В.И.Рыжик

ОПЯТЬ ОБ УГЛАХ. УГОЛ ДВУГРАННЫЙ

Предварительные замечания:

1. Статья эта — продолжение статьи [1], с которой желательно ознакомиться.
2. Если в тексте после некоторого утверждения стоит в скобках вопросительный знак – [?], то читателю предлагается обосновать это утверждение.

Знакомство с двугранным углом

Термин «двугранный угол» неоднозначен, как и термин «угол между лучами» на плоскости.

Во-первых, его можно трактовать как меру отклонения одной полуплоскости от другой (наглядный пример — дверь или форточка; их можно открыть больше или меньше). Тогда двугранный угол — это величина. Согласно определению она равна величине соответствующего линейного угла. И теперь уже можно говорить нечто такое: «Двугранный угол равен 50°», что означает равенство 50 градусам его линейного угла. Двугранный угол — величина находится, как ясно, в пределах от 0° до 180°. Включать или не включать границы (0° и 180°) — вопрос договоренности. Для теории включение границ мало интересно, а в задачах такое иногда можно допустить.

Во-вторых, двугранный угол можно трактовать как фигуру. Тогда двугранный угол – это множество точек.

(Такие же две трактовки приняты в планиметрии для угла, образованного двумя лучами с общей вершиной.)

Двугранный угол как фигуру можно толковать по-разному: и как пару полуплоскостей с общим ребром, и как часть пространства, ограниченную этими полуплоскостями (включая их самих). Двугранный угол, понимаемый во втором смысле, может быть выпуклым или невыпуклым. Обычно работают с выпуклым двугранным углом. Впрочем, возможен и невыпуклый двугранный угол, например в невыпуклом многограннике (рис. 1).

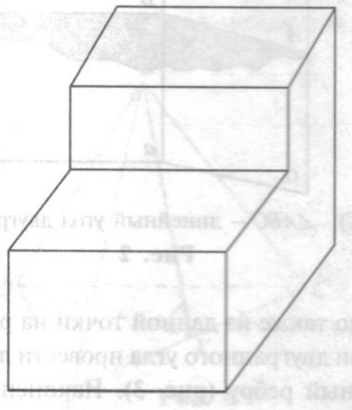


Рис. 1

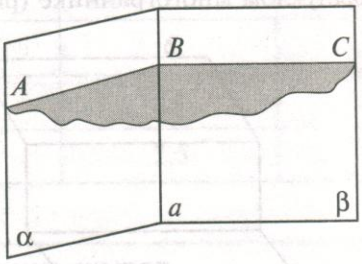
Есть одна тонкость: когда грани двугранного угла (понимаемого во втором смысле) составляют вместе плоскость, т.е. развернутый двугранный угол, не стоит отождествлять его с полупространством. У полупространства никаких ребер нет, а у двугранного угла ребро есть. (Точно так же развернутый угол на плоскости, понимаемый как ее часть, ограниченная двумя лучами с общим началом, не стоит отождествлять с полуплоскостью.)

Равенство двугранных углов можно определять двояко (как и равенство углов на плоскости). Чаще его определяют как равенство их линейных углов. Возможно другое определение — с помощью движения, а именно: двугранные углы равны, если существует движение, в результате которого они совмещаются.

Разумеется, эти определения равносильны (как и аналогичное им для углов на плоскости), что, однако, доказывается непросто.

Замечание 1 (для знатоков). Равенство углов по мере и равенство в результате движения не всегда равносильны. Это проходит для плоских углов и двугранных. Но уже для многогранных углов этой равносильности нет.

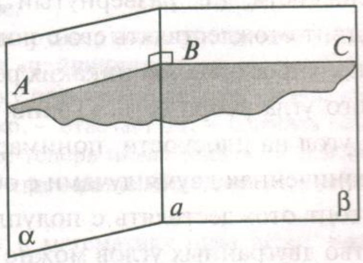
Линейный угол двугранного угла получается по-разному. Можно взять любую точку на ребре и через нее провести плоскость, перпендикулярную ребру. В пересечении этой плоскости с двугранным углом и получается линейный угол (рис. 2).



$a \perp (ABC)$, $\angle ABC$ – линейный угол двугранного угла

Рис. 2

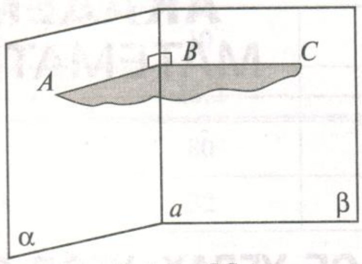
Можно также из данной точки на ребре в каждой грани двугранного угла провести луч, перпендикулярный ребру (рис. 3). Наконец, можно из какой-либо точки одной из граней двугранного угла провести перпендикуляр к ребру этого угла, а затем из полученной на ребре точки провести перпендикуляр к ребру в другой грани (рис. 4).



$BA \perp a$, $BC \perp a$,

$\angle ABC$ – линейный угол двугранного угла

Рис. 3



$AB \perp a$, $BC \perp a$,

$\angle ABC$ – линейный угол двугранного угла

Рис. 4

Мера линейного угла не зависит от выбора начальной точки на ребре, а потому мера двугранного угла определяется однозначно. Это доказывается в теоретическом курсе.

После введения линейного угла некоторые свойства двугранных углов могут быть сведены к соответствующим свойствам линейных углов. Например, сравнение двугранных углов по величине (больше — меньше) сводится к сравнению их линейных углов; все действия с двугранными углами сводятся к действиям с их линейными углами.

Двугранный угол как величина

Перейдем к вычислению двугранных углов.

Двугранный угол я буду «привязывать» к многограннику (так чаще всего и бывает в задачах) подобно тому, как в задачах планиметрии угол между лучами мы чаще относим к какому-либо плоскому многоугольнику.

Замечание 2. Я не буду говорить далее «величина двугранного угла» или «мера двугранного угла» — ясно, что при вычислении двугранный угол рассматривается как его градусная (радианная) мера.

И еще. Задание «Найдите угол» или вопрос «Чему равен угол?» равносильны заданию «Найдите тригонометрическую функцию угла» (чаще всего косинус).

Прежде чем перейти к методам решения задач, проверьте свое пространственное мышление и ответьте (по возможности устно), даже не делая рисунка, на такие *вопросы*.

1. Какие фигуры могут получиться в пересечении двух двугранных углов? Можно ли, например, получить тетраэдр?

2. Каково наименьшее число двугранных углов, в пересечении которых можно получить куб, треугольную призму?

3. Какие элементы симметрии имеет двугранный угол? Есть ли у него, например, ось симметрии?

4. Прямой двугранный угол повернули на 90° вокруг биссектрисы его линейного угла. Какая фигура получилась в пересечении исходного и полученного двугранных углов?

5. Имеется прямой двугранный угол. Из точки на его ребре выходят два луча, причем один из них: а) перпендикулярен ребру; б) образует с ребром угол $\varphi \neq 90^\circ$. В каких границах лежит угол, который образует с ребром второй луч?

6. Имеются два расположенных вертикально пересекающихся зеркала. Требуется найти угол между ними, если падающий горизонтальный луч света: а) параллелен плоскости первого зеркала и отражается от второго по прямой, перпендикулярной первому зеркалу; б) отражается от обоих зеркал, причем сначала он параллелен плоскости первого зеркала, а после двух отражений параллелен плоскости второго зеркала.

7. Имеются два пересекающихся зеркала. На первое зеркало направляется луч света под углом φ. Требуется получить отраженный от второго зеркала луч, параллельный исходному. Каким следует выбрать для этого угол между зеркалами? Решите также обратную задачу.

Вычисление двугранного угла на основе определения

Основной путь вычисления двугранного угла — вычисление его линейного угла. Здесь возможны разные ситуации. Бывает так, что в задаче на рисунке уже построен линейный угол того двугранного угла, который мы ищем.

Задача 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислите двугранный угол с ребром AD и гранями $ADCB$ и ADC_1B_1 (рис. 5).

Подсказка. На этом рисунке можно увидеть линейный угол этого двугранного угла — угол C_1DC или B_1AB **[?]**.

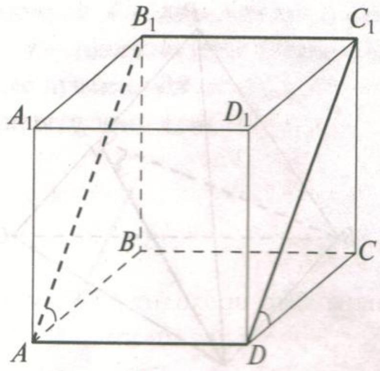


Рис. 5

Может возникнуть ситуация, когда линейный угол необходимо построить. При этом возможны два случая. В первом из них положение вершины угла выбрать легко, вот как в задаче 2.

Задача 2. Дан правильный тетраэдр $DABC$. Вычислите двугранный угол между его гранями (рис. 6).

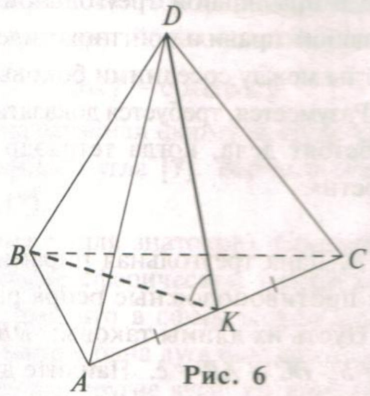


Рис. 6

На этом рисунке ребром двугранного угла является, к примеру, ребро AC тетраэдра. Линейный угол получится, если в качестве его вершины взять середину ребра AC **[?]**.

Замечание 3. Мы предполагаем в этом вычислении, что в правильном тетраэдре (как и в любом правильном многограннике) все двугранные углы равны. Разумеется, требуется доказать этот факт.

Во втором случае поиски «удобного» положения вершины линейного угла не столь просты.

Задача 3. Дана правильная треугольная пирамида $PABC$. Вычислите двугранный угол между ее боковыми гранями (рис. 7).

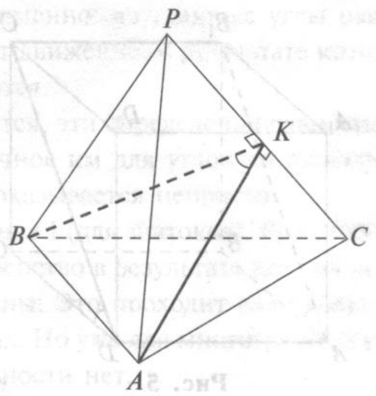


Рис. 7

На этом рисунке ребром двугранного угла является, к примеру, боковое ребро PC пирамиды.

Подсказка. Линейный угол получится, если к ребру PC провести перпендикуляры из вершин A и B (см. рис. 7) **[?]**.

Замечание 4. Мы предполагаем в этом вычислении, что в правильной треугольной пирамиде (как и в любой правильной пирамиде) все двугранные углы между соседними боковыми гранями равны. Разумеется, требуется доказать этот факт.

Хуже обстоят дела, когда тетраэдр «далек от правильности».

Задача 4. Дана треугольная пирамида $DABC$, в которой противоположные ребра равны между собой. Пусть их длины таковы: $DB = AC = a$, $DA = BC = b$, $DC = AB = c$. Найдите двугранный угол между ее гранями с общим ребром DC.

Здесь перпендикуляры AK и BL, проведенные к ребру DC из вершин A и B, возможно, «не сходятся», т.е. проекции точек A и B на ребро DC различны (рис. 8) **[?]**.

Рис. 8

Если эту задачу все же пытаться решать, используя линейный угол, то волокита будет изрядная. Однако можно действовать иначе и, возможно, вообще отказаться от работы с линейным углом.

Вычисление двугранного угла с помощью «разнесенного» линейного угла

В задаче 4 после проведения перпендикуляров из точек A и B мы видим, что отрезки не «сошлись». Но если вспомнить, что угол между лучами инвариантен (неизменен) относительно параллельного переноса любого из них и обоих вместе (не зависит от того, есть у них общая точка или нет), то оказывается, что решение задачи можно продолжить, работая с этими перпендикулярами. Точнее, можно вычислить угол между скрещивающимися прямыми AK и BL, используя уже известные формулы для углов между скрещивающимися прямыми. О том, как это делается, можно прочитать в статье [1].

Известна, например, формула, связанная с тетраэдром. Если мы имеем тетраэдр $ABCD$, то

$$\cos\angle AB, CD = \frac{|(AC^2 + BD^2) - (AD^2 + BC^2)|}{2AB \cdot CD}.$$

Рассмотрим тетраэдр $ABKL$ и подсчитаем угол между прямыми AK и BL по этой формуле, взяв, к примеру, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Когда проделаете вычисления, вас ждет небольшой сюрприз **[?]**. Вы, конечно, захотите себя проверить. Такая возможность есть, я это сделаю чуть дальше. Но можно сразу попытаться понять, откуда берется такой странный результат **[?]**.

Замечание 5. Вычисляя двугранный угол с помощью угла между скрещивающимися прямыми, надо иметь в виду одну тонкость. Угол между прямыми не может быть тупым, а двугранный угол — может. Поэтому если вы нашли угол между скрещивающимися прямыми, к примеру $30°$, то искомый двугранный угол, может быть и $150°$. Вывод ясен — при некоторых способах вычисления двугранного угла его необходимо проверить «на тупость».

Решите рассмотренным способом задачу 5.

Задача 5. Дана четырехугольная пирамида $PABCD$. Ее основанием является прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 1$, $AD = 2$. а) Чему равен двугранный угол между боковыми гранями пирамиды, если каждое ее боковое ребро равно 1? б) Чему равен двугранный угол с ребром PD между боковыми гранями пирамиды, если боковое ребро $PB = 1$ и $PB \perp (ABC)$?

Может случиться так, что на рисунке нет ребра двугранного угла, но есть точка, ему принадлежащая. Тогда приходится дополнять этим ребром, проводя дополнительные построения. Поясним сказанное на примере следующей задачи.

Задача 6. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна стороне основания. Чему равен угол между плоскостями противоположных боковых граней пирамиды?

Подсказка. Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости противоположных граней этой пирамиды; она будет параллельна прямой, проходящей через одну из сторон основания пирамиды **[?]**. Построенная прямая будет ребром искомого двугранного угла. Затем постройте его линейный угол с вершиной в вершине пирамиды, после чего задача сведется к планиметрической.

Вычисление двугранного угла по теореме косинусов для трехгранного угла

В решении геометрических задач иногда применяют такой прием: помещают данную фигуру в другую, свойства которой хорошо известны и могут использоваться в решении (например, около треугольника описывают окружность). Тогда данную фигуру можно рассматривать как фрагмент более сложной фигуры.

Для наших целей двугранный угол можно рассматривать не сам по себе, а как часть трехгранного угла. Очень эффективно вычисление двугранного угла с помощью теоремы косинусов для трехгранного угла. Напомним ее. Для трехгранного угла с вершиной P и ребрами PA, PB, PC

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}. \qquad (1)$$

В этой формуле A — двугранный угол с ребром PA, а α, β, γ — плоские углы трехгранного угла, образованные лучами PB и PC, PA и PC, PA и PB соответственно (рис. 9).

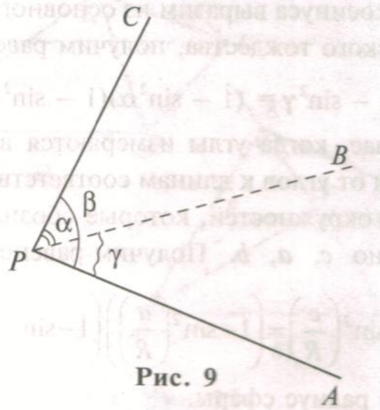


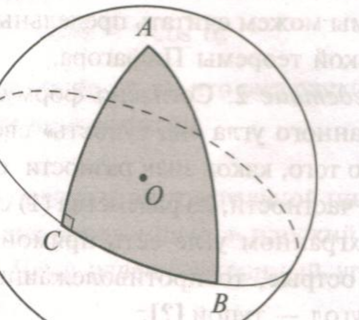
Рис. 9

Следствие 1. Если в трехгранном угле есть прямой двугранный угол (такой трехгранный угол естественно назвать прямым), то косинус противолежащего ему плоского угла равен произведению косинусов двух других его плоских углов:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta. \qquad (2)$$

Это так называемая формула «трех косинусов» для трехгранного угла **[?]**. Верно и обратное утверждение **[?]**.

Замечание 6 (для знатоков). Соотношение (2) называют также сферической теоремой Пифагора. Дело в том, что в сферическом прямоугольном треугольнике одна дуга большого круга выражается через две другие дуги: косинус гипотенузы сферического прямоугольного треугольника равен произведению косинусов его катетов (рис. 10).



O — центр сферы,
AB, BC, CA — дуги больших окружностей, $\angle ACB = 90°$

Рис. 10

Тем не менее связь с планиметрической теоремой Пифагора не вполне просматривается. Поэтому проделаем такую выкладку. Обе части равенства (2) возведем в квадрат. Затем каждый квадрат косинуса выразим из основного тригонометрического тождества, получим равенство

$$1 - \sin^2\gamma = (1 - \sin^2\alpha)(1 - \sin^2\beta).$$

В случае, когда углы измеряются в радианах, перейдем от углов к длинам соответствующих дуг больших окружностей, которые обозначим соответственно c, a, b. Получим равенство

$$1-\sin^2\left(\frac{c}{R}\right)=\left(1-\sin^2\left(\frac{a}{R}\right)\right)\left(1-\sin^2\left(\frac{b}{R}\right)\right),$$

где R — радиус сферы.

При $R \to \infty$ дробь $\frac{c}{R} \to 0$, тогда

$$\sin^2\left(\frac{c}{R}\right) \approx \left(\frac{c}{R}\right)^2$$

(аналогично для дробей $\frac{a}{R}$ и $\frac{b}{R}$). В результате приходим к равенству

$$1-\left(\frac{c}{R}\right)^2 \approx \left(1-\left(\frac{a}{R}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{b}{R}\right)^2\right),$$

откуда

$$c^2 \approx a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2}{R^2}.$$

Затем отбрасываем последнее бесконечно малое слагаемое и получаем равенство из теоремы Пифагора.

Тем самым планиметрическую теорему Пифагора мы можем считать предельным случаем сферической теоремы Пифагора.

Следствие 2. Согласно формуле (1) проверка двугранного угла «на тупость» сводится, к выяснению того, каков знак разности $\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma$ **[?]**. В частности, из равенства (1) следует, что если в трехгранном угле есть прямой угол, а другие углы острые, то противолежащий ему двугранный угол — тупой **[?]**.

С помощью формулы (1) достаточно легко решаются многие задачи о двугранных углах. Например, такая.

Задача 7. Чему равен двугранный угол в правильном октаэдре*?

Р е ш е н и е. Известно, что правильная четырехугольная пирамида, у которой все ребра равны, является частью правильного октаэдра, его «половиной» (рис. 11).

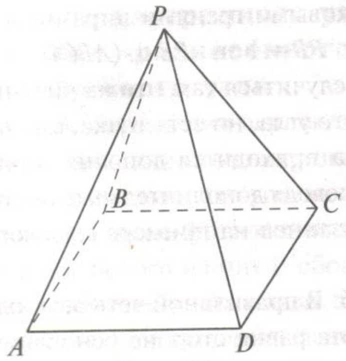


Рис. 11

Пусть $PABCD$ — такая пирамида. Рассмотрим трехгранный угол с вершиной A и ребрами AB, AD, AP. Найдем двугранный угол с ребром AP по формуле (1):

$$\cos A = \frac{\cos\angle BAD - \cos\angle BAP\cdot\cos\angle DAP}{\sin\angle BAP\cdot\sin\angle DAP} = \frac{\cos 90° - \cos^2 60°}{\sin^2 60°} = -\frac{1}{3}.$$

Полученный результат сразу выдает «тупость» этого двугранного угла.

Теперь попробуйте сами.

Задача 8. Дана правильная четырехугольная пирамида. Боковая грань образует с плоскостью основания угол α. Чему равен двугранный угол, который образуют соседние боковые грани пирамиды?

Я покажу несколько решений, причем к первым двум дам подсказки.

Подсказка (к решению 1). Обычно в таких «безразмерных» задачах (среди данных нет ни длин, ни площадей, ни объемов) вводят линейный параметр (чаще всего длину какого-нибудь отрезка,

* *Правильный октаэдр* — один из пяти правильных многогранников (символ воздуха у древних греков). Имеет 8 граней — равных правильных треугольников.

приняв ее за 1 или 2 — ради удобства при делении пополам — или, обозначив буквой). Далее выражают с его помощью данные и искомые углы, затем находят связь между ними, используя тригонометрические функции. Остальное — «дело техники». И в данной задаче такое решение возможно. Примите, например, ребро основания равным 2 и действуйте.

Замечание 7 (для знатоков). Фигуры, о которых говорится в «безразмерных» задачах, подобны, поэтому выбор параметра «ничего не портит». Если вводить параметр в общем виде, то в процессе получения окончательного результата он «исчезнет». Два и более параметра вводить тоже можно, не надо этого бояться. Если они окажутся зависимыми, то потребуется учет возможных связей между ними, что создаст дополнительные (на уровне выкладок) хлопоты.

Подсказка (к решению 2). Обозначим высоту пирамиды буквой h, ребро основания — a, боковое ребро — b. Далее будем искать всевозможные связи между четырьмя параметрами — тремя введенными и данным углом α. Для получения окончательного результата желательно иметь четыре независимых уравнения. В данном примере это возможно. Последовательное исключение параметров приводит к ответу. Проделайте все это самостоятельно.

Замечание 8. На рисунке, который вы сделаете и в решении 1, и в решении 2, наверняка появится линейный угол двугранного угла при боковом ребре. Здесь надо быть внимательными. Скорее всего, вы сделаете следующий рисунок (рис. 12, *а*). Но обязан ли он быть именно таким? А вдруг он такой (рис. 12, *б*)?

Можно и не вводить дополнительные метрические параметры. Достаточно воспользоваться соотношениями между углами, точнее, между тригонометрическими функциями углов, на основании теорем косинусов, синусов для трехгранного угла и их следствий. Вот как это делается.

Р е ш е н и е 3. Пусть $PABCD$ — данная пирамида. Рассмотрим трехгранный угол с вершиной A и ребрами AP, AB, AD. По формуле (1) для этого трехгранного угла имеем:

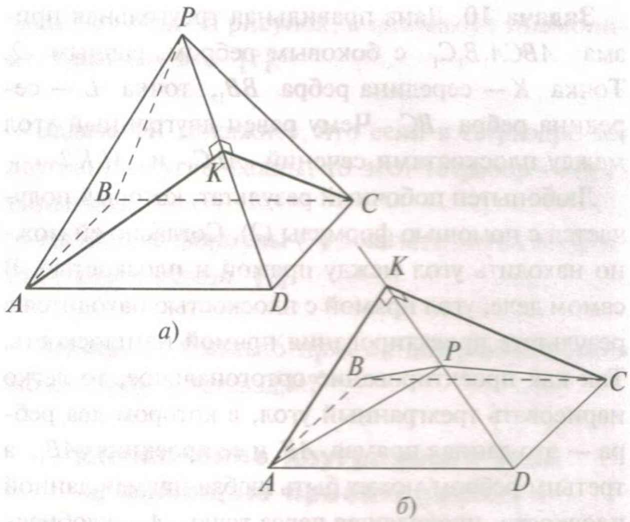


Рис. 12

$$\cos x = \cos P = \frac{\cos 90^\circ - \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} = -\operatorname{ctg}^2 \varphi, \qquad (3)$$

где $\varphi = \angle PAD$.

Рассмотрим еще один трехгранный угол — с вершиной A и ребрами AP, AC, AD. По формуле (1) для этого трехгранного угла имеем:

$$\cos\alpha = \cos D = \frac{\cos y - \cos\varphi\cos 45^\circ}{\sin\varphi\sin 45^\circ}, \qquad (4)$$

где $y = \angle PAC$.

Согласно формуле (2) имеем: $\cos\varphi = \cos y \cos 45^\circ$, откуда

$$\cos y = \sqrt{2}\cos\varphi. \qquad (5)$$

Подставив в равенство (4) полученное в (5) значение для $\cos y$, получим: $\operatorname{ctg}\varphi = \cos\alpha$. Подставив полученное значение для $\operatorname{ctg}\varphi$ в равенство (3), получим:

$$\cos x = -\cos^2 \alpha.$$

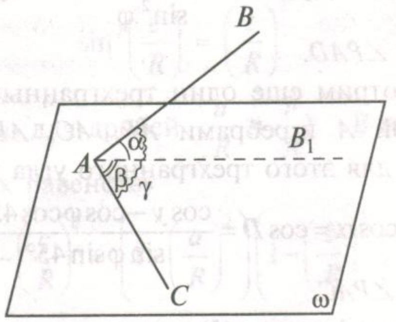
Обратите внимание на то, что вид рисунка при таком решении не существен.

Задача 9. В правильной треугольной пирамиде известны сторона основания a и плоский угол φ при вершине. Чему равен двугранный угол при боковом ребре?

Подсказка. Будьте внимательны к условию. Проведите исследование — всегда ли задача имеет решение?

Задача 10. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с боковым ребром, равным 2. Точка K — середина ребра BB_1, точка L — середина ребра BC. Чему равен двугранный угол между плоскостями сечений ALC_1 и ALK?

Любопытен побочный результат, который получается с помощью формулы (2). Согласно ей можно находить угол между прямой и плоскостью. В самом деле, угол прямой с плоскостью находится в результате проектирования прямой на плоскость. Так как проектирование ортогональное, то легко нарисовать трехгранный угол, в котором два ребра — это данная прямая AB и ее проекция AB_1, а третьим ребром может быть любая прямая данной плоскости, проходящая через точку A, «удобная» для вычислений (рис. 13). И угол между прямой и плоскостью оказывается одним из плоских углов прямого трехгранного угла.



Прямая AB_1 — проекция прямой AB на плоскость ω

Рис. 13

Из формулы (2) видим, что угол между прямой и плоскостью (на рис. 13 это угол BAB_1) находится по формуле

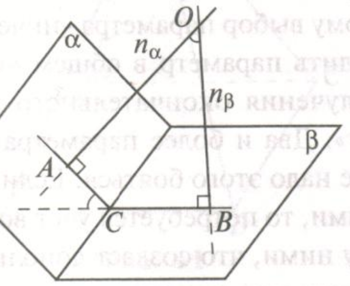
$$\cos\alpha = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta} \qquad (6)$$

Что это дает? В иных задачах мы можем теперь работать только с углами. Отпадает необходимость вводить линейный параметр, затем находить длины конкретных отрезков и соответственно длины их проекций и т.д. Например, в случае правильного тетраэдра для нахождения угла между ребром и плоскостью, в которой оно не лежит, мы можем разделить $\cos 60^\circ$ на $\cos 30^\circ$ — и ответ готов [?].

Более подробно об угле между прямой и плоскостью мы поговорим в другой раз.

Вычисление двугранного угла с помощью нормалей

В следующем способе нахождения двугранного угла используется тот факт, что двугранный угол равен углу между нормалями к плоскостям его граней или дополняет его до развернутого угла (рис. 14). Работать с нормалями бывает существенно проще, чем с линейным углом или с «разнесенным» линейным углом, как это было в задаче 4.



$\angle\alpha\beta = \angle n_\alpha n_\beta$ или $\angle\alpha\beta = 180^\circ - \angle n_\alpha n_\beta$

Рис. 14

Задача 10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислите двугранный угол с ребром BD между плоскостями сечений A_1DB и C_1DB.

Подсказка. Известно, что нормалью к плоскости A_1DB является прямая AC_1, а нормалью к плоскости C_1DB — прямая A_1C (рис. 15).

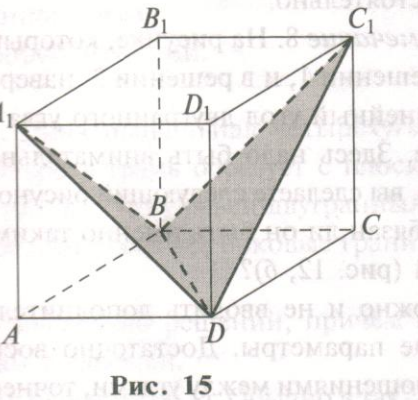
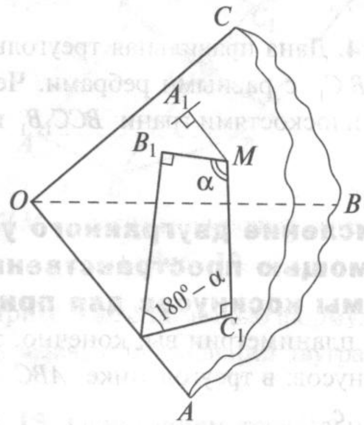


Рис. 15

Замечание 9. Найденный угол является к тому же двугранным углом в правильном тетраэдре [?].

Работа с нормалями позволяет чуть ли не даром получить несколько любопытных результатов. Сделаем вот что. Из точки M, лежащей внутри трехгранного угла с вершиной O и ребрами OA,

OB, OC проведем три нормали: MA_1, MB_1 и MC_1 к граням OBC, OAC и OAB соответственно (рис. 16). На полученном рисунке можно увидеть еще один трехгранный угол — с вершиной M и ребрами MA_1, MB_1, MC_1. Такой угол называют полярным по отношению к данному. Отношение полярности взаимно, т.е. исходный трехгранный угол полярен к построенному [?].



$MB_1 \perp (AOC)$, $MC_1 \perp (AOB)$, $MA_1 \perp (BOC)$

Рис. 16

Ясно, что угол B_1MC_1 дополняет двугранный угол с ребром OA до $180°$, аналогичная зависимость верна для углов A_1MB_1 и A_1MC_1 [?].

Теперь запишем формулу из теоремы косинусов для полярного трехгранного угла:

$$\cos A_1 = \frac{\cos\alpha_1 - \cos\beta_1\cos\gamma_1}{\sin\beta_1\sin\gamma_1}.$$

Заменим каждый косинус в этой формуле, исходя из соотношения между двугранными углами трехгранного угла и плоскими углами полярного угла. Получим:

$$\cos(\pi-\alpha) = \frac{\cos(\pi-A) - \cos(\pi-B)\cos(\pi-C)}{\sin(\pi-B)\sin(\pi-C)},$$

откуда

$$-\cos\alpha = \frac{-\cos A - \cos B\cos C}{\sin B\sin C}.$$

И, окончательно:

$$\cos\alpha = \frac{\cos A + \cos B\cos C}{\sin B\sin C}. \qquad (7)$$

Аналогичную формулу можно записать для косинусов других плоских углов трехгранного угла, даже не глядя на рисунок, а используя мнемонику. Сделайте это [?].

Задача 11. Докажите, что если в тетраэдре все двугранные углы равны, то этот тетраэдр — правильный.

На основе формулы (7) доказательство получается моментально [?].

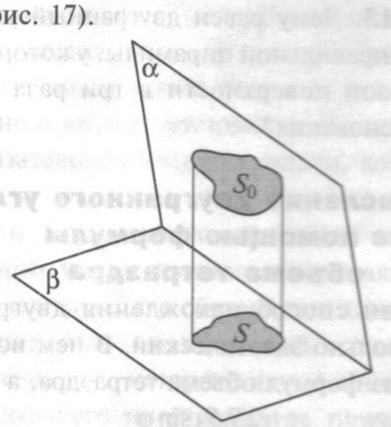
Задача 12. Сколько прямых двугранных углов может быть в тетраэдре?

Вычисление двугранного угла с помощью проектирования

Еще один способ вычисления двугранного угла связан с известным утверждением о площади проекции фигуры: если фигура, лежащая в плоскости α, проектируется на плоскость β, то площадь проекции равна площади фигуры, умноженной на косинус угла между этими плоскостями. Соответствующая формула для косинуса угла:

$$\cos\varphi = \frac{S}{S_0}, \qquad (8)$$

где S — площадь проекции, S_0 — площадь фигуры, φ — двугранный угол между плоскостями α и β (рис. 17).

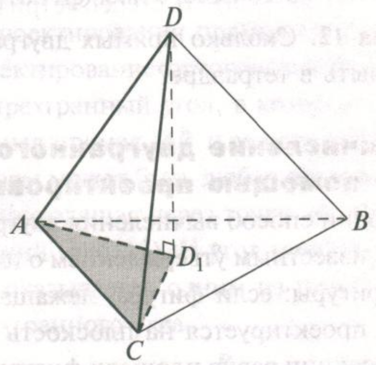


$\angle\alpha\beta = \varphi$

Рис. 17

Это утверждение интуитивно очевидно. Так как при проектировании на плоскость β длины всех отрезков, лежащих в плоскости α, умножаются на $\cos\varphi$, то и с площадью будет то же самое.

С помощью формулы (8) чуть ли не моментально находится двугранный угол в правильном тетраэдре. В самом деле, любая вершина правильного тетраэдра проецируется в центр противоположной грани, а потому проекция любой грани на плоскость другой является треугольником, площадь которого составляет треть от площади грани (рис. 18) **[?]**. Отсюда получаем, что двугранный угол в правильном тетраэдре равен $\arccos\frac{1}{3}$.



$DABC$ — правильный тетраэдр.

Треугольник AD_1C — проекция треугольника ADC на плоскость ABC

Рис. 18

Решите теперь задачу 13.

Задача 13. Чему равен двугранный угол при основании правильной пирамиды, у которой площадь боковой поверхности в три раза больше площади основания?

Вычисление двугранного угла с помощью формулы объема тетраэдра

Еще один способ нахождения двугранного угла — довольно экзотический. В нем используется одна из формул объема тетраэдра, а именно

$$V = \frac{2S_1S_2\sin\varphi}{3d}, \qquad (9)$$

где V — объем тетраэдра, S_1 и S_2 — площади его двух смежных граней, d — длина общего ребра этих граней, φ — двугранный угол между плоскостями этих граней. Она напоминает одну из формул площади треугольника, не правда ли? Попытайтесь доказать равенство (9), это нетрудно сделать «в лоб».

Из (9) следует, что

$$\sin\varphi = \frac{3Vd}{2S_1S_2}. \qquad (10)$$

Проверьте справедливость этой формулы для правильного тетраэдра; прямоугольного тетраэдра*. Она может успешно применяться, если в исходной задаче удается вычленить «удачный» тетраэдр. Решите следующую задачу.

Задача 14. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с равными ребрами. Чему равен угол между плоскостями грани BCC_1B_1 и сечения ACB_1?

Вычисление двугранного угла с помощью пространственной теоремы косинусов для призмы

Из курса планиметрии вы, конечно, знаете теорему косинусов: в треугольнике ABC со сторонами a, b, c

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Замечательно, что для треугольной призмы есть похожее утверждение, а именно: в треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ выполняется равенство

$$\cos\angle AA_1 = \frac{S_b^2+S_c^2-S_a^2}{2S_bS_c}, \qquad (11)$$

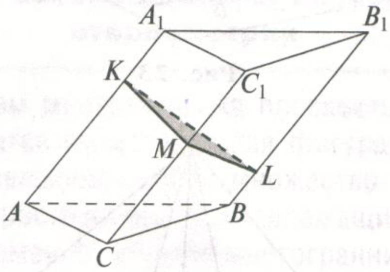
где S_a, S_b, S_c — площади боковых граней призмы, содержащих стороны a, b и c треугольника ABC соответственно, $\angle AA_1$ — двугранный угол между боковыми гранями с общим ребром AA_1.

Замечание 10. Если посмотреть на треугольную призму сверху (или снизу), мы увидим треугольник ее основания. Можно сказать также, что треугольная призма — это «утолщенный» треугольник, а треугольник — это «сплющенная» призма. При «утолщении» треугольника его стороны превращаются в боковые грани призмы — параллелограммы определенной площади, а угол треугольника «становится» двугранным углом между боковыми гранями призмы.

---

* *Прямоугольный тетраэдр* — это такой тетраэдр, в котором в одной из вершин сходятся три прямых плоских угла.

Но все эти наглядные представления не избавляют нас от необходимости обоснования формулы (9). Оно несложно, начать доказательство можно с проведения плоскости, перпендикулярной боковому ребру призмы (рис. 19), — для получения линейного угла **[?]**.



KLM — перпендикулярное сечение

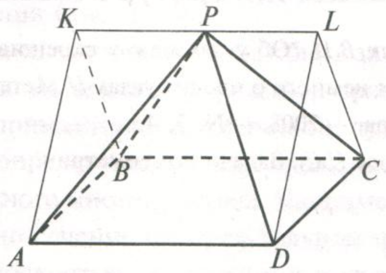
Рис. 19

Посмотрите, как с помощью формулы (9) можно решать задачу о нахождении двугранного угла.

Задача 15. Основанием треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC, а ее боковые грани AA_1B_1B и AA_1C_1C — ромбы с острым углом A. Чему равен угол между этими гранями, если угол ромба равен φ?

Подсказка. Прежде чем применять равенство (9), покажите, что грань BB_1C_1C является квадратом.

Задача 16. Основанием четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$ с углом α при вершине A, боковое ребро AA_1 образует с ребрами основания один и тот же угол φ. Чему равен угол между боковыми гранями призмы?



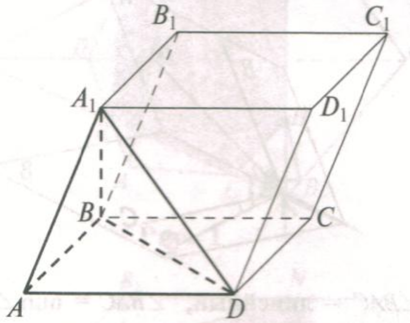
ABKDCL — прямая призма

Рис. 20

Вернемся к задаче 6. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна стороне основания. Чему равен угол между плоскостями ее противоположных боковых граней?

Подсказка. Достройте эту пирамиду до прямой призмы (рис. 20).

Замечание 11. Дополнительные построения чаще всего совершаются в заданной фигуре. Реже мы рассматриваем данную фигуру как часть другой фигуры, которую еще надо построить (я об этом уже упоминал). В стереометрических задачах иногда рассматривают тетраэдр как часть параллелепипеда (рис. 21).



Тетраэдр A_1ABD — часть параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$

Рис. 21

Я привожу другое решение задачи 6, чтобы указать на такую возможность. Вы спросите — зачем это здесь делать, ведь и без такого дополнительного построения задача решается несложно? Вы правы, но о приеме достраивания знать полезно. Вам обязательно попадутся задачи, когда он сработает.

Совсем уж экзотический способ вычисления двугранного угла основан на экстремальном свойстве последнего. Дело обстоит так: линейный угол двугранного угла — наибольший, если сравнивать его с углом, лучи которого идут с одной стороны от плоскости его линейного угла, причем так, что образуют с соответствующими сторонами линейного угла равные углы (рис. 22, *а*); он же — наименьший, если сравнивать его с углом, лучи которого идут с разных сторон от плоскости его линейного угла, причем так, что образуют с соответствующими сторонами линейного угла равные углы (рис. 22, *б*). Эти утверждения несложно доказать **[?]**.