В.И. Рыжик

ОБ УГЛЕ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Окончание. Начало см. в № 2, 3 за 2010 г.

В статье рассматривается важный вопрос курса стереометрии — вычисление угла между прямой и плоскостью. Приводится подборка задач разного уровня сложности по этой теме.

Один из «мощных» методов — метод координат. В нем вновь «работает» нормаль: в уравнении плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ коэффициенты A, B, C — это координаты направляющего вектора нормали (его называют также нормальным вектором плоскости). Применяя этот метод, приходится водить систему координат. Она легко вводится, когда в многограннике естественно задана тройка попарно перпендикулярных прямых. Например, когда мы имеем дело с прямоугольным параллелепипедом или с четырехугольной пирамидой, в основании которой лежит прямоугольник, а высота пирамиды проектируется либо в его вершину, либо в центр (точку пересечения диагоналей), либо в середину стороны.

Задача 22. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 3, найдите угол между прямой AB и плоскостью B_1KL, где точка K лежит на ребре AB, $BK = 1$, точка L лежит на ребре BC, $BL = 2$ (рис. 1).

Решение. Введем систему координат с началом в точке B и осями, содержащими ребра BA, BC, BB_1 куба (рис. 1). Запишем в общем виде уравнение плоскости B_1KL:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

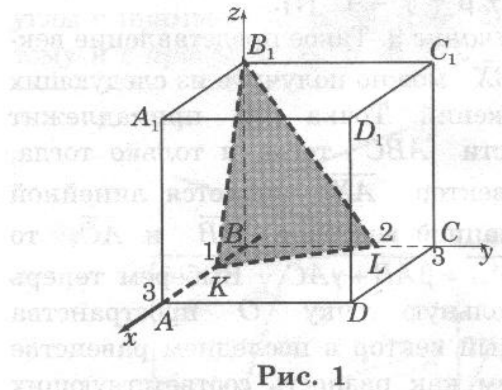

Рис. 1

Подставив в это уравнение координаты точек K, L, B_1, приходим к такому уравнению плоскости B_1KL [?]:

$$6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

Отсюда следует, что координаты ее нормального вектора $\vec{n}$ таковы: (6; 3; 2), а его длина равна 7 [?]. Теперь найдем координаты вектора $\overline{BA}$ — (3; 0; 0) и скалярное произведение векторов $\overline{BA}$ и $\vec{n}$ — оно равно 18 [?]. Отсюда получаем для угла φ между прямой AB и нормалью к плоскости B_1KL: $\cos\varphi = \dfrac{6}{7}$ **[?]**.

Окончательно: $\angle(AB,\ B_1KL) = \arcsin\dfrac{6}{7}$.

Задача 23. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой O_1C и плоскостью O_1AB (точка O_1 — центр грани $A_1B_1C_1D_1$).

Подсказка. Введите систему координат с началом O в центре грани $ABCD$ и осями OA, OD, OO_1.

Наконец возможно использование векторов. Решим с их помощью задачу 22.

Решение. Пусть $\overrightarrow{BX}$ — вектор нормали плоскости B_1KL, причем точка X лежит в плоскости B_1KL. Тогда

$$\overrightarrow{BX} = \alpha\overrightarrow{BA} + \beta\overrightarrow{BB_1} + \gamma\overrightarrow{BC},$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 1$ **[?]**.

Замечание 9. Такое представление вектора $\overrightarrow{BX}$ можно получить из следующих соображений. Точка X принадлежит плоскости ABC тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{AX}$ является линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, то есть $\overrightarrow{AX} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$. Выберем теперь произвольную точку O пространства и каждый вектор в последнем равенстве запишем как разность соответствующих векторов, выходящих из точки O:

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.$$

Теперь осталось эти выражения подставить в равенство $\overrightarrow{AX} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$ и обозначить выражение $1 - \beta - \gamma$ как α. Придем к равенству нужного нам вида:

$$\overrightarrow{OX} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC},$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Используя признак перпендикулярности прямой и плоскости, а также свойства скалярного умножения, запишем два равенства:

$$\overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{B_1K} = 0,\ \overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{B_1L} = 0.$$

Так как $\overrightarrow{BK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$, то

$$(\alpha\overrightarrow{BA} + \beta\overrightarrow{BB_1} + \gamma\overrightarrow{BC}) \cdot \left(-\overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\right) = 0.$$

Отсюда получаем, что $\alpha = 3\beta$ **[?]**.

Аналогично от равенства $\overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{B_1L} = 0$ приходим к равенству $\gamma = 1{,}5\beta$ **[?]**.

Учитывая, что $\alpha + \beta + \gamma = 1$, получаем:

$$\alpha = \frac{6}{11},\ \beta = \frac{2}{11},\ \gamma = \frac{3}{11}.$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{BX} = \frac{6}{11}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{11}\overrightarrow{BB_1} + \frac{3}{11}\overrightarrow{BC}.$$

Тогда $|\overrightarrow{BX}| = \dfrac{7}{11}$ **[?]**,

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BX}}{|\overrightarrow{BK}| \cdot |\overrightarrow{BX}|} = \frac{6}{7}.$$

Окончательно получим тот же результат, что и в предыдущем решении.

Теперь попытайтесь с помощью векторов решить такую задачу.

Задача 24. В тетраэдре с попарно равными противоположными ребрами вычислите угол между ребром в основании и боковой гранью. Длины ребер равны 3, 4, 5.

Результат будет для вас несколько неожиданным. Попробуйте дать ему теоретическое объяснение.

Задача 25. Известны плоские углы трехгранного угла. Как найти угол между каким-либо его ребром и плоскостью, в которой лежат два других ребра? Сделайте вычисления для трехгранного угла с плоскими углами, равными 30°, 45°, 60°.

Подсказка. На каждом из ребер задайте по единичному вектору. Пусть это будут векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Найдите вектор нормали $\vec{n}$ к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ищите его в виде $\vec{c}+x\vec{a}+y\vec{b}$, приравняв к нулю скалярные произведения этого вектора на векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$. Затем найдите угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{n}$, воспользовавшись их скалярным произведением. Искомый угол дополняет полученный вами до прямого угла.

Теперь я предлагаю вам особую группу задач про угол между прямой и плоскостью — задачи на построение, то есть на доказательство существования определенной пространственной конфигурации. Такие задачи вы наверняка решали, когда строили перпендикуляр к плоскости, параллельные плоскости, перпендикулярные плоскости и, возможно, общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых.

При решении такого рода задач об углах имеет смысл сводить угол между прямой и плоскостью к углу между этой прямой и нормалью к данной плоскости. Возможно, придется использовать коническую поверхность как пространственный аналог угла между лучами. Также важно необходимое и достаточное условие существования трехгранного угла: каждый его плоский угол меньше суммы двух других его плоских углов.

Для начала разберемся с задачей, которая поможет вам при решении других задач этого раздела.

Задача 26. Постройте прямую, равнонаклоненную к двум скрещивающимся прямым, то есть образующую равные углы с данными прямыми.

Решение. Задача на построение решается в три этапа: построение, доказательство, исследование.

Построение. Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b. Выберем произвольную точку O пространства и построим прямые c и d, параллельные прямым a и b соответственно (через каждую точку пространства можно провести прямую, параллельную данной прямой). Так как прямые c и d пересекаются, то существует плоскость, в которой они лежат, — назовем эту плоскость α. Проведем прямую p, содержащую биссектрису одного из углов, образованных прямыми c и d. Затем проведем через прямую p плоскость β, перпендикулярную плоскости α. Любая прямая OX плоскости β будет образовывать равные углы с прямыми c и d (рис. 2), а потому и с прямыми a и b [?].

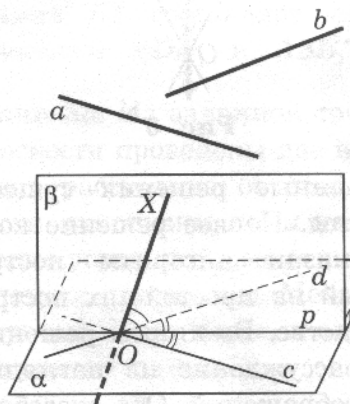

Рис. 2

Доказательство. Доказательство моментально следует из формулы «трех косинусов» и монотонности косинуса для углов от 0° до 90° [?].

Исследование. Ясно, что задача имеет бесконечно много решений [?].

Задачу можно решить иначе, даже не проводя плоскости α. Рассмотрим две конические поверхности с вершиной O, одну — с осью c, другую — с осью d (c и d — прямые, параллельные скрещивающимся прямым a и b соответственно). Так как у этих поверхностей есть общая точка, ясно, что, выбрав некоторый угол φ, который каждая из образующих этих конических поверхностей образует со своими осями c и d, можно получить в пересечении этих конических поверхностей искомую прямую m (рис. 3, в общем случае таких прямых две, на рисунке показана одна из них).

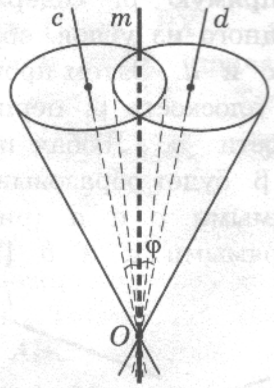

Рис. 3

Приведенные решения существенно различаются. Первое решение конструктивно: указан алгоритм построения, основанный на простейших построениях в пространстве. Во втором решении приводится рассуждение из наглядно очевидных соображений. Оба способа имеют право на существование.

Замечание 10. Иногда при решении задачи на построение полезно провести анализ условия, а также наметить план предстоящего решения. Эта часть работы так и называется — *анализ*. Анализируя условие задачи 26, можно заметить, что не указан угол, который искомая прямая образует с данными, поэтому можно предъявить какое-либо частное решение. Если ограничиться прямым углом, то ответ очевиден — надо построить общий перпендикуляр двух данных скрещивающихся прямых. Более содержательной задача получится, если в условии будет задан острый угол. Подчеркну, что анализ как элемент решения не обязателен, но желателен.

Замечание 11. Существование геометрической конфигурации означает, что совокупность фигур с указанным свойством представляет собой непустое множество. Для подтверждения «непустоты» достаточно предъявить хотя бы один объект с заданным свойством. Например, для доказательства существования шара с фиксированными центром и радиусом достаточно указать всего одну точку, удаленную от центра на заданное расстояние (заданный отрезок). Такая точка существует согласно аксиомам планиметрии.

Теперь решите следующие задачи.

Задача 27. Постройте: а) прямую, равнонаклоненную к двум пересекающимся плоскостям; б) плоскость, равнонаклоненную к двум скрещивающимся прямым; в) плоскость, равнонаклоненную к двум пересекающимся плоскостям.

Подсказка. Рассмотрите нормали к данным плоскостям.

Задача 28. Постройте: а) прямую, равнонаклоненную к трем попарно скрещивающимся прямым; б) прямую, равнонаклоненную к трем плоскостям, имеющим общую точку; в) плоскость, равнонаклоненную к трем попарно скрещивающимся прямым; г) плоскость, равнонаклоненную к трем плоскостям, имеющим общую точку.

Задача 29. Даны плоскость α и точка A вне ее. Какую фигуру образуют в пространстве все прямые, удаленные от точки A на данное расстояние r и образующие с плоскостью α острый угол φ? Постройте одну такую прямую.

Задача 30. Постройте плоскость, удаленную от данной точки на данное расстояние и образующую с двумя данными скрещивающимися прямыми заданные углы.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 31. Прямая AX составляет с гранью $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ угол α. Она пересекает плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$ в точке X. При каком условии точка X лежит на границе грани $A_1B_1C_1D_1$?

Замечание 12. Когда в задаче спрашивается, при каком условии происходит «нечто», то всегда надо отдавать себе отчет, какое условие вы нашли: необходимое? достаточное? и то и другое? В последнем случае потребуется доказательство двух утверждений — прямого и обратного (или ему равносильного — противоположного прямому).

Задача 32. Дан треугольник ABC. В одном полупространстве от плоскости ABC проведены три луча: AX под углом α к плоскости ABC, BY под углом β к плоскости ABC, CZ под углом γ к плоскости ABC. При каком необходимом условии, накладываемом на углы α, β и γ, эти лучи имеют общую точку?

Задача 33. В пирамиде $PABCD$ все ребра равны, через середины ребер AB, AD и PC проходит плоскость сечения. Чему равен угол между ребром PD и этой плоскостью?

Задача 34. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через прямую B_1C проведена плоскость, пересекающая ребра A_1B и AB, причем ребро AB она делит пополам. Какой угол составляет эта плоскость с ребром A_1B?

Задача 35. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через прямую B_1C проведена плоскость, пересекающая ребра A_1B и AB, причем угол, который она составляет с ребром A_1B, именно тот, который был получен в задаче 34. Будет ли эта плоскость делить ребро AB пополам?

Задача 36. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K — середина ребра CD. Какой угол образует прямая A_1K с сечением: а) A_1B_1BA; б) A_1D_1CB; в) AB_1D_1?

Задача 37. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K лежит на ребре A_1D_1. Существует ли на ребре AB точка L такая, что прямая KL составляет равные углы с плоскостями ADD_1 и ABB_1?

Задача 38. Из заданной точки к данной плоскости проведены две наклонные. Известны расстояние от этой точки до плоскости, отношение длин наклонных и отношение углов, которые эти наклонные составляют с плоскостью. Можно ли найти эти углы? В частности, в случае когда оба отношения равны 2.

Поступаем в вуз

Замечание 13. Возможно, ответ, полученный составителями задачи, будет внешне отличаться от того ответа, который получите вы, если для решения будете использовать теоремы косинусов или синусов для трехгранного угла (и их следствия). Для самопроверки имеет смысл убедиться, что ваш результат адекватен ответу составителей.

Замечание 14. Терминология в задачах используется довольно свободная. Не всегда авторы дотошны в формулировках, можно встретить такие обороты речи, как «угол между ребром многогранника и плоскостью…», «угол между ребром и гранью». Эти обороты речи всегда подразумевают, что имеется в виду прямая, содержащая ребро многогранника, и плоскость, содержащая грань многогранника.

Задача 39. Основанием пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$ с углом A, равным 60°. Боковые грани наклонены к основанию пирамиды под углом α. Найдите угол наклона ребра SA к плоскости основания.

Ответ: $\mathrm{arctg}(0{,}5\,\mathrm{tg}\alpha)$.

Задача 40. Основанием пирамиды является правильный треугольник, одна из боковых граней перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к нему под углом α. Под какими углами наклонены к плоскости основания боковые ребра?

Ответ: $\mathrm{arctg}(0{,}5\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha)$, $\mathrm{arctg}(0{,}5\,\mathrm{tg}\,\alpha)$.

Задача 41. В сечении прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием получается ромб с острым углом 60°. Под каким углом плоскость сечения пересекает боковые ребра параллелепипеда?

Ответ: $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 42. Найдите угол между боковым ребром правильной треугольной пирамиды и плоскостью ее основания, если этот угол равен плоскому углу при вершине пирамиды.

Ответ: $2\arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{2\sqrt{3}}$.

Задача 43. Все грани призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ касаются некоторого шара. Основанием призмы служит квадрат $ABCD$ со стороной, равной 5. Угол C_1CD — острый, а $\angle C_1CB = \mathrm{arctg}\frac{5}{3}$. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания призмы.

Ответ: $\arccos\frac{3}{\sqrt{17}}$.

Задача 44. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AC и BD взаимно перпендикулярны, $AB = BD = AD = a$, середина ребра AC равноудалена от плоскостей ABD и BCD, угол между ребром AC и гранью CBD равен $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите угол между ребром BD и гранью ACD.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Задача 45. Апофема правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, боковое ребро образует с основанием $ABCD$ угол, равный $\mathrm{arctg}\sqrt{1{,}5}$. На ребрах AB, AD, SC выбраны соответственно точки E, F, K так, что

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD} = \frac{SK}{SC} = \frac{1}{2}.$$

Найдите угол между прямой SD и плоскостью EFK.

Ответ: $\arcsin\frac{3}{5}$.

Задачи ЕГЭ

Задача 46. Основание правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = 4$, точка T — середина стороны AB. Боковое ребро призмы равно $2\sqrt{2}$. Найдите угол между прямой B_1T и плоскостью боковой грани BCC_1B_1.

Задача 47. Отношение стороны основания правильной четырехугольной пирамиды к ее высоте равно $\sqrt{2}$. Найдите градусную меру угла наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания.

Задача 48. В призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все грани — равные ромбы, $\angle BAD = \angle BAA_1 = \angle DAA_1 = 60^\circ$. Найдите градусную меру угла между прямой BA_1 и плоскостью BDB_1.

Задача 49. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle C$, $BC = 2$, $\sin\angle A = 0{,}3$. Высота призмы равна $\sqrt{5}$. Найдите синус угла между прямой BC_1 и плоскостью ACC_1.

Задача 50. Отрезок PN — диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере и выбраны так, что объем пирамиды $PNML$ принимает наибольшее значение. Найдите синус угла между прямой NT и плоскостью PMN, если точка T — середина ребра ML.

Литература

1. *Рыжик В.И.* О расстоянии вообще и расстоянии между скрещивающимися прямыми в частности // Математика для школьников. — 2007. — № 4; 2008. — № 1.

2. *Рыжик В.И.* Об углах между скрещивающимися прямыми и немного о прочих углах // Математика для школьников. — 2008. — № 3, 4.