=1+b^2,$$
$$XY^2=3-2a-2b+a^2+b^2.$$

Посмотрим, будет ли выполняться равенство сумм квадратов длин противоположных ребер тетраэдра: верно ли равенство $XY^2+AD^2=XD^2+AY^2$ при каких-либо a и b? Такое равенство возможно тогда и только тогда, когда $a+b=1$, т.е. если $CX=B_1Y$ **[?]**, значит, прямые AX и DY могут быть взаимно перпендикулярны.

Решите тем же способом задачу 9А.

Задача 9А. Точка X находится на ребре CC_1, а точка Y находится на ребре A_1D_1 куба. Могут ли быть перпендикулярны прямые AX и BY (рис. 55)?

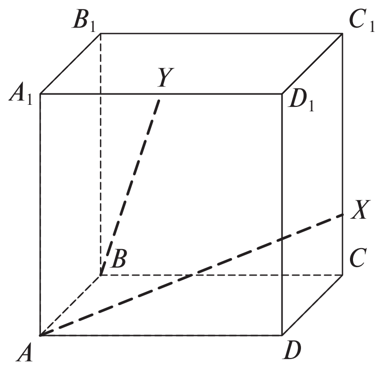


Рис. 55

Подчеркну, что проверка перпендикулярности прямых указанным способом требует знания четырех расстояний между точками этих прямых, которые являются вершинами некоего тетраэдра. Удобно представлять соответствующие четыре отрезка как звенья ломаной, идущей по границе тетраэдра (в нашем случае ломаной $AYXDA$).

(*Продолжение следует.*)