О. А. Иванов, Т. Ю. Иванова, К. М. Столбов

Алгебра в 9 классе

Уроки обобщающего повторения

Санкт-Петербург
2013

УДК 51(xxx)
ББК XX.xxXX
X??

Иванов О. А., Иванова Т. Ю., Столбов К. М.

X?? Алгебра в 9 классе. Уроки обобщающего повторения.— СПб: 2013.— ??? с., ил.

ISBN ???-?-??????-??-?

Пособие содержит материалы, предназначенные для проведения углубленного повторения основных тем курса алгебры 8-го класса: числовые неравенства, преобразования алгебраических выражений, линейная функция, модуль, квадратичная функция. Оно будет полезно учителям математики, работающим в школах с углубленным преподаванием математики, родителям школьников, а также преподавателям и студентам математических факультетов педагогических университетов.

ББК XX.xxXX

Содержание

Предисловие

Учителя, работающие в школах с углубленным преподаванием математики, часто встречаются с такой ситуацией. Предположим, что вы набрали учащихся в 9-й класс. Конечно, они изучали в 8 классе такую тему, как «Модуль числа». Однако можете ли вы быть уверенными, что все учащиеся понимают, к примеру, что при решении уравнения $|2x-1| = |x+1|$ никаких «случаев» разбирать не надо? Или же что они сразу скажут, что уравнение $|x+4| + |x-1| = 3$ не имеет решений, поскольку сумма расстояний от точки числовой оси до точек $A(-4)$ и $B(1)$ не может быть меньше расстояния между самими этими точками, равного 5? Скорее всего, можно быть уверенным в обратном. А именно, что знание учащимися понятия (определения) *модуля числа* является, в лучшем случае, формальным. Другое дело, что странного в этом ничего нет, как нет ничего и страшного. Изученный ранее материал просто надо повторить.

Эта небольшая книга как раз и посвящена изложению нашего подхода к повторению в 9 классе основных (на наш взгляд) тем курса алгебры 8 класса. Мы выбрали такие темы, как: «Числовые неравенства», «Алгебраические преобразования», «Линейная функция», «Модуль», «Квадратичная функция». Для нас представляется важным, что повторение знакомого учащимся материала предоставляет возможность, условно говоря, *начать углубленное обучение математике*. Все понятия известны, привычны и пугающе не звучат. Давайте устанавливать взаимосвязи между ними, демонстрировать разнообразные их интерпретации, проводить логические рассуждения, решать задачи разными способами. Чем больше идей знакомы учащемуся, тем проще ему найти подход к решению новой задачи, тем более гибким будет его мышление. По этой причине представленные в этой книге решения задач мы стремились сделать как можно более разнообразными. Например, в задании 8 темы 4 — «Модуль» учащимся предлагается исследовать три однотипных уравнения. Каждое из этих уравнений решается своим способом (естественно, применимым для решения каждого из двух других уравнений). Во многих случаях геометрическая (графическая) интерпретация решения облегчает его понимание, поэтому в книге достаточно много рисунков.

Каждый из пяти разделов книги имеет одинаковую структуру. Вначале приведены задачи, которые мы предлагаем дать учащимся в качестве домашнего задания с тем, чтобы по результатам его выполнения можно было оценить уровень понимания ими этой темы. Поскольку эти задачи, естественно, не охватывают все идеи и методы, которые следовало бы с ними обсудить, далее мы приводим (с подробными решениями) дополнительные задачи.

Для того, чтобы учителю было проще оценить результат проведенных занятий, мы включили в каждый раздел книги по две проверочные работы двух уровней; в каждой из этих работ варианты 1 и 2 являются более простыми, варианты 3 и 4 — несколько более сложными (решения задач проверочных работ приведены в отдельном разделе). Хотим предупредить читателя, что авторы целенаправленно включили в варианты 1 и 2 некоторые более сложные задачи по причине того, что уже одни их формулировки являются поучительными. Возможно, что естественным подходом при составлении самостоятельных работ для конкретного класса будет перемешивание работ разных уровней, когда часть задач берется из работы одного уровня, часть — из другого. Как другой вариант — давать более сложные работы в качестве домашних заданий.

Кроме того, в книге имеются два дополнения общего методико-педагогического характера, в которых сделана попытка описать (с двух сторон) методы построения процесса обучения математике в школе, направленного на развитие математического мышления учащихся. Конечно, каждый из учителей, по крайней мере те из них, которые работают в школах с углубленным изучением математики, ставит перед собой эту цель. Однако практика показывает, что достигается она крайне редко. А причина в том, что, как неоднократно писал старший (по возрасту) из авторов этой книги, «несмотря на более чем 50-летнюю практику, *система* углубленного обучения математике так и не была создана». Когда мы (авторы этой книги) говорим о развитии математического мышления, то имеем в виду те его характеристики, о которых писал В. А. Крутецкий[1]:

1) способность к формализации математического материала и оперированию формальными структурами, структурами отношений и связей;
2) способность обобщать математический материал, вычленять главное, видеть общее во внешне различном;
3) способность к оперированию числовой и знаковой символикой;
4) способность к последовательному логическому рассуждению, связанному с потребностью в доказательствах;

[1] Психология математических способностей школьников. М.: Просвещение, 1968.

5) способность сокращать процесс рассуждения, мыслить свернутыми структурами;
6) способность к обратимости мыслительного процесса;
7) гибкость мышления, свобода от сковывающего влияния трафаретов и шаблонов;
8) математическая память, память на обобщения, формализованные структуры, логические схемы;
9) способность к пространственным представлениям.

Любому человеку понятно, что нельзя сказать: «А на сегодняшнем уроке мы с вами будем тренироваться для того, чтобы ваше мышление стало более гибким». Невозможно представить, чтобы одна (или две-три) подборки задач сильно поспособствовали бы развитию «способности к обратимости мыслительного процесса». Развитие всех этих качеств есть результат длительного процесса. Однако, как это часто бывает в математике (и в жизни), обратное утверждение неверно — не всякий длительный процесс обучения приведет к их развитию. На языке сегодняших реалий можно сказать так. Да, выпускник, обладающий развитым математическим мышлением, при решении задач группы С Единого государственного экзамена по математике будет иметь преимущество перед теми, кто подобными качествами не обладает. С другой стороны, тренировка в решении задач этого экзамена никоим образом не будет способствовать развитию этих качеств, уж скорее наоборот. Цель включенных в эту книгу «Дополнений» — постараться дать описание как характеристик используемых в обучении задач, так и методики построения всего процесса обучения математике, которые способствовали бы развитию мышления учащихся.

Совсем простой пример. Если мы поставим вопрос о числе решений уравнения $|x+1| = a$, то ученику придется *рассуждать*, поскольку число решений этого уравнения зависит от того: $a < 0$, $a = 0$ или же $a > 0$. Проста и интересна графическая интерпретация данного уравнения. Или же, пусть надо сравнить друг с другом числа $5123 \cdot 5125$ и 5124^2. Вместо того, чтобы вычислять два произведения, можно просто увидеть, что неравенство $5123 \cdot 5125 < 5124^2$ есть частный случай неравенства $x^2 - 1 < x^2$. А число $5122 \cdot 5126$ можно записать в виде $x^2 - 4$, следовательно, оно меньше двух предыдущих чисел. Несмотря на всю его простоту, это уже — *математическое* рассуждение.

Самое опасное при обучении математике в школе — это загнать учащихся в *прокрустово ложе* используемых *методов, схем и шаблонов*.

Тема 1. Свойства числовых неравенств

Диагностическая домашняя работа

1. Найдите целую часть числа: а) $\sqrt{131}$; б) $\sqrt[3]{131}$; в) $\sqrt[5]{131}$.

2. Расположите следующие числа в порядке возрастания:
$\frac{3}{2}$; $\frac{21}{16}$; $\frac{22}{15}$; $\frac{24}{17}$.

3. Расположите следующие числа в порядке возрастания:
5; $2\sqrt{7}$; $3\sqrt{3}$; $\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

4. Выясните, верно ли, что если $a \leqslant 1$, то: а) $2a+1<4$; б) $5-3a \leqslant 2$; в) $a^2 \leqslant a$; г) если дополнительно известно, что $a \neq 0$, то $\frac{1}{a} \geqslant 1$.

5. Выясните, верно ли, что если $a<3$ и $b<2$, то: а) $a+b<5$; б) $ab<6$; в) $a-b>1$; г) $\frac{a}{b}<\frac{3}{2}$.

6. Выясните, верно ли, что если $x+2y \geqslant 3$ и $2x+y \geqslant 3$, то: а) $x+y \geqslant 2$; б) $x \geqslant y$; в) $y \geqslant x$; г) $5x+4y \geqslant 9$.

7. Выясните, верно ли, что если $x+y \geqslant 2$, то: а) $x+2y \geqslant 3$; б) $xy \geqslant 1$; в) $x^2+y^2 \geqslant 2$.

8. Объясните, что произойдет с величиной положительной рациональной дроби, если ее числитель увеличить на 1, тогда как знаменатель — на 2.

Решения задач диагностической работы и их обсуждение

1. а) Так как $11^2=121<131<144=12^2$, то $11<\sqrt{131}<12$, поэтому $\left[\sqrt{131}\,\right]=11$. б) Аналогично, $5^3=125<131<216=6^3$, значит, $\left[\sqrt[3]{131}\,\right]=5$. в) Ответ: $\left[\sqrt[5]{131}\,\right]=2$.

2. Если числитель дроби уменьшить или же увеличить ее знаменатель, то дробь уменьшится, поэтому $\frac{3}{2}=\frac{24}{16}>\frac{21}{16}$ и $\frac{3}{2}=\frac{24}{16}>\frac{24}{17}$. Сравним между собой дроби $\frac{21}{16}$ и $\frac{24}{17}$. Вроде бы первая из них меньше второй. Ясно, что достаточно сравнить $\frac{5}{16}$ с $\frac{7}{17}$.

$$\frac{7}{17}-\frac{5}{16}=\frac{112-85}{17\cdot 16}=\frac{27}{16\cdot 17}>0,$$

таким образом, $\frac{21}{16}<\frac{24}{17}<\frac{3}{2}$. Ясно, что $\frac{22}{15}>\frac{21}{16}$, поскольку у второй дроби числитель меньше, а знаменатель больше, чем у первой. Так как

$\frac{22}{15} = \frac{44}{30}$ и $\frac{3}{2} = \frac{45}{30}$, то $\frac{22}{15} < \frac{3}{2}$. Осталось сравнить дроби $\frac{22}{15}$ и $\frac{24}{17}$ (сравните с задачей 8). Имеем $\frac{22}{15} > \frac{24}{17}$, или $\frac{11}{15} > \frac{12}{17}$, или $11 \cdot 17 > 12 \cdot 15$, что верно, так как $187 > 180$.

Таким образом, мы выяснили, что $\frac{21}{16} < \frac{24}{17} < \frac{22}{15} < \frac{3}{2}$.

3. Да, так как $5 = \sqrt{25}$, $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$ и $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$, то $5 < 3\sqrt{3} < 2\sqrt{7}$. Так как $2 < \sqrt{5} < 3$ и $2 < \sqrt{7} < 3$, то $4 < \sqrt{5}+\sqrt{7} < 6$. Конечно, могут помочь вычисления «на калькуляторе», но давайте покажем без них, что $\sqrt{5} + \sqrt{7} < 5$. После возведения в квадрат обеих частей этого неравенства получим неравенство $2\sqrt{35} < 13$, которое верно, так как $2\sqrt{35} = \sqrt{140} < 13$.

Таким образом, мы выяснили, что $\sqrt{5} + \sqrt{7} < 5 < 3\sqrt{3} < 2\sqrt{7}$.

4. а) Так как $a \leqslant 1$, то $2a \leqslant 2$, поэтому $2a + 1 \leqslant 3$, что, в свою очередь, меньше 4.

б) Нет, не верно, к примеру, при $a = 0$. В действительности все в точности наоборот. Так как $a \leqslant 1$, то $3a \leqslant 3$, поэтому $-3a \geqslant -3$, следовательно, $5 - 3a \geqslant 2$.

в) Нет, не верно. Казалось бы, умножив обе части неравенства $a \leqslant 1$ на a, мы и получим, что $a^2 \leqslant a$. Однако это так, только если a — положительное число или нуль. Если же, к примеру, $a = -3$, то $a^2 = 9 > a$.

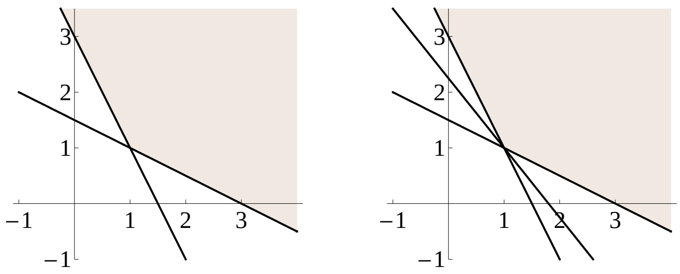
г) Нет, не верно. Данное неравенство выполняется только при дополнительном условии положительности числа a. Если же $a < 0$, то $\frac{1}{a} < 0 < 1$.

5. Как и предыдущая задача, эта задача на свойства числовых неравенств. Конечно, неравенство а) верно, поскольку из того, что $a < 3$ и $b < 2$, следует, что $a + b < 3 + 2 = 5$. Конечно, неравенство б) выполняется не для всех $a < 3$ и $b < 2$. Если дополнительно предположить, что эти числа — положительные, то тогда по известному свойству $ab < 3 \cdot 2 = 6$. Однако при $a = -4$ и $b = -2$ получаем, что $ab = 8 > 6$. в) Неравенство $a - b > 1$, конечно, выполнено не для всех чисел $a < 3$ и $b < 2$, так как их разность может быть сколь угодно отрицательной. Обычно это формулируют так: «неравенства одного знака можно складывать, но нельзя вычитать». г) Конечно, неверно, поскольку «делить» неравенства нельзя. Например, если $a = 2$ и $b = 1$, то $\frac{a}{b} = 2 > \frac{3}{2}$.

6. а) Да, верно. Сложив данные неравенства, получим неравенство $3x + 3y \geqslant 6$, или $x + y \geqslant 2$.

Конечно, неравенства б) и в) не обязаны быть верными. Действительно, если $x = -1$ и $y = 6$, то $x+2y = 11 \geqslant 3$ и $2x+y = 4 \geqslant 3$, однако $x < y$. Если $x = 6$ и $y = -1$, то, наоборот, мы получим, что $x > y$. Таким образом, для некоторых пар $(x; y)$, удовлетворяющих данным неравенствам, выполнено неравенство б), тогда как для других пар — неравенство в).

Полезно посмотреть на геометрическую интерпретацию системы из двух данных неравенств. На левом рисунке изображено множество всех точек с координатами $(x; y)$, таких, что $2x + y \geqslant 3$ и $x + 2y \geqslant 3$. Очевидно, что в этом множестве лежат как точки, для которых $x > y$, так и точки, для которых $y > x$.



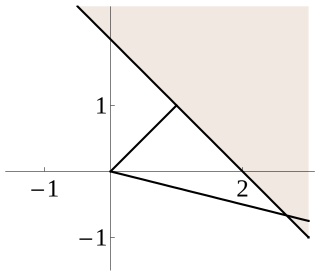
г) Неравенство $5x + 4y \geqslant 9$ верно, что нетрудно доказать алгебраически. Действительно, так как $x + 2y \geqslant 3$, то $2x + 4y \geqslant 6$. Сложив полученное неравенство с неравенством $2x + y \geqslant 3$, мы и получим неравенство $4x + 5y \geqslant 9$. С другой стороны, это рассуждение несколько искусственно.

Это неравенство можно также проинтерпретировать геометрически. На правом рисунке в дополнение к множеству, заданному системой неравенств $2x + y \geqslant 3$ и $x + 2y \geqslant 3$, изображена прямая, заданная уравнением $5x + 4y = 9$. Эта прямая проходит через точку с координатами $(1; 1)$ — «угловую» точку данного множества. Так как все его точки лежат выше прямой $5x + 4y = 9$, то для их координат справедливо неравенство $5x + 4y \geqslant 9$.

7. а) Конечно, неравенство $x + 2y \geqslant 3$ не обязано быть верным. Достаточно взять, к примеру, $x = 3$ и $y = -1$. Неравенство $x + y \geqslant 2$ справедливо, а неравенство $x + 2y \geqslant 3$ — нет.

б) Точно так же, взяв $x = 3$ и $y = -1$, получим, что $xy = -3 < 1$.

в) Неравенство $x^2 + y^2 \geqslant 2$ верно, что мы покажем двумя способами. Расстояние до начала координат от любой точки изображенной на рисунке полуплоскости не меньше, чем длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $x + y = 2$.



Поскольку длина этого перпендикуляра — это длина диагонали единичного квадрата, то она равна $\sqrt{2}$, таким образом, $\sqrt{x^2 + y^2} \geqslant \sqrt{2}$, т. е. $x^2 + y^2 \geqslant 2$.

Второй способ доказательства основан на использовании стандартных неравенств. Поскольку $(x - y)^2 \geqslant 0$, то $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$, поэтому $2x^2 + 2y^2 \geqslant 2xy + x^2 + y^2$, т. е. $2(x^2 + y^2) \geqslant (x + y)^2$. Так как $x + y \geqslant 2$, то $(x + y)^2 \geqslant 4$, значит, $2(x^2 + y^2) \geqslant 4$, откуда и следует требуемое неравенство.

8. Пусть дана дробь $\frac{k}{n}$. Требуется выяснить, какая из дробей больше, $\frac{k}{n}$ или $\frac{k+1}{n+2}$. Рассмотрим их разность:

$$\frac{k}{n} - \frac{k+1}{n+2} = \frac{k(n+2) - (k+1)n}{n(n+2)} = \frac{2k - n}{n(n+2)}\,.$$

Таким образом, если $2k > n$, то первая дробь больше второй, если же $2k < n$, то первая дробь меньше второй. Другими словами, если $\frac{k}{n} > \frac{1}{2}$, то при увеличении числителя этой дроби на 1 и увеличении ее знаменателя на 2 мы получим дробь, которая меньше исходной. Если же $\frac{k}{n} < \frac{1}{2}$, то полученная дробь будет больше исходной.

Понятия, методы и идеи

Как видно из приведенных решений, при решении задач диагностической работы использовались:

1) свойства числовых неравенств;

2) действия с неравенствами;

3) геометрическая интерпретация неравенств.

В дополнение к ним отметим еще такие факты, методы и понятия, как:

4) неравенства между средними двух чисел;

5) использование неравенств для оценки значений выражений;

6) определение отношения «a больше b».

Неравенства между средними двух чисел

Задача 9. Докажите, что для любых положительных чисел a и b справедливы неравенства:

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,.$$

При этом равенства имеют место тогда и только тогда, когда $a = b$.

Докажем вначале среднее неравенство — неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим. Проще всего сделать замену $x = \sqrt{a}$ и $y = \sqrt{b}$, после которой мы получим неравенство $xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$, которое очевидно верно, так как приводится к виду $(x-y)^2 \geqslant 0$. Равенство верно, если $x = y$, т. е. если $a = b$.

Первое из неравенств — неравенство между средним гармоническим и средним геометрическим — приводится к уже доказанному,

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \iff \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leqslant 1 \iff \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}\,.$$

Третье из этих неравенств — это неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным. Для его доказательства достаточно возвести в квадрат обе его части и провести цепочку простых алгебраических преобразований:

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2} \iff a^2+b^2+2ab \leqslant 2a^2+2b^2 \iff$$
$$\iff a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \geqslant 0.$$

Опять-таки, равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$.

Использование неравенств для оценки значений выражений

Задача 10. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то для любых положительных чисел x справедливо неравенство $ax + \frac{b}{x} \geqslant 2\sqrt{ab}$, при этом равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

В силу неравенства $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ справедливо неравенство $ax + \frac{b}{x} \geqslant \geqslant 2\sqrt{ax \cdot \frac{b}{x}} = 2\sqrt{ab}$. Равенство возможно, если $ax = \frac{b}{x}$, т. е. если $x^2 = \frac{b}{a}$.

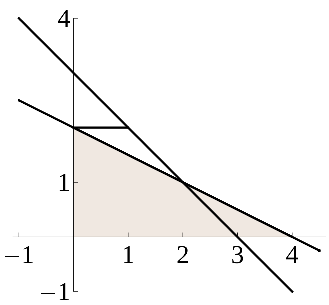
Задача 11. Проведите через точку $M(2;1)$ прямую, отсекающую от первого координатного угла треугольник наименьшей площади.

Прямая, проходящая через данную точку и пересекающая оси абсцисс и ординат в точках с положительными координатами, задается уравнением $y = 1-a(x-2) = 2a+1-ax$, где $a > 0$. Точкой ее пересечения с осью ординат является точка $A(0; 2a+1)$, точкой пересечения с осью абсцисс — точка $B\left(\frac{2a+1}{a}; 0\right)$. Таким образом, надо найти значение a, при котором выражение $\frac{(2a+1)^2}{2a}$ принимает наименьшее значение. Имеем

$$\frac{(2a+1)^2}{2a} = \frac{4a^2+4a+1}{2a} = 2a + \frac{1}{2a} + 2 \geqslant 2 + 2 = 4,$$

в силу неравенства из предыдущей задачи. При этом равенство имеет место при $a = \frac{1}{2}$. Следовательно, искомая прямая задается уравнением $y = \frac{4-x}{2}$.

Интересно, что рассуждать можно и геометрически, однако при этом будет труднее угадать ответ. На следующем рисунке закрашенный треугольник имеет наименьшую площадь. Существенно то, что данная точка M является серединой его гипотенузы.



Проведем другую прямую через данную точку. Ясно, что площадь малого закрашенного треугольника равна площади малого незакрашенного треугольника, поэтому площадь треугольника, отсеченного второй прямой от первого координатного угла, больше площади исходного (большого закрашенного) треугольника.

Определение отношения «a больше b»

Всяким формальным определениям должно быть свое место и свое время. Ясно, что «5 яблок — это больше, чем 4 яблока», «если расстояние между городами A и B равно 300 км, а расстояние между городами A и C равно 345 км, то город C расположен дальше от города A, чем город B», и так далее. Когда мы располагаем точки на числовой оси, то «чем правее стоит точка», тем больше соответствующее ей число. На первых порах обучения математике таких представлений о том, что значит, что одно число больше другого, вполне достаточно. Однако с того момента, как учащиеся начинают активно использовать *свойства числовых неравенств*, хорошо бы дать им понять, каким образом можно *доказывать* их свойства. А всякое доказательство требует *определения* понятий, свойства которых мы собираемся доказывать.

Итак, дадим определение. Будем говорить, что *число a больше числа b* и писать $a > b$, если разность $a - b$ этих чисел есть число положительное. Если $a - b$ есть отрицательное число, то будем говорить, что *число a меньше числа b* и писать $a < b$. Так как $a-b = -(b-a)$, то если $a > b$, то $b < a$. Поскольку числа бывают положительные, отрицательные и нуль, то для любых различных чисел a и b их разность $a-b$ является либо положительным, либо отрицательным числом. Поэтому если $a \neq b$, то либо $a > b$, либо $a < b$. В соответствии со введенным определением условие положительности (отрицательности) числа a можно записать при помощи неравенства $a > 0$ (соответственно, $a < 0$).

Пусть $a > b$ и $b > c$. Докажем, что тогда $a > c$. Сумма положительных чисел есть положительное число. Поэтому из положительности разностей $a - b$ и $b - c$ следует положительность их суммы $(a - b) + (b - c) = a - c$, что и означает, что $a > c$.

Далее нам потребуются следующие свойства произведения чисел: произведение двух чисел одинаковых знаков есть число положительное, а произведение чисел противоположных знаков есть отрицательное число.

Задача 12. Докажите, что: 1) если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$; 2) если $a > b$ и число c — положительное, то $ac > bc$; 3) если $a > b$ и число c — отрицательное, то $ac < bc$; 4) если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$.

1) Так как $(a+c)-(b+d) = (a-b)+(c-d)$, то из положительности разностей $a - b$ и $c - d$ следует положительность их суммы, поэтому $a + c > b + d$.

Заметим, что сумма чисел разных знаков может быть как положительным, так и отрицательным числом. Поэтому, если про числа известно только то, что $a > b$ и $c < d$, то мы не можем сделать никакого вывода о том, какое из чисел больше, $a + c$ или $b + d$.

2) Так как по предположению числа $a - b$ и c положительны, то положительно и их произведение $c(a - b) = ac - bc$, откуда и следует, что $ac > bc$.

3) В этом случае число $a-b$ положительно, однако число c отрицательно, поэтому и их произведение $c(a-b) = ac-bc$ есть отрицательное число, значит $ac < bc$.

4) Так как $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$. Так как $c > d$ и $b > 0$, то $bc > bd$. Следовательно, $ac > bd$.

Дополнительные задачи

1.1. Даны положительные числа a, b, c, d. Известно, что $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Докажите, что $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

1.2. Найдите среднюю скорость автомобиля на пути из пункта A в пункт B, если: а) половину времени он ехал со скоростью a км/час, а другую половину — со скоростью b км/час; б) половину расстояния от A до B он проехал со скоростью a км/час, а другую половину — со скоростью b км/час.
Выясните, в каком случае автомобиль затратил на путь меньше времени.

1.3. Расположите в порядке возрастания числа:
а) 2013^2, $2012 \cdot 2014$, $2011 \cdot 2015$; б) $\frac{2}{2013}$, $\frac{1}{2012} + \frac{1}{2014}$, $\frac{1}{2011} + \frac{1}{2015}$.

1.4. Расположите в порядке возрастания числа:
а) 6, $\sqrt{8} + \sqrt{10}$, $\sqrt{7} + \sqrt{11}$; б) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{11}}$.

1.5. Докажите, что $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{26} > 80$.

1.6. Все числа в задаче предполагаются положительными.
а) Докажите, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$.
б) Найдите наименьшее значение выражения $a + \frac{1}{a+1}$.

1.7. Все числа в задаче предполагаются положительными. Докажите, что: а) $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$; б) если $abcd = 1$, то $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) \geqslant 16$; в) $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.

1.8. а) Докажите, что $\sqrt{7} < \sqrt[3]{5} + 1$. б) Выясните, какое из чисел больше: $\frac{5}{3}$ или $\sqrt[3]{5}$. в) Выясните, какое из чисел больше: $\frac{8}{3}$ или $\sqrt{7}$.

1.9. Выясните, какая из дробей больше: а) $\frac{125}{124}$ или $\frac{512}{511}$; б) $\frac{123}{124}$ или $\frac{510}{511}$. в) Докажите, что $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{1024} < 1$.

1.10. а) Докажите, что если $x^2 + y^2 \leqslant 1$, то $x^4 + y^4 \leqslant 1$. б) Верно ли обратное утверждение?

1.11. Докажите, что кривая, заданная уравнением $x^4 + y^4 = 1$, лежит: а) в квадрате со стороной длины 2; б) вне единичного круга с центром в начале координат.

1.12. Периметр прямоугольного треугольника равен 6. Докажите, что его площадь меньше 1,8.

Варианты самостоятельных работ по теме 1

Проверочная работа 1

Вариант 1

1. Расположите в порядке возрастания числа:
а) $\frac{13}{18}$, $\frac{12}{19}$, $\frac{2}{3}$; б) $\sqrt[8]{6}$, $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[7]{7}$.

2. Выясните, верно ли, что если $a > b$, то:
а) $3a > 2b$; б) $a^3 > b^3$; в) $a^9 > b^3$.

3. Известно, что $x \geqslant 2$ и $y \geqslant -1$. Найдите все значения, которые может принимать выражение: а) $x + 2y$; б) $2x - y$.

4. Известно, что $-2 \leqslant a \leqslant 3$ и $-4 \leqslant b \leqslant 2$. Найдите наибольшее и наименьшее значения произведения чисел a и b. Ответ обоснуйте.

5. Найдите наибольшее значение частного от деления большего из двух последовательных нечетных натуральных чисел на меньшее из них.

Вариант 2

1. Расположите в порядке возрастания числа:
а) $\frac{18}{23}$, $\frac{17}{24}$, $\frac{3}{4}$; б) $\sqrt[5]{9}$, $\sqrt[7]{7}$, $\sqrt[9]{5}$.

2. Выясните, верно ли, что если $a > b$, то:
а) $5a > 3b$; б) $a^2 > b^2$; в) $a^4 > b^3$.

3. Известно, что $x \leqslant 3$ и $y \leqslant -1$. Найдите все значения, которые может принимать выражение: а) $2x + y$; б) $x - 2y$.

4. Известно, что $-3 \leqslant a \leqslant 2$ и $-4 \leqslant b \leqslant 2$. Найдите наибольшее и наименьшее значения произведения чисел a и b. Ответ обоснуйте.

5. Найдите наименьшее значение частного от деления меньшего из двух последовательных нечетных натуральных чисел на большее из них.

Вариант 3

1. Верно ли, что если $a > b$, то $\frac{a}{b} > 1$? Ответ обоснуйте.

2. Расположите в порядке возрастания числа $\frac{20}{11}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$.

3. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \sqrt{x-4} + 2x$.

4. Известно, что $x \geqslant 2$ и $y \leqslant 1$. Найдите все значения, которые может принимать выражение: а) $2x - y$; б) $x + 2y$; в) xy.

5. Положительное число умножили на 4 и к результату прибавили число, обратное исходному. Найдите наименьшее значение полученного в итоге числа.

Вариант 4

1. Верно ли, что если $a > b$, то $\frac{b}{a} < 1$? Ответ обоснуйте.

2. Расположите в порядке возрастания числа $\frac{20}{9}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{9}$.

3. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 2\sqrt{x+3} + x$.

4. Известно, что $x \leqslant 3$ и $y \geqslant 1$. Найдите все значения, которые может принимать выражение: а) $x - 2y$; б) $2x + y$; в) xy.

5. К положительному числу прибавили удевятеренное обратное ему число. Найдите наименьшее значение полученного в результате числа.

Проверочная работа 2

Вариант 1

1. а) Докажите, что если $x \geqslant y + 1$ и $y \geqslant 2$, то $x \geqslant 3$ и $x + y \geqslant 5$. б) Изобразите на плоскости множество точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств $x \geqslant y + 1$ и $y \geqslant 2$.

2. Для координат $(x; y)$ точек множества, определенного в предыдущей задаче, найдите наименьшее значение выражения: а) $x^2 + y^2$; б) $2x - y$.

3. Докажите, что: а) $\sqrt{5} + \frac{3}{\sqrt{5}} > 2\sqrt{3}$; б) $\frac{1}{247} + \frac{1}{253} > \frac{1}{125}$.

4. Докажите, что если $x^2 + y^2 \leqslant 9$, то $x + y \leqslant 3\sqrt{2}$.

5. Найдите наибольшее значение площади прямоугольного треугольника, длина гипотенузы которого равна 3.

Вариант 2

1. а) Докажите, что если $x \leqslant y - 1$ и $y \leqslant -2$, то $x \leqslant -3$ и $x + y \leqslant -5$. б) Изобразите на плоскости множество точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств $x \leqslant y - 1$ и $y \leqslant -2$.

2. Для координат $(x; y)$ точек множества, определенного в предыдущей задаче, найдите:
а) наименьшее значение выражения $x^2 + y^2$;
б) наибольшее значение выражения $x + 2y$.

3. Докажите, что: а) $\sqrt{3} + \frac{5}{\sqrt{3}} > 2\sqrt{5}$; б) $\frac{1}{357} + \frac{1}{363} > \frac{1}{180}$.

4. Докажите, что если $x + y \geqslant 5\sqrt{2}$, то $x^2 + y^2 \geqslant 25$.

5. Найдите наибольшее значение площади прямоугольника, длина диагонали которого равна 5.

Вариант 3

1. Докажите, что если $2x \leqslant y+1$ и $2y \leqslant x+4$, то: а) $x+y \leqslant 5$; б) $x \leqslant 2$.

2. Про числа x и y известно, что $y \geqslant 0$, $y \leqslant x+2$ и $x+2y \leqslant 4$. а) Найдите все возможные значения, которые может принимать каждое из этих чисел. б) Изобразите на плоскости множество точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют данным неравенствам.

3. Про положительную дробь известно, что после того, как ее числитель увеличили на 3, а знаменатель — на 2, было получено число, большее этой дроби. Найдите возможные значения исходной дроби.

4. Найдите возможную площадь участка земли прямоугольной формы, если известно, что окружающая его изгородь имеет длину не менее 100, но не более 120 метров.

5. Найдите возможные значения длины гипотенузы прямоугольного треугольника, сумма длин катетов которого равна 6.

Вариант 4

1. Докажите, что если $2x \geqslant y+1$ и $2y \geqslant x+4$, то: а) $x+y \geqslant 5$; б) $y \geqslant 3$.

2. Про числа x и y известно, что $x \geqslant 0$, $y \geqslant x-2$ и $2x+y \leqslant 4$. а) Найдите все возможные значения, которые может принимать каждое из этих чисел. б) Изобразите на плоскости множество точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют данным неравенствам.

3. Про положительную дробь известно, что после того, как ее числитель увеличили на 2, а знаменатель — на 3, было получено число, меньшее этой дроби. Найдите возможные значения исходной дроби.

4. Найдите возможную площадь участка земли прямоугольной формы, если известно, что окружающая его изгородь имеет длину не менее 140, но не более 160 метров.

5. Найдите возможные значения длины гипотенузы прямоугольного треугольника, сумма длин катетов которого равна 4.

Ответы, решения, комментарии

1.1. Умножив обе части данного неравенства $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ на произведение bd, получим неравенство $ad < bc$. Теперь рассмотрим разность

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ab+bc-ab-ad}{b(b+d)} = \frac{bc-ad}{b(b+d)},$$

которая положительна. Второе неравенство доказывается аналогичным образом:

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc-ad}{d(b+d)} > 0.$$

Обратите внимание, что из этой задачи следует, например, что, так как $1 = \frac{2}{2} < \frac{22}{15}$, то $\frac{24}{17} < \frac{22}{15}$, или что если $\frac{k}{n} < \frac{1}{2}$, то $\frac{k}{n} < \frac{k+1}{n+2}$.

1.2. а) Обозначим за s расстояние от A до B, а за t время, за которое автомобиль проехал весь путь. Расстояние, которое он проехал со скоростью a км/час, равно $\frac{at}{2}$, а расстояние, которое он проехал со скоростью b км/час, равно $\frac{bt}{2}$. Поэтому $\frac{at}{2} + \frac{bt}{2} = s$, откуда $\frac{s}{t} = \frac{a+b}{2}$. Таким образом, в данном случае средняя скорость автомобиля равна среднему арифметическому его скоростей a и b.

б) В тех же обозначениях получаем уравнение $\frac{s}{2a} + \frac{s}{2b} = t$, откуда $\frac{s}{t} = \frac{2ab}{a+b}$. Значит, в этом случае средняя скорость автомобиля равна среднему гармоническому его скоростей a и b.

На последний из вопросов можно отвечать двумя способами. Известно, что среднее арифметическое не меньше среднего гармонического, поэтому в первом случае средняя скорость автомобиля больше, чем во втором случае. Следовательно, в первом случае он затратил на весь путь меньше времени, чем во втором.

Второй метод рассуждения является, можно сказать, чисто логическим. Предположим для определенности, что $a > b$. Предположим, что автомобили выехали одновременно и вначале двигались со скоростью, равной a км/час. Первое время они едут рядом, бок о бок. Однако поскольку первый автомобиль затратил одно и то же время на движение со скоростями a и b, то расстояние, которое он проехал со скоростью a км/час, больше половины расстояния между пунктами A и B. Поэтому после того, как автомобили проедут половину пути, первый автомобиль еще некоторое время будет продолжать двигаться с той же скоростью, тогда как скорость второго станет меньше. Следовательно, второй автомобиль отстанет от первого.

1.3. а) Конечно, можно просто взять и посчитать: $2013^2 = 4\,052\,169$, $2012{\cdot}2014 = 4\,052\,168$ и $2011{\cdot}2015 = 4\,052\,165$. Возможно, кто-то удивится, что второе число всего на 1 меньше первого. Однако ничего удивительного в том нет, так как $2012 \cdot 2014 = (2013-1)(2013+1) = 2013^2 - 1$. Аналогичным образом $2011 \cdot 2015 = (2013-2)(2013+2) = 2013^2 - 4$. Таким образом, $2011 \cdot 2015 < 2012 \cdot 2014 < 2013^2$.

б) Так как $\frac{1}{2012} + \frac{1}{2014} = \frac{2\cdot 2013}{2012\cdot 2014}$ и $\frac{1}{2011} + \frac{1}{2015} = \frac{2\cdot 2013}{2011\cdot 2015}$, а $\frac{2}{2013} = \frac{2\cdot 2013}{2013^2}$, то из доказанных в предыдущем пункте неравенств следует, что $\frac{2}{2013} < \frac{1}{2012} + \frac{1}{2014} < \frac{1}{2011} + \frac{1}{2015}$.

С другой стороны, полезно подчеркнуть, что, к примеру, неравенство $2011 \cdot 2015 < 2013^2$ следует из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим. Действительно, если $a = 2011$ и $b = 2015$, то $\frac{a+b}{2} = 2013$. Так как $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$, то $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Таким образом, $2011 \cdot 2015 < 2013^2$.

Аналогично, так как $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \frac{a+b}{2}$, то $\frac{4}{a+b} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, откуда и следует, к примеру, что $\frac{2}{2013} < \frac{1}{2012} + \frac{1}{2014}$.

1.4. а) То, что $\sqrt{8} + \sqrt{10} < 6$ и $\sqrt{7} + \sqrt{11} < 6$, следует из неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным. Далее, естественно ожидать, что чем ближе числа a и b к их среднему арифметическому, тем ближе сумма $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ к числу $\sqrt{2(a+b)}$, которое в данном случае равно 6. Конечно, справедливость неравенства $\sqrt{8} + \sqrt{10} > \sqrt{7} + \sqrt{11}$ можно проверить непосредственно. Возведя обе части в квадрат, получим очевидно верное неравенство $18 + 2\sqrt{80} > 18 + 2\sqrt{77}$. Однако полезно доказать и общее утверждение. Именно, если $a + b = 2m = c + d$ и $c < a < m < b < d$, то $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$.

Для удобства положим $x = m - a$ и $y = m - c$. Тогда $a = m - x$, $b = m + x$ и $c = m - y$, $d = m + y$, где $0 < x < y$. Таким образом, требуется доказать неравенство

$$\sqrt{m-y} + \sqrt{m+y} < \sqrt{m-x} + \sqrt{m+x}\,.$$

Возведя обе его части в квадрат, получим неравенство

$$2m + 2\sqrt{m^2 - y^2} < 2m + 2\sqrt{m^2 - x^2}\,,$$

которое очевидно верно в силу того, что $x^2 < y^2$.

б) В данном случае труднее увидеть, что речь идет снова о неравенстве между средними двух чисел, а именно, о неравенстве между средним гармоническим и средним квадратичным:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,.$$

Если $a=\sqrt{8}$ и $b=\sqrt{10}$, то $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=3$, поэтому $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}<3$, значит,

$$\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{2}{3}\,.$$

Аналогичным образом, $\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{11}}>\frac{2}{3}$. Теперь докажем, что $\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{11}}>$ $>\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{10}}$. В общем случае в обозначениях, введенных в доказательстве неравенства из предыдущего пункта, требуется доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{m-y}}+\frac{1}{\sqrt{m+y}}>\frac{1}{\sqrt{m-x}}+\frac{1}{\sqrt{m+x}}\,.$$

Квадрат левой части этого неравенства равен

$$\frac{1}{m-y}+\frac{1}{m+y}+\frac{2}{\sqrt{m^2-y^2}}=\frac{2m}{m^2-y^2}+\frac{2}{\sqrt{m^2-y^2}}\,.$$

Квадрат его правой части равен

$$\frac{2m}{m^2-x^2}+\frac{2}{\sqrt{m^2-x^2}}\,.$$

Поскольку $x^2<y^2$, то первое число больше второго.

1.5. Ясно, что $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}>3$, $\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{8}>5\cdot2=10$. Далее рассуждаем аналогичным образом, $\sqrt{9}+\sqrt{10}+\ldots+\sqrt{15}>7\cdot3=$ $=21$ и $\sqrt{16}+\ldots+\sqrt{24}>9\cdot4=36$. Наконец, $\sqrt{25}+\sqrt{26}>10$. Сложив полученные неравенства, мы и получим, что данная сумма больше 80.

1.6. а) Конечно, можно умножить обе части на ab, чтобы потом преобразовать к виду $(a-b)^2\geqslant0$. Однако надо добиваться от учащихся, чтобы они видели, что данное неравенство является простым следствием неравенства $x+y\geqslant2\sqrt{xy}$. В данном случае $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{a}$, так что $xy=1$.

б) Так как $a+1+\frac{1}{a+1}\geqslant2$, то $a+\frac{1}{a+1}\geqslant1$. При этом данное выражение равно 1 при $a=0$, следовательно, его наименьшим значением является 1.

1.7. а) Перемножив неравенства $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $b+c \geqslant 2\sqrt{bc}$ и $a+c \geqslant 2\sqrt{ac}$, мы и получим требуемое неравенство.

б) Аналогичным образом, перемножив четыре неравенства вида $a+1 \geqslant 2\sqrt{a}$, мы получим неравенство

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) \geqslant 16\sqrt{abcd} = 16.$$

в) Имеем

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geqslant \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}\,.$$

1.8. б) Так как $5^3 = 125 < 5\cdot 27$, то $5 < 3\sqrt[3]{5}$, поэтому $\sqrt[3]{5} > \frac{5}{3}$. в) Так как $7\cdot 9 < 64$, то $3\sqrt{7} < 8$, поэтому $\sqrt{7} < \frac{8}{3}$. Для доказательства пункта а) осталось заметить, что $\sqrt{7} < \frac{8}{3} = 1 + \frac{5}{3} < 1 + \sqrt[3]{5}$.

Авторы намеренно поставили задание пункта а) на первое место для того, чтобы подсказка не была явной.

1.9. а) Так как $\frac{125}{124} = 1 + \frac{1}{124}$ и $\frac{512}{511} = 1 + \frac{1}{511}$, то $\frac{125}{124} > \frac{512}{511}$.

б) Так как $\frac{123}{124} = 1 - \frac{1}{124}$ и $\frac{510}{511} = 1 - \frac{1}{511}$, то $\frac{123}{124} < \frac{510}{511}$.

в) Добавив к сумме дробь $\frac{1}{1024}$, получим сумму

$$\frac{1}{1024}+\frac{1}{1024}+\frac{1}{512}+\ldots+\frac{1}{2} = \frac{1}{512}+\frac{1}{512}+\frac{1}{256}+\ldots+\frac{1}{2} = \\ = \frac{1}{256}+\frac{1}{256}+\frac{1}{128}+\ldots+\frac{1}{2} = \ldots = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1,$$

следовательно, исходная сумма меньше 1. Конечно, можно предложить учащимся обобщить эту задачу.

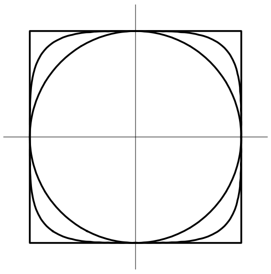
1.10. а) Поскольку числа x^2 и y^2 неотрицательны и их сумма равна 1, то каждое из них не превосходит 1, следовательно, $x^4 \leqslant x^2$ и $y^4 \leqslant y^2$, поэтому $x^4 + y^4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1$.

б) Обратное утверждение неверно. Например, если $x = y = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, то $x^4 + y^4 = 1$, тогда как $x^2 + y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 1$.

1.11. Если $x^4 + y^4 = 1$, то $x^4 \leqslant 1$ и $y^4 \leqslant 1$, поэтому $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$, а также $x^2 \geqslant x^4$ и $y^2 \geqslant y^4$. а) Из первой пары неравенств и следует, что абсцисса и ордината каждой точки кривой по модулю не превосходят 1, значит, кривая лежит в квадрате с центром в начале координат, стороны которого равны 2 и параллельны осям координат.

б) Из второй пары неравенств следует, что $x^2+y^2 \geqslant x^4+y^4=1$, таким образом, расстояние от каждой точки кривой до начала координат не меньше 1.

На следующем рисунке изображены: квадрат, окружность и исследуемая кривая.



1.12. Обозначим через a и b длины катетов треугольника. По условию $a+b+\sqrt{a^2+b^2}=6$. Так как $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ и $\sqrt{a^2+b^2} \geqslant \sqrt{2}\,\sqrt{ab}$, то $(2+\sqrt{2})\sqrt{ab} \leqslant 6$, поэтому $(6+4\sqrt{2})ab \leqslant 36$, откуда $S=\frac{1}{2}\,ab \leqslant \frac{9}{3+2\sqrt{2}}$. Так как $\sqrt{2}>1$, то $3+2\sqrt{2}>5$, значит, $\frac{9}{3+2\sqrt{2}} < \frac{9}{5}$.

Тема 2. Тождества для многочленов и разложения на множители

Диагностическая домашняя работа

1. Разложите на множители многочлены: а) $x^3 - x^2 - x + 1$; б) $x^4 + x^2 + 1$; в) $(x+y)^2 + (xy-1)^2$.

2. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right) : \left(\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2-b^2}\right)$$

при: а) $a = -62$ и $b = 63$; б) $a = 79$ и $b = 46$.

3. Докажите, что следующие числа являются целыми: а) $29\frac{13}{17} \cdot 30\frac{13}{17} - 28\frac{13}{17} \cdot 31\frac{13}{17}$; б) $\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)\left(\sqrt[3]{9}-1\right)\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1\right)$.

4. Докажите, что: а) число 92^4-85^4 делится на 21; б) число 99^3+70^3 делится на 13.

5. Найдите все целые решения уравнения $xy = 2(x+y)$.

6. а) Докажите, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$. б) Верно ли обратное утверждение?

7. Вычислите: а) $x^3 + \frac{1}{x^3}$; б) $x^4 + \frac{1}{x^4}$, если известно, что $x + \frac{1}{x} = 3$.

8. Найдите все прямоугольные треугольники с целыми длинами сторон, в которых гипотенуза на единицу длиннее одного из катетов.

Решения задач диагностической работы и их обсуждение

1. а) $x^3-x^2-x+1 = x^2(x-1)-(x-1) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$. Таким образом, если нам было дано уравнение $x^3-x^2-x+1=0$, то, поскольку мы смогли разложить на множители многочлен, стоящий в его правой части, мы сможем решить данное уравнение, переписав его в виде $(x-1)^2(x+1)=0$, откуда следует, что $x=1$ или $x=-1$.

Следующий многочлен действительных корней не имеет, однако и его можно представить в виде произведения многочленов меньших степеней.

б) $x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = (x^2+1)^2-x^2 = (x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

Последний пример выглядит совсем странным: кажется, что невозможно разложить на множители сумму двух квадратов. Но оказывается — что можно.
в) $(x+y)^2 + (xy-1)^2 = x^2 + y^2 + x^2y^2 + 1 = x^2(y^2+1) + y^2 + 1 = (x^2+1)(y^2+1)$.

2. Естественный подход состоит в преобразовании данного алгебраического выражения. Вначале преобразуем выражение, стоящее в первой скобке:

$$\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2+2ab+b^2} = a^2\left(\frac{1}{a+b} - \frac{a}{(a+b)^2}\right) = \frac{a^2b}{(a+b)^2}\,.$$

Теперь преобразуем выражение из второй скобки:

$$\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2-b^2} = a^2\left(\frac{1}{a+b} - \frac{a}{(a+b)(a-b)}\right) = -\frac{a^2b}{(a+b)(a-b)}\,.$$

Поэтому данное выражение равно

$$\frac{a^2b}{(a+b)^2} : \left(-\frac{a^2b}{(a+b)(a-b)}\right) = \frac{b-a}{b+a}\,.$$

а) Поэтому при $a=-62$ и $b=63$ получим ответ: 125. б) При $a=79$ и $b=46$ ответ: $-\frac{33}{125}$.

Задание пункта а) можно было решать иначе. Данные таковы, что $a+b=1$, поэтому первая скобка равна $a^2-a^3=a^2(1-a)=a^2b$, а вторая скобка равна $a^2-\frac{a^3}{a-b} = -\frac{a^2b}{a-b}$, поэтому в этом случае данное выражение равно $b-a=125$.

3. Основное в этой задаче — разумным образом ввести обозначения.
а) Если положить $a=28\frac{13}{17}$, то данное число равно

$$(a+1)(a+2) - a(a+3) = a^2+3a+2-a^2-3a = 2$$

вне зависимости от значения числа a.

б) Положим $x=\sqrt[3]{3}$. Тогда данное число равно

$$(x^2+x+1)(x^2-1)(x^2-x+1) = (x^2+x+1)(x-1)(x+1)(x^2-x+1) = \\ = (x^3-1)(x^3+1) = x^6-1 = 3^2-1 = 8.$$

4. а) Так как $a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$, то число 92^4-85^4 делится как на $92-85=7$, так и на $92+85=177=3\cdot 59$.

Таким образом, раз данное число делится на 7 и на 3, то оно делится на 21.

б) Так как $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, то число 99^3+70^3 делится на $99+70=169$, следовательно, оно делится на 13.

5. Заметим, что $xy-2x-2y+4=(x-2)(y-2)$, поэтому данное уравнение можно записать в виде $(x-2)(y-2)=4$. Так как по условию числа x и y являются целыми, то числа $x-2$ и $y-2$ — делители числа 4, произведение которых равно этому числу. Теперь составим таблицу возможных значений разностей $x-2$ и $y-2$,

$x-2$	1	4	2	-2	-1	-4
$y-2$	4	1	2	-2	-4	-1
x	3	6	4	0	1	-2
y	6	3	4	0	-2	1

из которой и следует ответ.

6. а) Так как $a+b+c=0$, то $c=-(a+b)$, поэтому

$$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a+b)^3=a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3=$$
$$=-3ab(a+b)=3abc.$$

б) Конечно, обратное утверждение неверно, поскольку равенство $a^3+b^3+c^3=3abc$ справедливо, например, и при $a=b=c$. Заметим, что в будущем будет доказано, что если $a^3+b^3+c^3=3abc$, то $a+b+c=0$ или же $a=b=c$.

7. а) Так как $x+\frac{1}{x}=3$, то

$$27=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}+9,$$

значит, $x^3+\dfrac{1}{x^3}=18$.

б) Так как

$$9=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}\,,\ \text{то } x^2+\frac{1}{x^2}=7.$$

Наконец,

$$49=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=x^4+2+\frac{1}{x^4}\,,\ \text{откуда } x^4+\frac{1}{x^4}=47.$$

Можно было рассуждать иначе, а именно,

$$54 = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = x^4 + \frac{1}{x^4} + x^2 + \frac{1}{x^2} = x^4 + \frac{1}{x^4} + 7,$$

откуда и следует, что $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = 47$.

8. Обозначим через a и b длины катетов треугольника, пусть длина его гипотенузы равна $a+1$. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = (a+1)^2$, откуда $b^2 = 2a+1$. Следовательно, b — нечетное число, пусть $b = 2k+1$. Тогда $4k^2 + 4k + 1 = 2a + 1$, откуда $a = 2k(k+1)$, а $c = 2k^2 + 2k + 1$. Таким образом, при любом натуральном k треугольник со сторонами $a = 2k(k+1)$, $b = 2k+1$ и $c = 2k^2 + 2k + 1$ является прямоугольным. В частности, как это не покажется странным на первый взгляд, таких треугольников бесконечно много. К примеру, при $k = 1$ мы получим так называемый «египетский» треугольник со сторонами 4, 3 и 5, а при $k = 11$ — прямоугольный треугольник со сторонами 264, 23 и 265.

Заметим, что задача нахождения всех прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон, катеты которых отличаются на единицу, оказывается несравнимо более сложной.

Понятия, методы и идеи

Как видно из приведенных решений, для решения задач диагностической работы следовало использовать:

1) правила преобразования алгебраических выражений;
2) формулы «сокращенного умножения»;
3) использование разложений на множители для доказательства делимости чисел;
4) методы алгебраических преобразований арифметических выражений.

Среди других методов и приемов выделим такой, может быть, частный, но часто используемый прием, как

5) «выделение полного квадрата».

В дополнение к этому отметим еще использование преобразований алгебраических выражений и, в частности, разложение на множители для:

6) решения уравнений высших степеней;

7) исследования множеств, заданных уравнениями (неравенствами);

8) доказательства неравенств.

Выделение полного квадрата

Задача 9. Найдите наименьшее значение выражения: а) x^2-4x+1; б) $x^2+2y^2-2x+6y+2$; в) $x^2+4xy+y^2$; г) $x^4-2xy+y^4$.

а) Конечно, это вопрос про свойства квадратичных функций, так что на него есть стандартный ответ. Важно показать, откуда этот ответ следует. Выделив «полный квадрат» в данном выражении, получим, что

$$x^2-4x+1 = x^2-4x+4-3 = (x-2)^2-3 \geqslant -3.$$

Ясно, что -3 является наименьшим значением данного выражения.

б) В данном примере надо выделить полные квадраты по обеим переменным:

$$x^2+2y^2-2x+6y+2 = x^2-2x+1+2\big(y^2+3y+\tfrac{9}{4}\big)-1-\tfrac{9}{2}+2 = \\ = (x-1)^2+2\big(y+\tfrac{3}{2}\big)^2-\tfrac{7}{2} \geqslant -\tfrac{7}{2}\,.$$

Поскольку при $x=1$, $y=-\frac{3}{2}$ данное выражение равно $-\frac{7}{2}$, то это число и является наименьшим значением этого выражения.

в) Так как $x^2+4xy+y^2=(x+2y)^2-3y^2$, то данное выражение не имеет ни наибольшего значения, ни наименьшего. Действительно, если $y=0$, то оно равно x^2, следовательно, его значением может быть любое неотрицательное число. С другой стороны, при $x=-2y$ это выражение равно $-3y^2$, поэтому его значением может быть и любое неположительное число.

г) При решении этой задачи легко сделать ошибку. Если бы степени переменных x и y были равны 2, а не 4, то мы получили бы неравенство $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\geqslant 0$. При «достаточно больших» значениях x и y верны неравенства $x^4\geqslant x^2$ и $y^4\geqslant y^2$, поэтому, если $|x|\geqslant 1$ и $|y|\geqslant 1$, то $x^4-2xy+y^4\geqslant 0$. Однако давайте рассмотрим значения данного выражения при $y=x$. Получим $2x^4-2x^2=2\big(x^2-\frac{1}{2}\big)^2-\frac{1}{2}$. Таким образом, при $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ значение данного выражения равно $-\frac{1}{2}$. Для того, чтобы доказать, что найденное значение — наименьшее, можно проделать следующее преобразование:

$$x^4-2xy+y^4=(x^2-y^2)^2+2x^2y^2-2xy=(x^2-y^2)^2+2\big(xy-\tfrac{1}{2}\big)^2-\tfrac{1}{2}\,,$$

из которого и следует, что значение $-\frac{1}{2}$ действительно является наименьшим.

Решение уравнений высших степеней

Задача 10. Решите уравнения: а) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0$; б) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=1$; в) $(x^2+1)^2-2(x-1)^2=0$.

а) Достаточно часто приходится видеть, как ребята начинают «раскрывать скобки» в выражении, стоящем в левой части данного уравнения, вместо того, чтобы воспользоваться тем, что произведение равно нулю тогда и только тогда, когда равен нулю один из его сомножителей. В данном случае $x-1=0$ или $x-2=0$ или $x-3=0$ или $x-4=0$. Таким образом, $x=1;2;3;4$.

Этот пример иллюстрирует важность разложения на множители при решении уравнений. Если левую часть уравнения $f(x)=0$ удалось представить в виде произведения $f(x)=u(x)v(x)$, то решение исходного уравнения сводится к решению более простых уравнений $u(x)=0$ и $v(x)=0$.

б) Посмотрите, не станут ли ваши учащиеся действовать так же, как в решении предыдущего уравнения. К сожалению, приходится видеть, что ребята начинают писать, что в этом случае $x-1=1$ или $x-2=1$, и так далее. Идея решения этого уравнения совсем иная, однако тоже связана с преобразованием выражения. Так как $(x-1)(x-4)=x^2-5x+4$ и $(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$, то имеет смысл положить $t=x^2-5x+5$, получив в результате уравнение $(t-1)(t+1)=1$, или $t^2=2$, откуда $t=\pm\sqrt{2}$. Осталось решить уравнения $x^2-5x+5+\sqrt{2}=0$ и $x^2-5x+5-\sqrt{2}=0$. Первое из них решений не имеет, решениями второго являются числа $\frac{5\pm\sqrt{5+4\sqrt{2}}}{2}$.

в) Если раскрыть скобки в левой части данного уравнения, то мы получим уравнение $x^4+4x-1=0$. Что с ним делать — непонятно. Дело в том, что к нему как раз и надо применить обратное преобразование, $x^4+4x-1=(x^2+1)^2-2(x-1)^2$. Как найти такое преобразование — тема будущего. Наша цель в данный момент — показать, что оно успешно работает. Итак, поскольку

$$(x^2+1)^2-2(x-1)^2=(x^2-x\sqrt{2}+1+\sqrt{2})(x^2+x\sqrt{2}+1-\sqrt{2}),$$

то надо решить уравнения $x^2-x\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=0$ и $x^2+x\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=0$. Первое из них решений не имеет, решениями второго являются числа $\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$.

Задача 11. Решите уравнения:
а) $x^3+2x^2-1=0$; б) $2x^3+3x^2+3x+1=0$; в) $x^4-4x^2+4x-1=0$.

а) Так как $x^3+2x^2-1=x^3+x^2+x^2-1=x^2(x+1)+(x-1)(x+1)=$ $=(x+1)(x^2+x-1)$, то корнями данного уравнения являются как число $x=-1$, так и корни уравнения $x^2+x-1=0$, равные $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

б) Так как $2x^3+3x^2+3x+1=x^3+x^3+3x^2+3x+1=x^3+(x+1)^3$, то корнями данного уравнения являются корни уравнения $x^3=-(x+1)^3$, или $x^3=(-x-1)^3$, откуда следует, что $x=-x-1$, таким образом, $x=-\frac{1}{2}$.

в) Имеем

$$\begin{aligned}x^4-4x^2+4x-1&=(x-1)(x^3+x^2+x+1)-4x(x-1)=\\&=(x-1)(x^3+x^2-3x+1)=(x-1)(x^3-x+x^2-x-x+1)=\\&=(x-1)(x(x-1)(x+1)+x(x-1)-(x-1))=(x-1)^2(x^2+x+x-1)=\\&=(x-1)^2(x^2+2x-1).\end{aligned}$$

Поэтому корнями данного уравнения являются $1; -1\pm\sqrt{2}$.

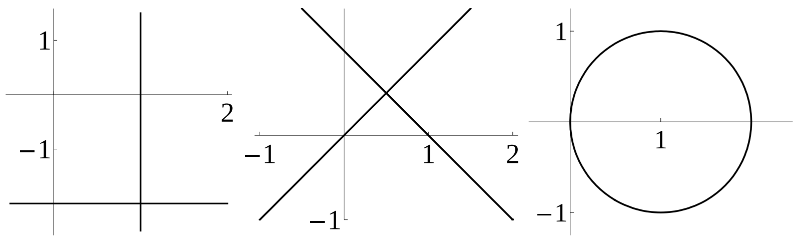
Построение множеств, заданных уравнениями и (или) неравенствами

Задача 12. Изобразите на плоскости множество, заданное уравнением: а) $xy+2x-y=2$; б) $x^2-y^2=x-y$; в) $x^2+y^2=2x$.

а) Так как

$$xy+2x-y-2=x(y+2)-(y+2)=(x-1)(y+2),$$

то равенство $xy+2x-y=2$ имеет место тогда и только тогда, когда $x=1$ или $y=-2$, следовательно, данное уравнение задает изображенную на левом рисунке пару прямых.



б) Так как

$$x^2 - y^2 - (x - y) = (x - y)(x + y) - (x - y) = (x - y)(x + y - 1),$$

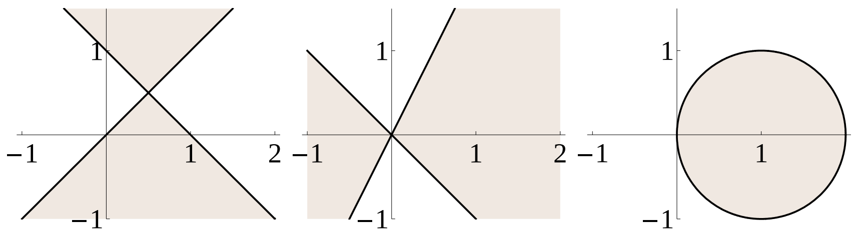
то равенство справедливо тогда и только тогда, когда $y = x$ или же $y = 1 - x$, следовательно, данное уравнение задает изображенную на среднем рисунке пару прямых.

в) Имеем $x^2+y^2-2x = x^2-2x+1+y^2-1 = (x-1)^2+y^2-1$, поэтому данное равенство можно записать в виде $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Значит, оно задает изображенную на правом рисунке окружность радиусом 1 с центром в точке $(1; 0)$.

Задача 13. Изобразите на плоскости множество, заданное неравенством: а) $x^2 - y^2 \leqslant x - y$; б) $2x^2 + xy - y^2 \geqslant 0$; в) $x^2 + y^2 \leqslant 2x$.

а) Это неравенство можно записать в виде $(x - y)(x + y - 1) \leqslant 0$, поэтому оно выполняется, если $y \geqslant x$ и $y \geqslant 1 - x$ или же если $y \leqslant x$ и $y \leqslant 1 - x$. Первая система неравенств задает изображенный на левом рисунке верхний угол, тогда как вторая задает нижний угол.

б) Так как $2x^2+xy-y^2 = x^2-y^2+x(x+y) = (x+y)(2x-y)$, то данное неравенство выполняется тогда и только тогда, когда $y \geqslant -x$ и $y \leqslant 2x$ или же когда $y \leqslant -x$ и $y \geqslant 2x$. Первая система неравенств задает изображенный на среднем рисунке правый угол, тогда как вторая — левый угол.



в) Так как данное неравенство записывается в виде $(x-1)^2+y^2 \leqslant 1$, то оно задает круг, изображенный на правом рисунке.

Доказательство неравенств

Собственно говоря, в разделе «выделение полного квадрата» у нас уже были примеры доказательств неравенств.

Задача 14. Докажите, что для любых чисел a, b, c и d справедливо неравенство $\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$.

Не надо бояться преобразовывать, если вы способны «смотреть на шаг вперед». Дело в том, что после возведения в квадрат обеих частей этого неравенства произойдет достаточно много «сокращений», поскольку в обеих его частях будут стоять суммы $a^2+b^2+c^2+d^2$. Действительно,

$$\left(\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\right)^2 = a^2+2ac+c^2+b^2+2ab+d^2$$

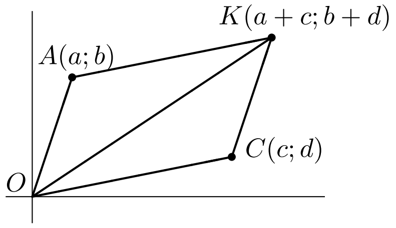
и

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\right)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\,.$$

Поэтому после возведения в квадрат и естественных сокращений мы получим неравенство $ac+bd \leqslant \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$. Докажем, что верно и более сильное неравенство $|ac+bd| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$. Возведя обе его части в квадрат, получим, что

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2 &= \\ &= a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-a^2c^2-2abcd-b^2d^2 = \\ &= a^2d^2-2abcd+b^2c^2=(ad-bc)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Неравенство этой задачи очень геометрично, что мы сейчас и продемонстрируем.



Дело в том, что левая часть неравенства равна длине отрезка OK (рисунок), тогда как его правая часть равна сумме длин отрезков OA и OC. Поэтому данное неравенство имеет вид

$$|OK| \leqslant |OA|+|AK| = |OA|+|OC|\,,$$

таким образом, оно является *неравенством треугольника.*

Задача 15. Докажите, что:
а) если $a \geqslant b \geqslant c$, то $a^2-b^2+c^2 \geqslant (a-b+c)^2$;
б) если $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e$, то $a^2-b^2+c^2-d^2+e^2 \geqslant (a-b+c-d+e)^2$.

а) Произведем разложение на множители,

$$a^2 - b^2 + c^2 - (a-b+c)^2 = (a-b)(a+b) + (b-a)(a-b+2c) = \\ = (a-b)(a+b-a+b-2c) = 2(a-b)(b-c) \geqslant 0,$$

так как $a \geqslant b$ и $b \geqslant c$.

б) Формулировка задания этого пункта может спровоцировать неудачный подход к его решению. Дело в том, что не следует действовать *так же*, как в решении предыдущего пункта, а следует *воспользоваться* его результатом. Собственно говоря, это — задача на индукционный способ рассуждения. В силу неравенства пункта а) справедливы неравенства

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2 \geqslant (a-b+c)^2 - d^2 + e^2 \geqslant (a-b+c-d+e)^2.$$

Второе неравенство верно, так как $a-b+c \geqslant c \geqslant d \geqslant e$.

Дополнительные задачи

2.1. Докажите, что число, которое на единицу больше произведения четырех последовательных целых чисел, является точным квадратом.

2.2. Разложите на простые множители число: а) 1027; б) 1001; в) 973.

2.3. а) Докажите, что число $n^7 + n^5 + n^2 + 1$ является составным при любом натуральном n. б) Выясните, является ли простым число 100 903 027.

2.4. а) Найдите многочлен с целыми коэффициентами, одним из корней которого является число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. б) Найдите остальные корни полученного многочлена.

2.5. Проверьте, что $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}$, и найдите еще несколько подобных примеров.

2.6. Докажите, что для любых различных натуральных чисел a и b число $\left(a^2+b^2\right)^2$ есть сумма квадратов двух натуральных чисел.

2.7. Разложите на множители многочлены:
а) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$; б) $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$.

2.8. а) Представьте дробь $\frac{1}{k(k+1)}$ в виде разности дробей с числителями, равными 1. б) Вычислите сумму $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$.

2.9. Докажите, что для любых неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a+b \leqslant \sqrt{2(a^2+b^2)}$.

2.10. Докажите, что число $876599^3 + 876599^2 + 4$ делится на 876601.

2.11. Докажите, что следующие числа являются натуральными: а) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$; б) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$.

2.12. а) Докажите, что неравенство $(1+a)^4 \geqslant 1+4a$ верно для любого числа a. б) Выясните, что выгоднее: поместить средства в банк под 12% годовых или же под ежеквартальный процент по вкладу, равный 3%.

2.13. Найдите все пары $(x; y)$, такие, что $2x^2 + 4xy + 4y^2 + 1 \leqslant 2x$.

Варианты самостоятельных работ по теме 2

Проверочная работа 1

Вариант 1

1. Разложите на множители выражение $(a^3+2b^3)^2-(2a^3+b^3)^2$.
2. Вычислите при $a=\frac{1}{2}$ и $b=\frac{1}{3}$ значение выражения
$$\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}+1\right)\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}.$$
3. Выясните, является ли целым число $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\sqrt{5}$.
4. Разложите на простые множители число $2^{12}-1$.
5. Найдите все натуральные решения уравнения $x^2-y^2=125$.

Вариант 2

1. Разложите на множители выражение $(2x^3-y^3)^2-(2y^3-x^3)^2$.
2. Вычислите при $a=\frac{1}{2}$ и $b=\frac{1}{3}$ значение выражения
$$\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right).$$
3. Выясните, является ли целым число $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-2\sqrt{3}$.
4. Разложите на простые множители число 3^8-1.
5. Найдите все натуральные решения уравнения $x^2-y^2=81$.

Вариант 3

1. Выясните, является ли целым число $(4+2\sqrt{3})\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.
2. Разложите на линейные множители выражение $x^3-x^2y-xy^2+y^3$.
3. Докажите, что при всех натуральных n число n^3+3n^2+2n делится на 3.
4. Докажите, что число $29^4-22^4-18^4+11^4$ делится на 77.
5. Найдите все значения a, при которых при любых x и y справедливо неравенство $2x^2+6xy+ay^2\geqslant 0$.

Вариант 4

1. Выясните, является ли целым число $(6-2\sqrt{5})\sqrt{14+6\sqrt{5}}$.
2. Разложите на линейные множители выражение $x^3+x^2y-xy^2-y^3$.
3. Докажите, что при всех натуральных n число $n^4+2n^3-n^2-2n$ делится на 8.
4. Докажите, что число $42^4-35^4-29^4+22^4$ делится на 91.
5. Найдите все значения b, при которых при любых x и y справедливо неравенство $2x^2-2xy+by^2\geqslant 0$.

Проверочная работа 2

Вариант 1

1. Решите уравнение $x^3 + x^2 - 2 = 0$.

2. Найдите значение выражения $x^3 + y^3$, если известно, что $xy = 3$ и $x^2 + y^2 = 11$.

3. Найдите наименьшее значение многочлена: а) $x^4 + 2x^2 + 3$; б) $x^4 - 4x^2 + 1$.

4. Изобразите на координатной плоскости множество, заданное неравенством $x^2 + y^2 + 2x \leqslant 4y$.

5. Докажите, что неравенство $5x^2 - 6xy + 2y^2 \geqslant 0$ справедливо для любых чисел x и y.

Вариант 2

1. Решите уравнение $x^3 - x^2 + 2 = 0$.

2. Найдите значение выражения $x^3 - y^3$, если известно, что $xy = 3$ и $x^2 + y^2 = 13$.

3. Найдите наименьшее значение многочлена: а) $x^4 - 2x^2 + 3$; б) $x^4 + 4x^2 + 1$.

4. Изобразите на координатной плоскости множество, заданное неравенством $x^2 + y^2 + 6y \leqslant 2x$.

5. Докажите, что неравенство $3x^2 - 3xy + y^2 \geqslant 0$ справедливо для любых чисел x и y.

Вариант 3

1. Решите уравнение $x^5 - 4x^3 - x^2 + 4 = 0$.

2. Составьте уравнение с целыми коэффициентами, одним из корней которого является число $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+1}$.

3. Найдите наименьшее значение многочлена $x^4 - 2x^3 + x^2 + 5$.

4. Изобразите на плоскости множество, заданное: а) уравнением $x^2 - 4xy + 4y^2 = 1$; б) неравенством $x^2 - 4xy + 4y^2 \geqslant 1$.

5. Докажите неравенство $2(x^4 + y^4) \geqslant xy(x + y)^2$.

Вариант 4

1. Решите уравнение $x^5 - x^3 + 8x^2 - 8 = 0$.

2. Составьте уравнение с целыми коэффициентами, одним из корней которого является число $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

3. Найдите наименьшее значение многочлена $x^4 + 2x^3 + x^2 + 6$.

4. Изобразите на плоскости множество, заданное: а) уравнением $4x^2 + 4xy + y^2 = 4$; б) неравенством $4x^2 + 4xy + y^2 \leqslant 4$.

5. Докажите неравенство $xy(x + y)^2 \leqslant (x^2 + y^2)^2$.

Ответы, решения, комментарии

2.1. Есть три естественных подхода к решению этой задачи. Мы начнем с самого формального, в котором надо просто разумно преобразовать выражение. Число, о котором идет речь в задаче, записывается в виде $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$. Теперь запишем, что

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= n(n+3)(n+1)(n+2)+1 \\ &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1, \end{aligned}$$

что равно $(n^2+3n+1)^2$.

Это решение является, конечно, самым коротким, однако первое преобразование, на котором оно основано, надо было «увидеть». Почему это вдруг следовало группировать первый сомножитель в произведении с последним, а второй с третьим? Конечно, если опыт в преобразованиях имеется, то это «очевидно», но этот опыт еще надо приобрести (см. решение пункта б) задачи 10). Заметим, что в результате «полного раскрытия скобок» мы получим выражение $n^4+6n^3+11n^2+6n+1$, в котором почти никто не узнает «полный квадрат».

Второй тип рассуждения связан с определением многочлена. Данное выражение есть многочлен степени 4. Если он является квадратом, тогда он квадрат многочлена степени 2. Поскольку у данного выражения коэффициент при n^4 равен 1, то равен 1 и коэффициент при n^2 этого квадратного трехчлена. Свободный член данного выражения также равен 1, следовательно, свободный член квадратного трехчлена равен ± 1. Тем самым мы предполагаем, что

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+an\pm 1)^2.$$

Предположим, что квадратный трехчлен имеет вид n^2+an+1. При $n=-1$ его квадрат равен 1, поэтому $(2-a)^2=1$, откуда $a=1$ или $a=3$. При $n=-2$ квадрат этого трехчлена также равен 1, следовательно, $(5-2a)^2=1$. Поэтому из двух значений коэффициента a нам может подойти только $a=3$. Теперь можно просто убедиться прямым вычислением, что $(n^2+3n+1)^2=n^4+6n^3+11n^2+6n+1$.

Третий подход основан на математическом эксперименте. Давайте посчитаем значения выражения $s_n=n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ при $n=1,2,3,4,5$. Взглянем на следующую табличку.

n	s_n
1	$25 = 5^2$
2	$121 = 11^2$
3	$361 = 19^2$
4	$841 = 29^2$
5	$1681 = 41^2$

Мы хотим выразить через n выражение u_n, такое что $u_n^2 = s_n$. Естественное предположение состоит в том, что u_n зависит от n квадратичным образом. Составим еще одну табличку.

n	u_n
1	$5 = 1 + 4$
2	$11 = 4 + 7$
3	$19 = 9 + 10$
4	$29 = 16 + 13$
5	$41 = 25 + 16$

Последовательность $4, 7, 10, 13, 16$ ведет себя вполне регулярным образом: каждый следующий ее член на 3 больше предыдущего. Поэтому естественно предположить, что $u_n = n^2 + 3n + 1$.

2.2. а) $1027 = 1000 + 27 = 10^3 + 3^3 = 13(10^2 - 30 + 9) = 13 \cdot 79$. б) $1001 = 10^3 + 1 = 11(100 - 10 + 1) = 11 \cdot 91 = 11 \cdot 7 \cdot 13$. в) $973 = 10^3 - 3^3 = 7 \cdot 139$.

2.3. а) Утверждение следует из разложения $n^7 + n^5 + n^2 + 1 = n^5(n^2 + 1) + n^2 + 1 = (n^2 + 1)(n^5 + 1)$. б) Нет, не является, так как $100903027 = 1009 \cdot 100000 + 3 \cdot 1009 = 1009 \cdot 100003$. Заметим, что числа 1009 и 100003 являются простыми, при этом меньшее из них является 169-м по счету простым числом. Поэтому попытки найти делитель данного числа наугад к успеху не приведут.

2.4. а) Если $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, то $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, или $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$, следовательно, $(x^2 - 5)^2 = 24$, откуда $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. б) Другими корнями многочлена являются числа $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$, $\sqrt{2} - \sqrt{3}$, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Конечно, существуют и другие многочлены с целыми коэффициентами, одним из корней которых является данное число. Не очень просто доказать, что любой такой многочлен будет делиться на найденный многочлен.

2.5. Действительно, $\sqrt{3\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{27}{8}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}$. Теперь запишем данное равенство в виде $\sqrt{k + \frac{k}{n}} = k\sqrt{\frac{k}{n}}$. Возведя обе части в квадрат, получим, что $k + \frac{k}{n} = \frac{k^3}{n}$, или $n + 1 = k^2$. Таким образом, данное равенство справедливо тогда и только тогда, когда $n = k^2 - 1$. При $k = 3$ мы получаем данное в задаче равенство. Далее можно, например, взять $k = 4$ и $k = 5$, получив равенства $\sqrt{4\frac{4}{17}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{4}{17}}$ и $\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{5}{24}}$.

2.6. Утверждение задачи следует из тождества

$$(a^2+b^2)^2 = a^4+2a^2b^2+b^4 = a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2 = (a^2-b^2)^2+(2ab)^2.$$

2.7. а) Эту задачу можно дать в следующей, более простой формулировке, именно: не раскрывая скобок в левой части, проверить равенство

$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x).$$

В исходной формулировке главное — понять, что в левой части стоит многочлен второй степени относительно каждой переменной. Полезно еще помнить, что $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = \\
&\quad = x^3 + 3x^2(y+z) + 3x(y+z)^2 + (y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = \\
&\quad = 3x^2(y+z) + 3x(y+z)^2 + 3yz(y+z) = \\
&\quad = 3(y+z)(x^2+(y+z)x+yz) = 3(y+z)(x+y)(x+z).
\end{aligned}$$

А можно рассуждать еще проще. Если нам известны корни x_1 и x_2 квадратного многочлена ax^2+bx+c, то справедливо разложение $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Так как выражение

$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$$

является многочленом степени 2 по переменной x и, как нетрудно видеть, при $x = -y$ и $x = -z$ оно равно нулю, то $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3 = a(x+y)(x+z)$, где a — это коэффициент при x^2. Так как он равен $3(y+z)$, то отсюда и следует искомое разложение.

б) Первый подход — непосредственное раскрытие скобок и приведение подобных членов. В результате получим, что

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(xy^2 - x^2y + yz^2 - y^2z + zx^2 - z^2x).$$

Далее,

$$\begin{aligned}
xy^2-x^2y+yz^2-y^2z+zx^2-z^2x &= xy(y-x)+z^2(y-x)+z(x^2-y^2) = \\
&= (y-x)(xy+z^2-xz-yz) = (y-x)(z-x)(z-y) = \\
&= (x-y)(y-z)(z-x).
\end{aligned}$$

Таким образом, $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3 = 3(y-x)(z-x)(z-y)$.

Однако полученное тождество является прямым следствием тождества пункта а). Чтобы это увидеть, давайте положим $c = x-y$, $a = y-z$ и $b = z-x$. Тогда $a+b+c = 0$, $a+b = y-x$, $b+c = z-y$ и $a+c = x-z$. В силу тождества предыдущего пункта получаем, что

$$\begin{aligned}(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3 &=\\ = a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a) =\\ &= -3(y-x)(x-z)(z-y) = 3(x-y)(y-z)(z-x).\end{aligned}$$

2.8. а) $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. б) Воспользовавшись полученным равенством, напишем, что

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42} = \\ = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7} = 1-\frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$$

А можно было понять, каков ответ, просто складывая дроби последовательно. Действительно, $\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Далее, $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{2}{3}+\frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. На следующем шаге появится сумма $\frac{3}{4}+\frac{1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$, затем $\frac{4}{5}+\frac{1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$ и, наконец, $\frac{5}{6}+\frac{1}{42} = \frac{36}{42} = \frac{6}{7}$. Конечно, данную задачу можно обобщить.

2.9. Неравенство $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a+b$ доказывается непосредственным возведением в квадрат. Можно также заметить, что если a и b — длины катетов прямоугольного треугольника, то их сумма больше длины гипотенузы этого треугольника, равной $\sqrt{a^2+b^2}$. Для неотрицательных чисел a и b данное неравенство обращается в равенство, если хотя бы одно из этих чисел равно нулю. Для доказательства неравенства $a+b \leqslant \sqrt{2(a^2+b^2)}$ можно возвести в квадрат обе его части. Однако полезно заметить, что, поделив их на 2, мы получим доказанное ранее неравенство $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ между средним арифметическим и средним квадратичным двух чисел (см. задачу 9 темы 1 «Неравенства»).

2.10. Рассмотрим многочлен x^3+x^2+4 и постараемся разложить его на множители. Так как

$$x^3+x^2+4 = x^3+8+x^2-4 = (x+2)(x^2-2x+4)+(x+2)(x-2) = \\ = (x+2)(x^2-x+2),$$

то его значение при $x = 876599$ делится на $x + 2 = 876601$.

2.11. а) Положим $u = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$ и $v = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$. Тогда

$$u^2 + v^2 = 22 \text{ и } uv = \sqrt{\left(11 + 6\sqrt{2}\,\right)\left(11 - 6\sqrt{2}\,\right)} = \sqrt{121 - 72} = 7.$$

Следовательно, $(u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv = 22 + 14 = 36$. Поскольку числа u и v являются положительными, то $u + v = 6$.

Можно было рассуждать иначе, «увидев» тождества $(3 + \sqrt{2}\,)^2 = 9 + 6\sqrt{2} + 2 = 11 + 6\sqrt{2}$ и $(3 - \sqrt{2}\,)^2 = 11 - 6\sqrt{2}$. Таким образом, $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2}$, $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}$, поэтому искомая сумма равна 6.

б) Покажем два разных решения. В первом из них надо снова «немного догадаться». Скорее всего, каждый из корней должен быть равен простому выражению, а в таком случае под корнем должен стоять «полный куб». Далее действуем разумным подбором. Так как

$$(\sqrt{3} + 1)^3 = (\sqrt{3}\,)^3 + 3(\sqrt{3}\,)^2 + 3\sqrt{3} + 1 = 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} + 1 = 6\sqrt{3} + 10,$$

то $\sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} = \sqrt{3} + 1$. Аналогичным образом, $\sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10} = \sqrt{3} - 1$, следовательно, данное в задаче число равно 2.

Видоизменим первое решение предыдущего пункта и обозначим $u = \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10}$, $v = \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$ и $x = u - v$. В данном случае $uv = \sqrt[3]{36 \cdot 3 - 100} = \sqrt[3]{8} = 2$. Тогда

$$x^3 = (u - v)^3 = u^3 - v^3 - 3u^2v + 3uv^2 = 20 - 3uv(u - v) = 20 - 6x,$$

поэтому x — один из корней уравнения $x^3 + 6x - 20 = 0$. Далее воспользуемся разложением

$$x^3 + 6x - 20 = x^3 - 8 + 6(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 10).$$

Поскольку уравнение $x^2 + 2x + 10$ не имеет действительных корней, то $x = 2$.

2.12. а) Обобщения как формулировки, так и решения этой задачи встретятся в будущем. Само неравенство $(1 + a)^4 \geqslant 1 + 4a$ есть частный случай известного неравенства Бернулли. Первый метод доказательства и используется при стандартном доказательстве общего неравенства Бернулли. Ясно, что $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 \geqslant 1 + 2a$. Если $a \geqslant -1$, то обе части этого неравенства можно умножить на $1 + a$, поэтому

$$(1 + a)^3 = (1 + a)(1 + a)^2 \geqslant (1 + a)(1 + 2a) = 1 + 3a + 2a^2 \geqslant 1 + 3a.$$

Умножив на $1+a$ обе части нового неравенства, получим неравенство

$$(1+a)^4 \geqslant (1+a)(1+3a) = 1+4a+3a^2 \geqslant 1+4a \text{ при } a \geqslant -1.$$

Осталось заметить, что при $a < -1$ выражение $1+4a$ отрицательно, а потому $(1+a)^4 \geqslant 1+4a$ при всех значениях a.

Второе решение основано на разложении на множители. Так как

$$(1+a)^4 - 1 = \big((1+a)^2 - 1\big)\big((1+a)^2 + 1\big) = \\ = (a^2+2a)(a^2+2a+2) = a^2(a+2)^2 + 2a(a+2),$$

то $(1+a)^4 - 1 - 4a = a^2(a+2)^2 + 2a^2 \geqslant 0$.

В третьем решении появится разложение выражения $(1+a)^4$. Это, опять-таки, частный случай, на сей раз — *бинома Ньютона*. Воспользовавшись известным разложением куба суммы, получим, что

$$(1+a)^4 = (1+a)(1+a)^3 = (1+a)(a^3+3a^2+3a+1) = \\ = a^4+3a^3+3a^2+a+a^3+3a^2+3a+1 = a^4+4a^3+6a^2+4a+1 = \\ = 1+4a+a^2(a^2+4a+6) = 1+4a+a^2\big((a+2)^2+2\big) \geqslant 1+4a.$$

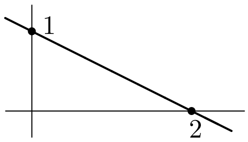
б) Пусть мы положили в банк S рублей под 12% годовых. Тогда через год сумма на счету (конечно, после начисления процентов по вкладу) будет равна $S + 0,12\,S = 1,12\,S$. Во втором случае через один квартал сумма на счету будет равна $S + 0,03\,S = 1,03\,S$. Поскольку в конце следующего квартала проценты начисляются на всю эту сумму, то через полгода на нашем счету будут лежать $1,03^2 S$ рублей, а через год на нем окажется $1,03^4 S$ рублей. Конечно, можно прямо посчитать коэффициент $1,03^4$. Однако для ответа на вопрос задачи можно воспользоваться доказанным неравенством $1,03^4 = (1+0,03)^4 > 1 + 4\cdot 0,03 = 1 + 0,12 = 1,12$. Следовательно, второй вариант выгоднее. Другое дело, что выгоднее он всего лишь на 0,55%.

2.13. Так как $2x^2+4xy+4y^2-2x+1 = (x-1)^2+(x+2y)^2$, то $(x;y) = \big(1;-\frac{1}{2}\big)$.

Тема 3. Линейная функция и прямые на плоскости

Диагностическая домашняя работа

1. Напишите уравнение прямой, изображенной на следующем рисунке.



2. Найдите все значения a, при которых прямая $y = ax + 5$: а) пересекает ось ординат; б) пересекает ось абсцисс; в) проходит через точку $A(-2; 1)$; г) параллельна прямой $y = 3x$.

3. Найдите все значения a, при которых неравенство $ax + 2 \geqslant 0$ справедливо: а) при всех действительных x; б) при всех $x \geqslant -1$; в) при всех $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

4. Найдите все линейные функции $f(x)$, такие что:
а) $f(2x+1) = 2x+1$; б) $f(2x+1) = 2x-1$; в) $f(2x+1) = 4x+3$.

5. В поселке Малые Липки живут 50 школьников, а в поселке Большие Липки — сто. Расстояние между поселками равно 5 км. В каком месте следует построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое ребятами по пути в школу, было наименьшим?

6. Болид команды Ред Булл движется по трассе в Дубае с постоянной скоростью 209 км/час, а болид команды Феррари — со скоростью 204 км/час. Оба они стартовали с первой линии. На каком своем круге по счету Ред Булл обгонит Феррари уже на целый круг?

7. Изобразите на плоскости множество, заданное системой неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ y \leqslant 5 - 3x, \\ y \leqslant \frac{5-x}{2}\,. \end{cases}$$

8. Два туриста одновременно отправились из пункта A в находящийся от него на расстоянии 60 км пункт B. В их распоряжении имеется один велосипед, на котором они могут ехать по очереди, оставляя его на дороге. За какое наименьшее время они могут добраться до пункта назначения, если пешком они идут со скоростью 5 км/час, а на велосипеде едут со скоростью 20 км/час?

Решения задач диагностической работы и их обсуждение

1. Конечно, самое правильное — это сразу написать ответ: $y = 1-\frac{x}{2}$, поскольку координата точки пересечения с осью ординат — это значение свободного члена b в уравнении $y = ax + b$ прямой, а координата ее точки пересечения с осью абсцисс — решение уравнения $ax + b = 0$.

С другой стороны, можно действовать чисто формально. По условию точки $A(0; 1)$ и $B(2; 0)$ лежат на прямой, следовательно, их координаты удовлетворяют уравнению $y = ax + b$. Подставив координаты точек A и B в это уравнение, получим систему, неизвестными в которой являются коэффициенты в уравнении прямой

$$\begin{cases} 1 = b, \\ 0 = 2a + b. \end{cases}$$

Очевидно, что $b = 1$ и $a = -\frac{1}{2}$.

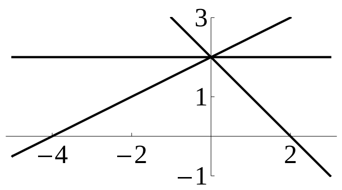
2. а) Всякая прямая на плоскости, являющаяся графиком линейной функции, пересекает ось ординат. Подставив $x = 0$ в уравнение $y = ax+5$, получим, что при любом значении коэффициента a прямая, заданная этим уравнением, пересекает ось ординат в точке $P(0, 5)$.

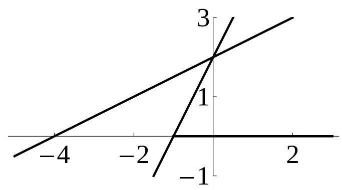
б) Прямая пересекает ось абсцисс, если она ей не параллельна, т. е. если $a \neq 0$. С алгебраической точки зрения, прямая пересечет ось абсцисс, если уравнение $ax + 5 = 0$ имеет решение, что опять-таки имеет место при $a \neq 0$.

в) Прямая, заданная уравнением $y = ax + 5$, проходит через точку $A(-2; 1)$, если $1 = -2a + 5$, откуда $a = 2$.

г) Прямые на плоскости параллельны, если совпадают их угловые коэффициенты, т. е. коэффициенты при переменной x в уравнении $y = ax + b$. Поэтому прямая $y = ax + 5$ параллельна прямой $y = 3x$, если $a = 3$.

3. а) Ясно, что при $a = 0$ данное неравенство верно при всех действительных x. Если $a \neq 0$, то при некоторых x значение линейной функции $y = ax + 2$ будет отрицательным. Например, при $x = -\frac{3}{a}$. С наглядной точки зрения, если прямая $y = ax + 2$ не является горизонтальной, то некоторая ее часть будет лежать ниже оси абсцисс (левый рисунок).

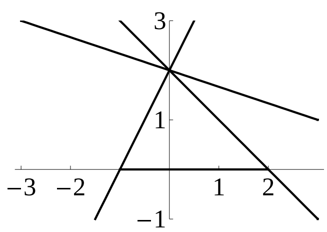




б) С наглядной точки зрения ответ очевиден. Неравенство $ax+2 \geqslant 0$ выполняется при всех $x \geqslant -1$, если $0 \leqslant a \leqslant 2$ (правый рисунок). Приведем также и другое рассуждение. Ясно, что при $a = 0$ данное неравенство справедливо при всех значениях x. Если $a < 0$, то линейная функция $y = ax + 2$ — убывающая, поэтому при некоторых $x > 0$ ее значение будет отрицательным (к примеру, при $x = -\frac{3}{a}$). Пусть $a > 0$. Тогда эта функция — возрастающая. Поэтому из неотрицательности ее значения при $x = -1$ следует положительность всех ее значений при $x > -1$. Следовательно, в данном случае неравенство $ax + 2 \geqslant 0$ верно при всех $x \geqslant -1$ тогда и только тогда, когда $-a + 2 \geqslant 0$, т. е. при $a \leqslant 2$. Таким образом, окончательный ответ: $0 \leqslant a \leqslant 2$.

в) Ясно, что при $a = 0$ данное неравенство справедливо при всех значениях x. Пусть $a > 0$. В этом случае неравенство выполнено при всех x из отрезка $[-1; 2]$ тогда и только тогда, когда оно верно для $x = -1$, т. е. если $0 < a \leqslant 2$. Теперь предположим, что $a < 0$. В этом случае линейная функция — убывающая, поэтому оно должно быть верным при $x = 2$, что имеет место, если $2a + 2 \geqslant 0$, т. е. если $a \geqslant -1$. В результате получаем, что $-1 \leqslant a \leqslant 2$.

С геометрической точки зрения ответ очевиден (рисунок).



4. Разбор этой задачи лучше всего начать с конкретных вычислений. Подставим несколько значений переменной x в функцию, заданную формулой а); например, положим $x = 1; 3; -4$. Получим, соответственно, равенства $f(3) = 3$, $f(7) = 7$ и $f(-7) = -7$. Мы видим, что значение функции совпадает со значением ее аргумента, таким образом, данная функция задается формулой $f(x) = x$.

Подставив те же значения в равенство б), получим, что $f(3) = 1$, $f(7) = 5$ и $f(-7) = -9$. Значит, значение функции на два меньше значения ее аргумента, таким образом, данная функция задается формулой $f(x) = x - 2$.

Аналогичные вычисления, проведенные при решении пункта в), приводят к равенствам $f(3) = 7$, $f(7) = 15$ и $f(-7) = -13$. Конечно, и в этом случае можно догадаться, что значение функции на единицу больше удвоенного значения ее аргумента, так что $f(x) = 2x + 1$. Однако в более сложных случаях «догадаться» до формулы будет более затруднительно.

Подчеркнем, что использование «буквы x» в качестве аргумента функции является просто данью традиции. Формула $f(\text{э}) = 2\,\text{э} - 1$ определяет ту же функцию, что и формула $f(x) = 2x - 1$.[2]

а) Формула $f(2x + 1) = 2x + 1$ задает функцию, значение которой совпадает со значением ее аргумента, поэтому более простая формула, определяющая эту функцию, — это формула $f(x) = x$.

б) Поступим следующим образом: подберем коэффициенты a и b в формуле $f(x) = ax + b$ так, чтобы $f(2x + 1) = 2x - 1$. Поскольку $f(2x + 1) = a(2x + 1) + b = 2ax + a + b$, то при всех x должно быть верным равенство $2ax+a+b = 2x-1$. Следовательно, $a = 1$ и $a+b = -1$, откуда $b = -2$.

в) Положим $t = 2x + 1$. Тогда $2x = t - 1$, следовательно, $4x + 3 = 2(t-1)+3 = 2t+1$. Поэтому «в новой переменной» данное равенство приобретает вид $f(t) = 2t + 1$. Традиционная запись данной функции: $f(x) = 2x + 1$.

5. Ясно, что школу надо строить на дороге между Малыми и Большими Липками. Предположим, что школа стоит на расстоянии x километров от Малых Липок, при этом $0 \leqslant x \leqslant 5$. Каждый из 50 школьников этого поселка проходит x км, таким образом, суммарно они пройдут $50x$ км. Поскольку расстояние от Больших Липок до шко-

[2] Буква «э» русского алфавита находится на третьем месте с его конца, так же, как и буква «x» в латинском алфавите. А вместо букв «y» и «z» можно было бы взять из кириллицы буквы «ю» и «я».

лы равно $5 - x$ км, то школьники этого поселка суммарно пройдут $100(5 - x) = 500 - 100x$ км. А в совокупности школьники обоих поселков пройдут $s = 500 - 50x$ километров. Так как функция s — убывающая, то ее значение — наименьшее, если x — наибольшее. Значит, $x = 5$, т. е. школу надо строить в Больших Липках.

6. Поскольку скорость движения каждого из болидов постоянна, то пройденное каждым из них расстояние является линейной функцией от времени: $s = vt$. Обозначим длину круга через ℓ. То, что один из гонщиков обогнал другого на круг, означает, что пройденное ими (за одно и то же время) расстояние отличается на длину круга, т. е.

$$209t - 204t = \ell, \text{ откуда } t = \frac{\ell}{5}.$$

Казалось бы, что ответ зависит от длины круга, однако это не так. Расстояние s, пройденное пилотом команды Ред Булл, определяется формулой

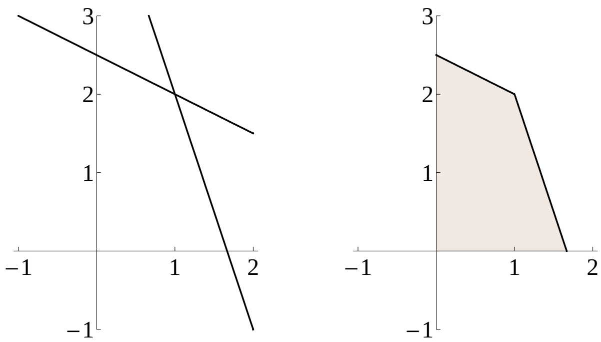
$$s = \frac{209\ell}{5}, \text{ что составляет } \frac{s}{\ell} = \frac{209}{5} = 41{,}8 \text{ кругов.}$$

Таким образом, обгон произойдет на 42-м круге.

7. Изобразим на плоскости прямые $y = 5 - 3x$ и $y = \frac{5-x}{2}$ (левый рисунок). Чтобы найти точку их пересечения, решим систему

$$\begin{cases} y = 5 - 3x, \\ y = \frac{5-x}{2}. \end{cases}$$

Имеем $5 - 3x = \frac{5-x}{2}$, или $10 - 6x = 5 - x$, откуда $x = 1$, а $y = 2$. Данная система неравенств определяет часть первой четверти, лежащую ниже каждой из этих прямых (правый рисунок).



8. Конечно, в задаче имеется в виду, что время, за которое туристы добрались до пункта B, вычисляется по времени прихода последнего из них двоих. Представляется интуитивно очевидным, что это время будет наименьшим в том случае, когда они пришли в B одновременно. А теперь докажем, что если первый турист добрался до B на t часов раньше другого, то можно изменить порядок их движения по маршруту так, чтобы время, затраченное вторым туристом, сократилось.

Предположим, что первый турист прибыл в B пешком. Пусть он в последний раз оставит велосипед на a км ближе к пункту A, чем он это сделал в действительности. В этом случае он придет в B на $\frac{a}{5} - \frac{a}{20} = \frac{a}{4}$ часов позже, но зато второй турист придет в B на $\frac{a}{4}$ часов раньше. Если положить $\frac{a}{4} = \frac{t}{2}$, т. е. взять $a = 2t$, то оба они доберутся до B одновременно, и притом на $\frac{t}{2}$ часов раньше. В случае, если первый турист последний этап до пункта B проехал на велосипеде, то надо, чтобы он взял его попозже (проведите рассуждение самостоятельно).

Таким образом, нам надо выбрать такую схему движения, при которой они доберутся до B одновременно. Предположим, что первый из них идет x км пешком, а y км едет на велосипеде. Ясно, что поскольку велосипед у них только один, то второй турист y км идет пешком, а x км едет на велосипеде. Так как они должны прибыть одновременно, то

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{20} = \frac{y}{5} + \frac{x}{20}, \text{ откуда следует, что } x = y = 30.$$

В частности, совсем не важно, в какие моменты они будут оставлять друг другу велосипед, важно лишь, чтобы каждый из них половину расстояния между A и B прошел пешком, а другую половину проехал на велосипеде. Например, первый турист может сразу проехать половину дороги, а другую идти пешком, на что ему (им) потребуется 7,5 часов.

Понятия, методы и идеи

Как видно из приведенных решений, для решения задач диагностической работы следовало использовать:

1) уравнение прямой на плоскости;

2) геометрический смысл коэффициентов в уравнении прямой;

3) решение линейных неравенств;

4) множества на плоскости, задаваемые линейными неравенствами и их системами;

5) задание функций формулами.

В дополнение к ним отметим еще такие понятия и факты, как:

6) линейность и аддитивность;

7) уравнение прямой, проходящей через две данные точки;

8) взаимное расположение прямых; расположение точек относительно прямых.

Линейность и аддитивность

Задача 9. В 9 часов утра автомобиль проехал мимо километрового столба с числом 63, а в 11 часов 30 минут — мимо столба с числом 233. Считая, что автомобиль двигался с постоянной скоростью, найдите положение автомобиля: а) в 10 часов 15 минут; б) в 10 часов 30 минут.

За два с половиной часа автомобиль проехал $233 - 63 = 170$ км. а) Так как нас интересует расстояние, которое он проехал за 1 час 15 минут, то оно будет вдвое меньше 170 км. Поэтому за это время автомобиль проехал 85 км, следовательно, в 10 часов 15 минут он будет проезжать мимо километрового столба с числом $63 + 85 = 148$.

Можно было рассуждать чуть иначе. Через 1 час 15 минут автомобиль будет находиться на середине пути, т. е. в точке, обозначенной столбом с номером $\frac{63+233}{2} = \frac{296}{2} = 148$.
б) Два с половиной часа — это 10 раз по 15 минут, поэтому за 15 минут автомобиль проезжает 17 км, следовательно, в 10 часов 30 минут он будет проезжать мимо столба, на котором стоит число $148 + 17 = 165$.

С самого начала можно было рассуждать иначе, найдя скорость этого автомобиля, равную $\frac{170}{2{,}5} = \frac{340}{5} = 68$ км/час. Поэтому в момент времени t он будет находиться в точке, соответствующей расстоянию $63 + 68(t - 9)$ от того места, от которого измеряется расстояние на дороге. Для 10 часов 15 минут $t = 10,25$, так что $63 + 68 \cdot 1{,}25 = 63 + 85 = 148$. Для 10 часов 30 минут $t = 10,5$, так что $63 + 68 \cdot 1{,}5 = 63 + 102 = 165$.

Задача 10. Найдите все линейные функции $f(x)$, такие, что для любых чисел x и y справедливы равенства: а) $f(x + y) = f(x) + f(y)$; б) $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$; в) $f(tx) = tf(x)$ для любого действительного числа t; г) $f\big((1-t)x+ty\big)=(1-t)f(x)+tf(y)$ для любого действительного числа t.

а) Если $f(x)=ax+b$, то $f(y)=ay+b$ и $f(x+y)=a(x+y)+b$. Таким образом, равенство $f(x+y)=f(x)+f(y)$ имеет вид $a(x+y)+b = ax+b+ay+b$, поэтому оно справедливо только при $b=0$.

б) Данное равенство имеет место для любой линейной функции, так как

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{a(x+y)}{2}+b=\frac{ax+b+ay+b}{2}=\frac{f(x)+f(y)}{2}\,.$$

в) Если $f(x)=ax+b$, то $f(tx)=atx+b$, а $tf(x)=t(ax+b)=atx+bt$. Поэтому только при $b=0$ равенство $f(tx)=tf(x)$ справедливо для любого действительного числа t.

г) Заметим, что равенство в) является обобщением равенства пункта б) задачи, которое получится из него при $t=\frac{1}{2}$. В общем случае

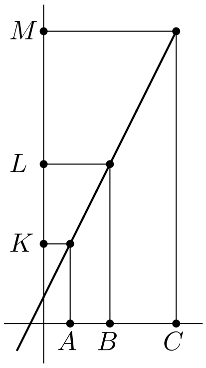
$$\begin{aligned}f\big((1-t)x+ty\big)&=a\big((1-t)x+ty\big)+b=\\&=(1-t)ax+(1-t)b+tay+tb=(1-t)f(x)+tf(y).\end{aligned}$$

Таким образом, данное равенство, так же как и равенство пункта б), справедливо для любой линейной функции.

Поясним смысл доказанного равенства и приведем его геометрическую интерпретацию. Положим $z=(1-t)x+ty$. Тогда $z=x-tx+ty$, откуда $t=\frac{z-x}{y-x}$. С другой стороны, согласно доказанному равенству, $f(z)=f(x)-tf(x)+tf(y)$, поэтому $t=\frac{f(z)-f(x)}{f(y)-f(x)}$. Следовательно,

$$\frac{f(z)-f(x)}{f(y)-f(x)}=\frac{z-x}{y-x}\,,\ \text{или}\ \frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,.$$

Смысл полученного равенства состоит в том, что приращение значений линейной функции пропорционально приращению ее аргумента. Следующий рисунок показывает геометрическую интерпретацию этого равенства.



Длины отрезков AB, BC и AC суть приращения аргумента, а длины отрезков KL, LM и KM — соответствующие им приращения данной линейной функции. Поскольку графиком линейной функции является прямая, то, в силу теоремы Фалеса, равны отношения, к примеру,

$$\frac{KL}{KM} = \frac{AB}{AC}\,,$$

что совпадает с полученным выше равенством. Заметим, что геометрический смысл равенства пункта б) состоял в том, что если точка B является серединой отрезка AC оси абсцисс, то соответствующая ей точка L на оси ординат является серединой отрезка KM.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Найдем уравнение прямой, проходящей через две точки: $A(x_0; y_0)$ и $B(x_1; y_1)$, в предположении, что $x_0 \neq x_1$. Для этого надо найти числа a и b, такие, что координаты данных точек A и B удовлетворяют уравнению $y = ax + b$. Таким образом, $y_0 = ax_0 + b$ и $y_1 = ax_1 + b$. Следовательно, искомые коэффициенты a и b являются решениями системы

$$\begin{cases} ax_0 + b = y_0, \\ ax_1 + b = y_1. \end{cases}$$

Поэтому $a(x_1 - x_0) = y_1 - y_0$, так что $a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Так как $b = y_0 - ax_0$, то искомое уравнение можно записать в виде

$$y = ax + y_0 - ax_0 = y_0 + a(x - x_0) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\,(x - x_0).$$

Перепишем полученную формулу в виде

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\,.$$

Во-первых, она приобрела вполне «симметричный» вид. Во-вторых, мы видим, что это есть в точности соотношение, которое было выведено в предыдущем разделе. Поэтому проведенный нами вывод является излишним, нужная формула уже была получена!

Задача 11. Найдите все линейные функции, переводящие отрезок $[1;4]$ в отрезок $[1;2]$.

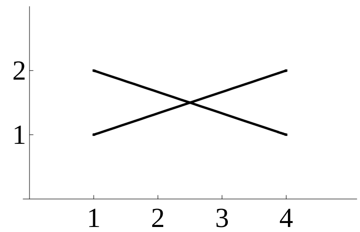
Имеются два варианта, а именно, возможно, что $f(1)=1$ и $f(4)=2$ или же, что $f(1)=2$ и $f(4)=1$. Таким образом, в первом случае график искомой функции проходит через точки $A(1;1)$ и $B(4;2)$, во втором — через точки $C(1;2)$ и $D(4;1)$. Уравнение первой прямой

$$\frac{y-1}{x-1}=\frac{2-1}{4-1}=\frac{1}{2}\,,\ \text{откуда}\ y=\frac{x+2}{3}\,,$$

а уравнение второй прямой

$$\frac{y-2}{x-1}=\frac{1-2}{4-1}=-\frac{1}{3}\,,\ \text{откуда}\ y=\frac{7-x}{3}\,.$$

Таким образом, имеются две линейные функции, удовлетворяющие условию задачи, $y=\frac{1}{3}\,(x+2)$ и $y=\frac{1}{3}\,(7-x)$. Куски их графиков при $x\in[1;4]$ изображены на следующем рисунке.



Взаимное расположение прямых; расположение точек относительно прямых

Задача 12. Найдите все значения a, при которых не имеет решений система

$$\begin{cases} ax+3y=2,\\ 3x-2y=1. \end{cases}$$

Разумно показать два подхода к решению этой задачи. Конечно, из второго уравнения $y = \frac{3x-1}{2}$. Подставив это выражение в первое уравнение, получим, что $ax + \frac{3}{2}(3x-1) = 2$, или $(2a+9)x = 7$. Это уравнение, следовательно, и данная система, не имеет решений при $a = -\frac{9}{2}$.

Теперь будем рассуждать геометрически. Каждое из уравнений данной системы задает на плоскости прямую. Решением системы являются координаты точки их пересечения. Две прямые на плоскости не пересекаются, если они параллельны. Перепишем данные уравнения в виде $y = -\frac{a}{3}x + \frac{2}{3}$ и $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. Прямые параллельны, если совпадают угловые коэффициенты в задающих их уравнениях. Таким образом, система не имеет решений, если $-\frac{a}{3} = \frac{3}{2}$, т. е. если $a = -\frac{9}{2}$.

Задача 13. Даны прямая $y = 20x+13$ и точки $A(-3;-50)$, $B(2;55)$, $C(5;107)$. Выясните, лежат ли точки: а) A и B, б) B и C, в) A и C по одну или же по разные стороны от данной прямой.

Рассмотрим прямую $y = ax + b$ и точку $M(x_0;y_0)$. Положим $y_1 = ax_0 + b$. Точка $P(x_0;y_1)$ лежит на этой прямой. Если $y_0 > y_1$, то точка M располагается выше прямой, если же $y_0 < y_1$ — то ниже ее. Таким образом, расположение точки относительно прямой определяется знаком разности $y_0 - y_1 = y_0 - ax_0 - b$. В нашем случае дана прямая $y = 20x+13$. Так как $-50-20\cdot(-3)-13 = -3 < 0$, то точка A лежит ниже данной прямой. Так как $55 - 20\cdot 2 - 13 = 2 > 0$, то точка B лежит выше данной прямой. Так как $107 - 20\cdot 5 - 13 = -6 < 0$, то точка C лежит ниже данной прямой.

Таким образом, точки A и C лежат по одну сторону от прямой $y = 20x + 13$, а точка B — по другую сторону от нее.

Дополнительные задачи

3.1. Найдите все значения a, при которых: а) неравенство $2x+1 \geqslant a$ справедливо при всех $x \in [-2;2]$; б) система неравенств $2x+1 \geqslant a$ и $2 - x \leqslant a$ справедлива при всех $x \in [1;3]$.

3.2. Найдите значения параметра a, при которых решением неравенства $ax - 1 \geqslant x$ является: а) промежуток $(-\infty;-2]$; б) промежуток $(-\infty;1]$. Дайте геометрическую интерпретацию полученных ответов.

3.3. Найдите все значения a, при которых решение уравнения $ax = 1$ лежит на отрезке $[-1;2]$.

3.4. Про линейную функцию $f(x)$ известно, что $f(-1) = -2$ и $f(3) = 3$. Найдите: а) $f(1)$; б) формулу, задающую функцию $f(x)$.

3.5. а) Докажите, что если для любых действительных чисел x, y и t справедливо равенство $f\big((1-t)x+ty\big) = (1-t)f(x)+tf(y)$, то $f(x)$ — линейная функция. б) Докажите, что если для любых действительных чисел x и y справедливо равенство $f(x+y) = f(x)+f(y)$, то найдется такое число a, что $f\left(\frac{k}{n}\right) = a\frac{k}{n}$ для любых целых чисел k и n.

3.6. Найдите все линейные функции $f(x)$, такие, что:
а) $f(f(x)) = 4x+3$; б) $f(f(x)) = x$.

3.7. 1) Найдите значения параметра a, при которых графики линейных функций $y = 5x+10$ и $y = ax$ пересекаются в точке:
а) с ординатой 12; б) с абсциссой 1.
2) Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 10 км, одновременно в одном направлении начали движение пешеход и велосипедист. Скорость пешехода равна 5 км/час. Найдите скорость велосипедиста, при которой он нагонит пешехода: а) прежде чем тот пройдет 2 км; б) раньше чем через час.

3.8. В 1 литре напитка *Буко* (ценой 4 доллара) содержится 3 г красителя E20 и 5 г консерванта E41, а в 1 литре напитка *Суно* (ценой 5 долларов) — 4 г E20 и 6 г E41. Какую наименьшую сумму необходимо иметь Гарри перед походом на дискотеку, чтобы обеспечить свой организм не менее чем 11 граммами красителя и 17 граммами консерванта?

3.9. Колонна спортсменов длиной 40 метров бежит со скоростью 12 км/час. Навстречу им со скоростью 8 км/час бежит тренер. Каждый спортсмен, поравнявшись с тренером, разворачивается и бежит в противоположную сторону с той же скоростью, что и ранее. Найдите длину колонны после того, как последний спортсмен произведет разворот.

3.10. Передние покрышки автомобиля стираются через 25 000 км, тогда как задние — через 15 000 км. В какой момент надо поменять местами покрышки с передних и с задних колес, чтобы на одном комплекте покрышек проехать наибольшее расстояние?

Варианты самостоятельных работ по теме 3

Проверочная работа 1

Вариант 1

1. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;1)$ и: а) параллельной прямой $y = -\frac{x}{2}$; б) пересекающей ось ординат в точке $B(0;2)$; в) пересекающей ось абсцисс в точке $C(1;0)$.

2. Найдите точку пересечения прямых $y = -x - 10$ и $y = 4x$.

3. Прямая ℓ задана уравнением $y = -2x + b$. Найдите все значения b, при которых ее точка пересечения с прямой $y = x - 1$ лежит выше оси абсцисс.

4. а) Найдите все значения a, при которых число 3 является решением неравенства $(a-1)x \geqslant a - 2$. б) Верно ли, что при любом из найденных значений параметра a данное неравенство будет выполняться при всех $x \geqslant 3$?

5. Про линейную функцию $f(x)$ известно, что $f(3x+1) = \frac{x-1}{2}$. Найдите: а) $f(1)$; б) $f(2)$; в) $f(x)$.

Вариант 2

1. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;3)$ и: а) параллельной прямой $y = -2x$; б) пересекающей ось ординат в точке $B(0;1)$; в) пересекающей ось абсцисс в точке $C(-2;0)$.

2. Найдите точку пересечения прямых $y = 2x + 12$ и $y = -4x$.

3. Прямая ℓ задана уравнением $y = 2x + b$. Найдите все значения b, при которых ее точка пересечения с прямой $y = x + 1$ лежит ниже оси абсцисс.

4. а) Найдите все значения a, при которых число 2 является решением неравенства $(a-1)x \geqslant -a - 1$. б) Верно ли, что при любом из найденных значений параметра a данное неравенство будет выполняться при всех $x \geqslant 2$?

5. Про линейную функцию $f(x)$ известно, что $f(4x+1) = \frac{x+1}{5}$. Найдите: а) $f(1)$; б) $f(2)$; в) $f(x)$.

Вариант 3

1. Найдите все значения углового коэффициента, при которых прямая, проходящая через точку $A(-2; 0)$, пересекает ось ординат в точке, лежащей на отрезке с концами в 1 и 2.

2. Комиссия за оформление кредита в банке «ОХО» составляет 9000 рублей (независимо от суммы кредита), а годовая ставка равна 13%. В банке «ЭХЭ» размер комиссии равен 4000 рублей, а годовая ставка равна 17%. Определите размер кредита на год, при котором клиенту будет выгоднее обратиться в банк «ЭХЭ».

3. Найдите все значения a, при которых неравенство $ax \leqslant 2$ справедливо при всех $x \leqslant 1$.

4. Дана линейная функция $f(x) = 3x + 2$. Найдите все линейные функции $g(x)$, такие что при всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство: а) $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$; б) $f\big(g(x)\big) = -f(x)$.

Вариант 4

1. Найдите все значения углового коэффициента, при которых прямая, проходящая через точку $A(1; 0)$, пересекает ось ординат в точке, лежащей на отрезке с концами в 1 и 2.

2. Комиссия за оформление кредита в банке «АГА» составляет 10 000 рублей (независимо от суммы кредита), а годовая ставка равна 12%. В банке «УГУ» размер комиссии равен 5000 рублей, а годовая ставка равна 14%. Определите размер кредита на год, при котором клиенту будет выгоднее обратиться в банк «АГА».

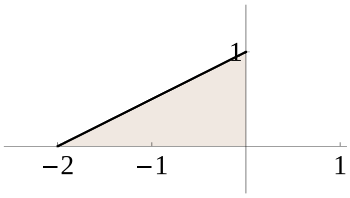
3. Найдите все значения a, при которых неравенство $ax \geqslant -3$ справедливо при всех $x \geqslant -1$.

4. Дана линейная функция $f(x) = 2x - 1$. Найдите все линейные функции $g(x)$, такие что при всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство: а) $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$; б) $f\big(g(x)\big) = -f(x)$.

Проверочная работа 2

Вариант 1

1. Задайте системой линейных неравенств треугольник, изображенный на следующем рисунке.



2. а) Найдите точки пересечения прямой $y = 2x + 1$ и окружности $x^2 + y^2 = 2$.
б) Приведите графическую иллюстрацию этой задачи.

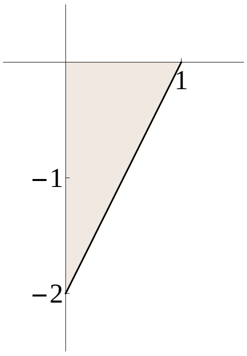
3. Изобразите на координатной плоскости множества, заданные уравнениями:
а) $(y - 1)(2x - y - 1) = 0$;
б) $(x - y)^2 + (x - 1)^2 = 0$.
в) $(x - y)^2 = (x - 1)^2$.

4. Найдите все значения a, при которых точка $M(a; a + 3)$ лежит в множестве, заданном уравнением $(y - 1)(2x - y - 1) = 0$.

5. Некто собирается взять кредит в банке на год под 15% годовых. Комиссия за выдачу кредита составляет 6000 рублей (независимо от суммы кредита). При какой сумме кредита клиенту в итоге придется всего заплатить банку не более чем 270 500 рублей?

Вариант 2

1. Задайте системой линейных неравенств треугольник, изображенный на следующем рисунке.



2. а) Найдите точки пересечения прямой $y = \frac{x-3}{2}$ и окружности $x^2 + y^2 = 2$.
б) Приведите графическую иллюстрацию этой задачи.

3. Изобразите на координатной плоскости множества, заданные уравнениями:
а) $(y-2)(2x+y+2) = 0$;
б) $(x+y)^2 + (x+2)^2 = 0$.
в) $(x+y)^2 = (x+2)^2$.

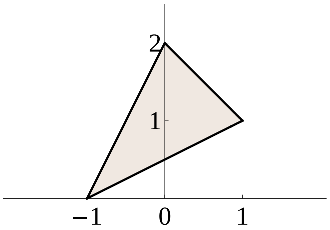
4. Найдите все значения a, при которых точка $M(a-2; -a)$ лежит в множестве, заданном уравнением $(y-2)(2x+y+2) = 0$.

5. Некто собирается взять кредит в банке на год под 16% годовых. Комиссия за выдачу кредита составляет 5000 рублей (независимо от суммы кредита). При какой сумме кредита клиенту в итоге придется всего заплатить банку не более чем 324 000 рублей?

Вариант 3

1. Найдите уравнения прямых, пересекающих отрезок с концами в точках $A(-1;3)$ и $B(1;-1)$, которые:
а) параллельны прямой $y = 2x$;
б) проходят через точку $C(-2;0)$.

2. а) Задайте системой линейных неравенств треугольник, изображенный на следующем рисунке.



б) Найдите наименьшее значение суммы координат точек, лежащих в этом треугольнике.

3. Дана система

$$\begin{cases} x + 2y = b, \\ ax + y = 1. \end{cases}$$

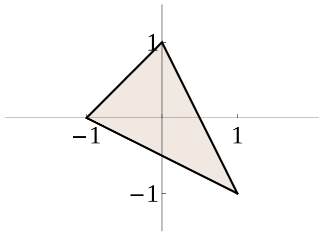
Верно ли, что:
а) для любого значения b существует значение a, такое что данная система имеет решение;
б) для любого значения a существует значение b, такое что данная система имеет решение?

4. Исследования показывают, что на данном предприятии доходы от продаж являются линейной функцией от вложений в производство. Известно, что если увеличить вложения на 1 млн, то доходы от продаж увеличатся в полтора раза. Во сколько раз выросли бы доходы, если бы вложения увеличили не на один, а на 2 млн?

Вариант 4

1. Найдите уравнения прямых, пересекающих отрезок с концами в точках $A(1;4)$ и $B(-1;-1)$, которые:
а) параллельны прямой $y = \frac{x}{2}$;
б) проходят через точку $C(2;0)$.

2. а) Задайте системой линейных неравенств треугольник, изображенный на следующем рисунке.



б) Найдите наибольшее значение суммы координат точек, лежащих в этом треугольнике.

3. Дана система

$$\begin{cases} 2x - 3y = b, \\ x + ay = 2. \end{cases}$$

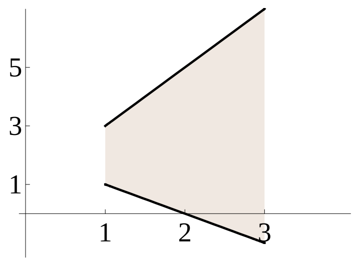
Верно ли, что:
а) для любого значения b существует значение a, такое что данная система имеет решение;
б) для любого значения a существует значение b, такое что данная система имеет решение?

4. Исследования показывают, что на данном предприятии доходы от продаж являются линейной функцией от вложений в производство. Известно, что если увеличить вложения на 2 млн, то доходы от продаж увеличатся в полтора раза. Во сколько раз выросли бы доходы, если бы вложения увеличили не на два, а только на 1 млн?

Ответы, решения, комментарии

3.1. а) Если $x \in [-2; 2]$, то $2x + 1 \in [-3; 5]$, поэтому число a должно быть не больше каждого из чисел отрезка $[-3; 5]$, откуда следует, что $a \leqslant -3$. б) Множество всех чисел вида $2x + 1$ при $x \in [1; 3]$ есть отрезок $[3; 7]$, а множество всех чисел вида $2 - x$ есть отрезок $[-1; 1]$. Следовательно, $a \in [1; 3]$.

Эту задачу удобно решать, используя геометрическую интерпретацию ее условия. На координатной плоскости $(x; a)$ множество, заданное неравенством $a \leqslant 2x + 1$, есть полуплоскость, лежащая ниже прямой $a = 2x + 1$, а множество, заданное неравенством $a \geqslant 2 - x$, есть полуплоскость, расположенная выше прямой $a = 2 - x$. Так как еще дано, что $x \in [1; 3]$, то множество всех точек, таких что $x \in [1; 3]$, $a \leqslant 2x+1$ и $a \geqslant 2-x$, является четырехугольником, изображенным на следующем рисунке.

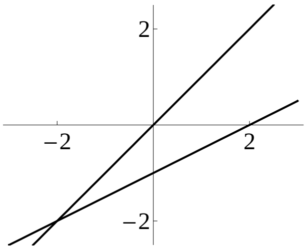


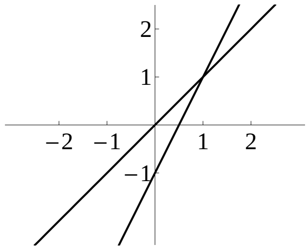
Множество всех таких a, для которых при всех $x \in [1; 3]$ пара $(x; a)$ лежит в этом четырехугольнике, есть отрезок $[1; 3]$.

3.2. а) Поскольку при $x = -2$ неравенство должно обращаться в равенство, то $-2a - 1 = -2$, откуда $a = \frac{1}{2}$. Таким образом, данное неравенство имеет вид $\frac{x}{2} - 1 \geqslant x$, или $\frac{x}{2} \leqslant -1$, решением которого действительно является промежуток $(-\infty; -2]$. б) В данном случае должно быть верно равенство $a - 1 = 1$, так что $a = 2$. Получаем неравенство $2x - 1 \geqslant x$, откуда $x \geqslant 1$, что противоречит условию. Значит, в этом случае требуемого значения параметра a не существует.

Конечно, рассуждать во втором случае можно было проще. Так как множеством решений должен быть луч $(-\infty; 1]$, то неравенство должно быть верно при $x = 0$, однако оно, конечно, неверно, поскольку $-1 < 0$.

Геометрическая интерпретация — на следующих рисунках.

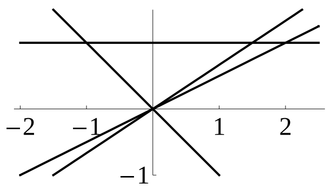




В первом случае прямая $y = ax - 1$ должна пересекаться с прямой $y = x$ в точке с абсциссой $x = -2$, таким образом, она должна проходить через точку $(-2; -2)$. Из левого рисунка ясно видно, что тогда прямая $y = ax - 1$ лежит выше прямой $y = x$ как раз при всех $x \leqslant -2$. Во втором случае прямая $y = ax - 1$ должна проходить через точку $(1; 1)$, но тогда при $x \leqslant -1$ она лежит ниже прямой $y = x$.

3.3. Решением уравнения $ax = 1$ является число $x = \frac{1}{a}$. По условию должны выполняться неравенства $-1 \leqslant \frac{1}{a} \leqslant 2$. При $a > 0$ первое из них верно, а неравенство $\frac{1}{a} \leqslant 2$ выполнено при $a \geqslant \frac{1}{2}$. Если же $a < 0$, то верно второе неравенство, а решением неравенства $-1 \leqslant \frac{1}{a}$ является промежуток $(-\infty; -1]$. Таким образом, ответом является объединение промежутков $(-\infty; -1]$ и $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Решение будет нагляднее, если воспользоваться геометрической интерпретацией задачи. На рисунке изображены: прямая $y = 1$ и прямые, пересекающие ее в точках с абсциссами $x = -1$ и $x = 2$.



Решением уравнения $ax = 1$ является абсцисса точки пересечения прямых $y = 1$ и $y = ax$. Эта точка лежит в отрезке $[-1; 2]$, если прямая $y = ax$ находится между прямыми $y = -x$ и $y = \frac{x}{2}$. Следовательно, угловой коэффициент a этой прямой или должен быть не меньше, чем $\frac{1}{2}$, или же не больше, чем -1.

3.4. а) Можно найти значения коэффициентов a и b из условий $-2 = -a + b$ и $3 = 3a + b$. Однако важно пояснить, что задача уже была решена. Все, что надо сделать, — это провести прямую через точки $A(-1;-2)$ и $B(3;3)$. Уравнение этой прямой

$$y = -2 + \frac{3-(-2)}{3-(-1)}\,(x+1) = -2 + \frac{5}{4}\,(x+1) = \frac{5x-3}{4}\,,$$

и, поскольку эта прямая и является графиком искомой линейной функции, то $f(x) = \frac{5x-3}{4}$.

3.5. а) Взяв $x = 0$ и $y = 1$, получим, что $f(t) = (1-t)f(0) + tf(1) = f(0) + t\bigl(f(1) - f(0)\bigr)$, таким образом, $f(t) = at + b$, где $a = f(1) - f(0)$ и $b = f(0)$.

б) Так как $f(0) = f(0+0) = 2f(0)$, то $f(0) = 0$. Взяв $y = -x$, получим, что $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, откуда следует, что $f(-x) = -f(x)$. Далее, $f(2x) = f(x+x) = 2f(x)$, а $f(3x) = f(x+2x) = f(x) + 2f(x) = 3f(x)$. Рассуждая аналогичным образом, получим, что $f(nx) = nf(x)$ для любого натурального числа n. Если k — целое отрицательное число, то $k = -n$, где число n — натуральное, поэтому $f(kx) = f(-nx) = -f(nx) = -nf(x) = kf(x)$. Поэтому для всякого целого числа k имеем $f(k) = kf(1)$. Положим $a = f(1)$. Если $x = \frac{1}{n}$, то $nf(x) = f(nx) = f(1) = a$, поэтому $f\bigl(\frac{1}{n}\bigr) = a \cdot \frac{1}{n}$. Поскольку уже было доказано, что $f(kx) = kf(x)$ при любом целом k, то $f\bigl(\frac{k}{n}\bigr) = kf\bigl(\frac{1}{n}\bigr) = a\frac{k}{n}$.

3.6. а) Ищем линейную функцию $f(x) = ax+b$, такую что $f\bigl(f(x)\bigr) = 4x+3$. Так как $f\bigl(f(x)\bigr) = af(x) + b = a(ax+b) + b = a^2x + ab + b$, то должны выполняться равенства $a^2 = 4$ и $ab + b = 3$. Таким образом, $a = 2$ и тогда $b = 1$ или же $a = -2$ и $b = -3$. Поэтому существуют две такие функции: $y = 2x + 1$ и $y = -2x - 3$.

б) Будем рассуждать таким же образом, что и при решении предыдущего пункта. Так как $f\bigl(f(x)\bigr) = a^2x + ab + b$, то $a^2 = 1$ и $ab + b = 0$. Если $a = 1$, то $b = 0$, если же $a = -1$, то число b — произвольное. Таким образом, имеется бесконечно много функций, для которых $f\bigl(f(x)\bigr) = x$, это функция $y = x$ и функции вида $y = b - x$, где число b является произвольным.

3.7. 1а) По условию абсцисса x точки пересечения является решением системы $5x + 10 = 12$ и $ax = 12$. Из первого уравнения получаем, что $x = \frac{2}{5}$, поэтому $\frac{2a}{5} = 12$, откуда $a = 30$. 1б) По условию $5 + 10 = a$, откуда $a = 15$.

2) Прежде всего полезно понять, что вопросы этого пункта имеют непосредственную связь с вопросами предыдущего. Расстояние, на котором пешеход находится от пункта B, из которого выехал велосипедист, определяется формулой $s = 5t + 10$, где t — это время их

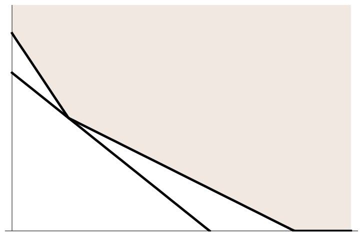
нахождения в пути. Расстояние, на котором находится от пункта B велосипедист, определяется формулой $s = vt$, где через v обозначена его скорость. а) Скорость велосипедиста должна быть больше той, при которой он нагонит пешехода, когда тот пройдет 2 км. А это будет тогда, когда ордината точки пересечения графиков $s = 5t + 10$ и $s = vt$ равна 12. Поэтому, учитывая решение пункта а) выше, получаем, что $v > 30$. Таким образом, скорость велосипедиста должна быть больше 30 км/час. б) Аналогичным образом получаем, что $v > 15$, т. е. скорость велосипедиста должна быть больше 15 км/час.

3.8. Предположим, что Гарри приобрел x литров первого напитка и y литров второго. Выпив их, он подкрепился $3x + 4y$ граммами красителя и $5x + 6y$ граммами консерванта. По условию

$$\begin{cases} 3x + 4y \geqslant 11, \\ 5x + 6y \geqslant 17, \end{cases}$$

кроме того, естественно, что $x, y \geqslant 0$. При этом его затраты составили $4x+5y$ долларов. Конечно, он может взять только напиток *Буко*, в этом случае должны выполняться неравенства $x \geqslant \frac{11}{3}$ и $x \geqslant \frac{17}{5}$, значит, ему придется купить, как минимум, $3\frac{2}{3}$ литра, истратив на это 14 долларов и 67 центов. Но, быть может, есть и более экономный вариант?

Для ответа на этот вопрос можно воспользоваться геометрической интерпретацией данной задачи, вначале изобразив на координатной плоскости множество всех допустимых пар, т. е. подмножество первого координатного угла, заданное найденной системой неравенств. Это множество является изображенным на следующем рисунке, так сказать, «бесконечным четырехугольником».

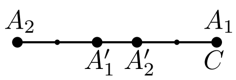


Уравнение $4x + 5y = c$ задает на плоскости прямую. При этом чем меньше c, тем ниже располагается эта прямая. Таким образом, следует найти «самую низкую» прямую, пересекающую изображенный на рисунке четырехугольник. Самая низкая прямая будет проходить через одну из угловых точек этого четырехугольника, поэтому можно подсчитать значения выражения $4x+5y$, взяв в качестве x и y координаты одной из трех углов четырехугольника.

(x,y)	$\left(0;\frac{17}{6}\right)$	$(1;2)$	$\left(\frac{11}{3};0\right)$
$4x+5y$	14,17 \$	14 \$	14,67 \$

Значение этой функции в точке $(1;2)$ равно 14; оно и является искомым. Таким образом, Гарри выгоднее всего купить 1 литр *Буко* и 2 литра *Суно*.

3.9. Рассмотрим момент, в который первый спортсмен A_1 встретился с тренером C. В этот момент второй спортсмен A_2 находился на расстоянии ℓ позади него (рисунок). Поскольку скорости спортсменов в полтора раза больше скорости, с которой бежит тренер, то в момент встречи второго спортсмена с тренером они находились в точке A_2' на расстоянии $\frac{2\ell}{5}$ от точки A_1.



За это время первый спортсмен пробежал (в обратную сторону) то же расстояние, что и первый, значит, он находился в точке A_1' на расстоянии $\frac{3\ell}{5}$ от точки A_1. Следовательно, после поворота расстояние между первым и вторым спортсменами уменьшилось в 5 раз. Во столько же раз в итоге уменьшится и длина всей колонны, поэтому после того, как в обратную сторону побежал последний спортсмен, длина колонны будет составлять всего 8 метров.

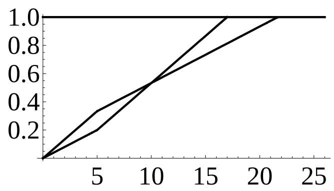
3.10. Введем понятие *степени износа* k покрышек, где $0 \leqslant k \leqslant 1$. В начальный момент она равна нулю. В задаче предполагается, что износ покрышек происходит равномерно. Поскольку на передних колесах покрышки могут прослужить 25 000 км, то для передних колес $k = \frac{x}{25000}$, где через x обозначена величина пробега. Аналогичным образом, степень износа покрышек на задних колесах выражается формулой $k = \frac{x}{15000}$. Предположим, что по достижении пробега 5000 км покрышки с передних колес мы поставили на задние колеса и наоборот, покрышки с задних — на передние. Степень износа покрышек с передних колес была равна $\frac{1}{5}$, степень износа задних покрышек равна $\frac{1}{3}$. Однако покрышки, стоящие теперь на задних колесах, будут изнашиваться с коэффициентом износа, равным $\frac{1}{15000}$. Следовательно, степень их износа по прошествии x км (считая от начала пробега) определяется формулой

$$y = \frac{1}{5} + \frac{1}{15000}\,(x - 5000) = \frac{x}{15000} - \frac{2}{15}\,.$$

Аналогичным образом, для степени износа покрышек, теперь стоящих на передних колесах, получаем формулу

$$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{25000}\,(x - 5000) = \frac{x}{25000} + \frac{2}{15}\,.$$

Графическая иллюстрация приведена на следующем рисунке.

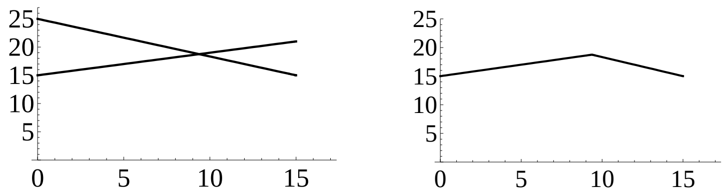


Приравнивая единице полученные линейные функции, получим, что покрышки, исходно стоявшие на задних колесах, всего пригодны для $21666\frac{2}{3}$ км пути, тогда как покрышки, исходно стоявшие на передних, пригодны на 17000 км — столько всего и удастся проехать на данном комплекте. Если «замену покрышек» провести немного позже, то на покрышках, помещенных с передних колес на задние, мы сможем проехать большее расстояние, чем 17000 км (хотя на другой паре — расстояние меньшее, чем $21666\frac{2}{3}$ км).

Теперь предположим, что «замену» провели после t км пути, где $t \leqslant 15000$. Формулы

$$y = \frac{t}{25000} + \frac{1}{15000}\,(x - t) = \frac{x}{15000} - \frac{2t}{75000}$$
$$y = \frac{t}{15000} + \frac{1}{25000}\,(x - t) = \frac{x}{25000} + \frac{2t}{75000}$$

определяют степень износа покрышек. Расстояние, которое прослужит каждая пара покрышек, есть решение уравнения $y = 1$. Решив первое уравнение, получим, что $x_1 = 15000 + \frac{2t}{5}$, решив второе уравнение — что $x_2 = 25000 - \frac{2t}{3}$. С ростом t первое число увеличивается, тогда как второе — уменьшается. На левом рисунке приведены графики этих функций.



Расстояние, которое можно проехать на этом комплекте, равно наименьшему из значений x_1 и x_2, график соответствующей функции приведен на правом рисунке. Наибольшее расстояние, которое можно проехать, — это ордината точки пересечения графиков. Поэтому все, что осталось сделать, — это решить систему

$$\begin{cases} y = 15000 + \frac{2t}{5}, \\ y = 25000 - \frac{2t}{3}, \end{cases}$$

откуда и получаем, что $t = 9375$ и $y = 18\,750$. Таким образом, «замену» покрышек надо произвести после 9375 км пути, а всего на одном комплекте можно будет проехать 18 750 км. Кстати, то, что второе число ровно вдвое больше другого, очевидно из геометрических соображений.

В действительности задача может быть решена проще, однако в рассуждении будет использоваться одно интуитивно понятное соображение. Предположим, что покрышки поменяли местами после того, как на автомобиле проехали x км. На покрышках с передних колес еще можно было бы проехать $25000 - x$ км, однако на задних колесах они стираются в $\frac{25000}{15000} = \frac{5}{3}$ раз быстрее, поэтому, будучи поставленными на задние колеса, они прослужат еще только $\frac{3}{5}\,(25000 - x) = 15000 - \frac{3}{5}\,x$ км. Наоборот, на покрышках, помещенных с задних колес на передние, еще можно будет проехать $\frac{5}{3}\,(15000 - x) = 25000 - \frac{5}{3}\,x$ км. Наибольшее расстояние на имеющемся комплекте мы проедем тогда, когда покрышки придут в негодность одновременно, т. е. тогда, когда $15000 - \frac{3}{5}\,x = 25000 - \frac{5}{3}\,x$. Решив полученное уравнение, мы и получим, что $x = 9375$ км.

Тема 4. Модуль

Диагностическая домашняя работа

1. Найдите модули чисел: а) $2-\sqrt{5}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}$; в) $\sqrt[3]{26}-\sqrt{10}$.

2. Решите уравнение $|x+3|=|2x-6|$.

3. Найдите все точки числовой прямой, расположенные: а) ближе к точке $A(-2)$, чем к точке $B(2)$; б) вдвое ближе к точке $A(-2)$, чем к точке $B(2)$.

4. Найдите все значения, которые принимает $|x|$, если: а) $|x+3|=2$; б) $|x+3|\leqslant 2$; в) $|x-1|<2$.

5. Решите уравнения: а) $|x-1|=1-x$; б) $|x^3+x|=x^3+x$.

6. Изобразите на плоскости множество, задаваемое: а) неравенством $y\leqslant|x|$; б) уравнением $|y-x|=x-y$.

7. Решите уравнения: а) $|x|+|2x-1|=0$; б) $|x-1|+|2x-3|=x-4$; в) $|x-1|+|x+1|=2$.

8. Определите в зависимости от значения a количество решений уравнения: а) $|x-1|-x=a$; б) $|2x-1|-x=a$; в) $\left|\frac{x}{2}-1\right|-x=a$.

Решения задач диагностической работы и их обсуждение

1. Поскольку $|a|=a$, если $a\geqslant 0$, и $|a|=-a$, если $a\leqslant 0$, то все, что надо сделать, — это определить знаки данных чисел.

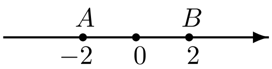
а) Так как $\sqrt{5}>2$, то $2-\sqrt{5}<0$, поэтому $\left|2-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-2$.

б) Так как $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$, то это число положительно, следовательно, $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}$.

в) Так как $\sqrt[3]{26}<\sqrt[3]{27}=3$, а $\sqrt{10}>\sqrt{9}=3$, то данное число является отрицательным, поэтому $\left|\sqrt[3]{26}-\sqrt{10}\right|=\sqrt{10}-\sqrt[3]{26}$.

2. Равенство $|a|=|b|$ справедливо в случае, когда $a=b$ или же $a=-b$. Поэтому решениями данного уравнения являются как решения уравнения $x+3=2x-6$, так и решения уравнения $x+3=6-2x$. Таким образом, $x=9$ или $x=1$.

3. а) Точки M, расстояние от которых до точки A меньше, чем расстояние до точки B, лежат на числовой прямой левее середины отрезка между точками A и B (рисунок).



Поэтому таковыми являются все точки, лежащие на отрицательной части числовой прямой, т. е. точки $M(x)$, где $x < 0$.

б) По условию $BM = 2AM$, поэтому $|x-2| = 2|x+2|$. Значит, $x-2 = 2x+4$, откуда $x = -6$, либо же $x-2 = -2x-4$, откуда $x = -\frac{2}{3}$.

4. а) Так как $|x+3| = 2$, то $x+3 = 2$ или $x+3 = -2$, значит, $x = -1; -5$, следовательно, $|x| = 1; 5$.

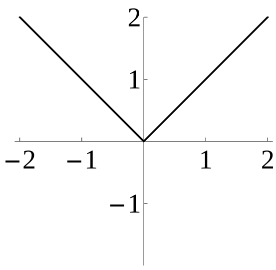
б) Перепишем неравенство $|x+3| \leqslant 2$ в виде $-2 \leqslant x+3 \leqslant 2$, откуда $-5 \leqslant x \leqslant -1$, следовательно, $|x|$ принимает все значения из отрезка $[1; 5]$.

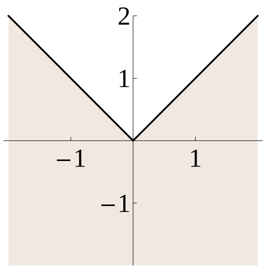
в) Решением неравенства $|x-1| < 2$ является промежуток $(-1; 3)$. В таком случае $|x|$ будет принимать все значения из промежутка $[0; 3)$.

5. а) Равенство $|x-1| = 1-x = -(x-1)$ имеет место тогда и только тогда, когда $x-1 \leqslant 0$. Таким образом, решением данного уравнения является промежуток $(-\infty; 1]$.

б) Данному уравнению удовлетворяют все решения неравенства $x^3 + x \geqslant 0$ и только они. Так как $x^3 + x = x(x^2+1)$, а $x^2+1 > 0$ при всех x, то данному уравнению удовлетворяют все неотрицательные числа. Таким образом, множеством его решений является промежуток $[0; +\infty)$.

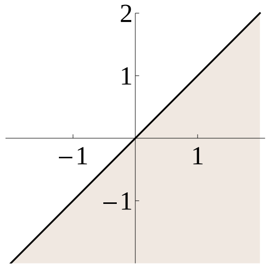
6. а) На левом рисунке изображен график модуля. По определению графика функции, абсциссы и ординаты точек этого графика удовлетворяют уравнению $y = |x|$.





Точки, удовлетворяющие неравенству $y \leqslant |x|$, лежат на этом графике или ниже его (правый рисунок).

б) Данное равенство выполняется тогда и только тогда, когда $y - x \leqslant 0$. Уравнение $y = x$ задает на плоскости прямую, поэтому неравенство $y \leqslant x$ задает полуплоскость, состоящую из точек, лежащих на этой прямой или ниже ее (рисунок).

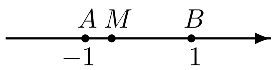


7. Уравнения в этой задаче являют собой примеры уравнений, для решения которых никаких «случаев» разбирать не надо.

а) Поскольку каждый из стоящих в левой части модулей есть неотрицательное число, то их сумма равна нулю только если равен нулю каждый из них, т. е. и $x = 0$, и $2x - 1 = 0$, чего одновременно быть не может. Значит, данное уравнение решений не имеет.

б) Так как левая часть данного уравнения неотрицательна, то должна быть неотрицательна и его правая часть, значит, должно выполняться неравенство $x \geqslant 4$. В этом случае $|x-1| = x-1$ и $|2x-3| = 2x-3$. В результате мы получаем уравнение $x - 1 + 2x - 3 = x - 4$, откуда $x = 0$. Поскольку найденное значение меньше 4, то данное уравнение решений не имеет.

в) Данное уравнение проще всего решать при помощи геометрических соображений. Пусть M — точка, отвечающая числу x. Тогда $|AM| = |x + 1|$ и $|BM| = |x - 1|$ (рисунок).

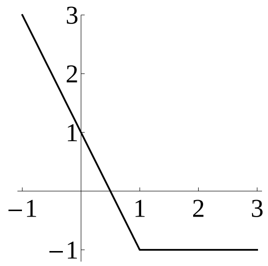


Так как $|AB| = 2$, получаем, что данное уравнение можно записать в виде $|AM| + |BM| = |AB|$, что имеет место тогда и только тогда, когда M — это точка отрезка AB. Следовательно, решением данного уравнения является каждая точка промежутка $[-1; 1]$.

8. Существуют три естественных подхода к решению подобных уравнений. Каждое из уравнений пунктов а)–в) мы будем решать различными способами.

а) Изобразим график левой части данного уравнения (рисунок), т. е. график функции

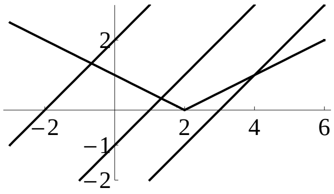
$$f(x) = |x-1| - x = \begin{cases} -1 \text{ при } x \geqslant 1, \\ 1-2x \text{ при } x < 1. \end{cases}$$



Число решений этого уравнения совпадает с числом точек пересечения построенного графика и (горизонтальной) прямой $y = a$. Ясно, что при $a < -1$ эта прямая не пересекается с графиком. При $a = -1$ их пересечением является целый луч, таким образом, уравнение имеет бесконечно много решений. Если же $a > -1$, то график и соответствующая прямая имеют единственную общую точку.

б) Разберем случаи. Если $2x-1 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant \frac{1}{2}$, то мы получим уравнение $x-1 = a$, откуда $x = a+1$. Это число будет решением исходного уравнения, если оно удовлетворяет сделанному предположению, т. е. если $a+1 \geqslant \frac{1}{2}$, откуда $a \geqslant -\frac{1}{2}$. Теперь предположим, что $x < \frac{1}{2}$. В этом случае получаем уравнение $1-3x = a$, откуда $x = \frac{1-a}{3}$. Проверим, при каких значениях a полученное число удовлетворяет сделанному предположению. Имеем $\frac{1-a}{3} < \frac{1}{2}$, или $2-2a < 3$, откуда $a > -\frac{1}{2}$. Таким образом, при $a = -\frac{1}{2}$ уравнение имеет единственное решение. Если $a > -\frac{1}{2}$, то оно имеет два решения. При $a < -\frac{1}{2}$ уравнение решений не имеет.

в) Перепишем уравнение в виде $\left|\frac{x}{2} - 1\right| = x+a$ и изобразим график его левой части. Число решений данного уравнения совпадает с числом точек пересечения этого графика с прямой $y = x + a$. Ясно, что при любом значении a эта прямая пересекается с графиком в единственной точке (рисунок).



Следовательно, при любом значении a данное уравнение имеет единственное решение.

Понятия, методы и идеи

Как видно из приведенных решений, для решения задач диагностической работы следовало использовать:

1) определение модуля числа и такое его свойство, как неотрицательность;

2) геометрический смысл модуля разности двух чисел;

3) анализ уравнений, основанный на свойствах модуля;

4) график модуля;

5) графическую интерпретацию уравнений;

6) понятие множества, заданного уравнением (неравенством).

В дополнение к ним отметим еще такие факты и методы, как:

7) решение уравнений вида $|A| = B$;

8) решение неравенств вида $|A| \leqslant B$ и $|A| \geqslant B$;

9) неравенства для модуля суммы и модуля разности двух чисел и их геометрическая интерпретация («неравенство треугольника»);

10) построение графиков кусочно-линейных функций.

Уравнения вида $|A| = B$

К решению уравнений указанного вида можно подходить двумя способами.

Способ 1. Поскольку левая часть такого уравнения неотрицательна, то его решение существует только в случае, когда неотрицательна и его правая часть. Следовательно, должно выполняться условие $B \geqslant 0$. При введенном условии равенство $|A| = B$ будет выполняться, если $A = B$ или $A = -B$. В результате мы получаем, что

$$|A| = B \iff \begin{cases} A = B, \\ B \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A = -B, \\ B \geqslant 0. \end{cases}$$

Способ 2. Рассмотрим отдельно случаи $A \geqslant 0$ и $A \leqslant 0$. Тогда в силу определения модуля мы получим, что

$$|A| = B \iff \begin{cases} A = B, \\ A \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A = -B, \\ A \leqslant 0. \end{cases}$$

Какой из способов применять — зависит от конкретной задачи. Для того, чтобы учащиеся это осознали, давайте предложим им следующую задачу.

Задача 9. Решите уравнение:
а) $|x^2 - 2x - 1| = x - 1$; б) $|x - 1| = x^2 - 2x - 1$; в) $|x^2 - 2x - 1| = |x - 1|$.

а) Ясно, что $x \geqslant 1$. Тогда $x^2 - 2x - 1 = x - 1$ или же $x^2 - 2x - 1 = 1 - x$. Преобразуя, получаем, что $x^2 - 3x = 0$ или $x^2 - x - 2 = 0$. Решениями первого уравнения являются числа $x = 0; 3$, из которых условию $x \geqslant 1$ удовлетворяет только $x = 3$. Решениями второго уравнения являются числа $x = -1; 2$, из которых подходит только $x = 2$. *Ответ:* $x = 2; 3$.

б) Рассмотрим два случая. Если $x \geqslant 1$, то получаем уравнение $x - 1 = x^2 - 2x - 1$, или $x^2 - 3x = 0$, откуда $x = 0; 3$. Введенному предположению удовлетворяет только $x = 3$. Теперь предположим, что $x < 1$. В этом случае уравнение имеет вид $1 - x = x^2 - 2x - 1$, или $x^2 - x - 2 = 0$, откуда $x = -1; 2$. Предположению $x < 1$ удовлетворяет только число $x = -1$. *Ответ:* $x = -1; 3$.

Уравнение пункта в) не является уравнением рассматриваемого вида. Оно включено в задачу 9 с той целью, чтобы учащиеся привыкали сначала смотреть на условие задачи вместо того, чтобы сразу пытаться применить изучаемый на этом уроке метод.

в) Это уравнение является аналогом уравнения 2 диагностической работы и решается тем же методом. Уравнение $|A| = |B|$ равносильно совокупности уравнений $A = B$ и $A = -B$, другими словами, $|A| = |B|$ тогда и только тогда, когда $A = B$ или же $A = -B$. В рассматриваемом случае получаем, что $x^2 - 3x = 0$ или $x^2 - x - 2 = 0$, откуда и следует ответ: $x = -1; 0; 2; 3$.

Неравенства вида $|A| \leqslant B$ и $|A| \geqslant B$

Если $B < 0$, то неравенство $|A| \leqslant B$ решений не имеет. Если $B \geqslant 0$, то оно равносильно системе неравенств $A \leqslant B$ и $A \geqslant -B$. Теперь обратим внимание на то, что если $-B \leqslant A \leqslant B$, то $B \geqslant 0$, значит, первое неравенство является следствием двух оставшихся, поэтому оно является лишним. Таким образом,

$$|A| \leqslant B \iff \begin{cases} B \geqslant 0, \\ A \leqslant B, \\ A \geqslant -B \end{cases} \iff \begin{cases} A \leqslant B, \\ A \geqslant -B. \end{cases}$$

Полученный результат проще пояснить, воспользовавшись другим представлением модуля. А именно,

$$|a| = \max\{a, -a\}.$$

Действительно, если число a неотрицательно, то $a \geqslant -a$, поэтому наибольшим из чисел a и $-a$ является число a. Если же $a < 0$, то $-a > a$, поэтому наибольшим из чисел a и $-a$ является число $-a$. Следующий шаг заключается в использовании простой логики. В каком случае наибольшее из чисел a и b не превосходит числа c? Ясно, что это имеет место тогда и только тогда, когда каждое из чисел a и b не превосходит числа c. А наибольшее из чисел a и b будет не меньше c тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел a и b не меньше числа c.

Из этого и следует, что

$$(1)\ |A| \leqslant B \iff \begin{cases} A \leqslant B, \\ A \geqslant -B \end{cases} \quad \text{и } (2)\ |A| \geqslant B \iff A \geqslant B \text{ или } A \leqslant -B.$$

Задача 10. Решите неравенство:
а) $|x^2 - 4x| \leqslant 3$; б) $|x^2 - 4x| \leqslant x$; в) $x^2 - 4|x - 1| \leqslant 1$.

а) Имеем:

$$|x^2-4x|\leqslant 3 \iff \begin{cases} x^2-4x\leqslant 3,\\ x^2-4x\geqslant -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-4x-3\leqslant 0,\\ x^2-4x+3\geqslant 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства является промежуток $[2-\sqrt{7};2+\sqrt{7}]$, решениями второго — объединение $(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$. Следовательно, решениями системы является объединение $[2-\sqrt{7};1]\cup[3;2+\sqrt{7}]$.

б) Аналогичным образом,

$$|x^2-4x|\leqslant x \iff \begin{cases} x^2-4x\leqslant x,\\ x^2-4x\geqslant -x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-5x\leqslant 0,\\ x^2-3x\geqslant 0. \end{cases}$$

Общей частью множеств решений этих неравенств является объединение $\{0\}\cup[3;5]$.

в) Решать это неравенство можно разными способами. Давайте используем стандартный подход, для чего перепишем данное неравенство в виде $4|x-1|\geqslant x^2-1$. Тогда

$$4|x-1|\geqslant x^2-1 \iff 4(x-1)\geqslant x^2-1 \text{ или } 4(x-1)\leqslant 1-x^2.$$

Преобразуя первое неравенство, получим, что $(x-1)(4-x-1)\geqslant 0$, или $(x-1)(x-3)\leqslant 0$, откуда $x\in[1;3]$. Преобразуя второе, получим, что $(x-1)(x+5)\leqslant 0$, откуда $x\in[-5;1]$. Объединяя полученные отрезки, получим, что множеством решений данного неравенства является отрезок $[-5;3]$.

Задача 11. Изобразите на плоскости множество, заданное неравенством $|2x+y|+|2y-x|\leqslant 3$.

Перепишем данное неравенство в виде $|A|\leqslant C-|B|$. Следовательно, оно равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} A\leqslant C-|B|,\\ A\geqslant |B|-C, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} |B|\leqslant C-A,\\ |B|\leqslant A+C. \end{cases}$$

Каждое из неравенств полученной системы, в свою очередь, равносильно системе из двух неравенств

$$|B|\leqslant C-A \iff \begin{cases} B\leqslant C-A,\\ B\geqslant A-C \end{cases} \quad \text{и} \quad |B|\leqslant A+C \iff \begin{cases} B\leqslant A+C,\\ B\geqslant -A-C. \end{cases}$$

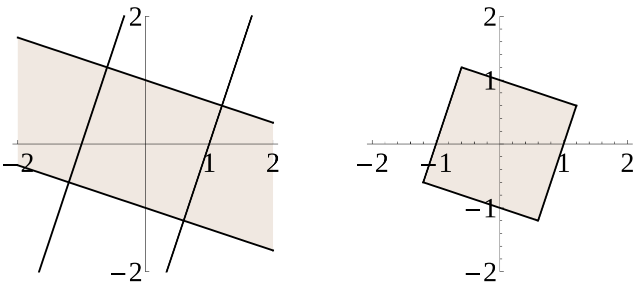
В результате мы получаем, что мы вправе заменить исходное неравенство $|A|+|B|\leqslant C$ на следующую систему из четырех неравенств, которую мы запишем в самом естественном виде:

$$\begin{cases} A+B\leqslant C,\\ -A-B\leqslant C,\\ A-B\leqslant C,\\ -A+B\leqslant C. \end{cases}$$

Таким образом, в нашей задаче мы получаем, что искомое множество задается системой из четырех линейных неравенств:

$$\begin{cases} x+3y\leqslant 3,\\ -x-3y\leqslant 3,\\ 3x-y\leqslant 3,\\ -3x+y\leqslant 3. \end{cases}$$

Рассмотрим первые два неравенства системы: $y\leqslant 1-\frac{x}{3}$ и $y\geqslant -1-\frac{x}{3}$. Каждое из них по отдельности задает полуплоскость, ограниченную одной из двух параллельных друг другу прямых $y = 1-\frac{x}{3}$ и $y = -1-\frac{x}{3}$, а система из этих неравенств задает полосу, ограниченную этими прямыми (левый рисунок). Система из третьего и четвертого неравенств системы задает полосу, ограниченную изображенными на левом рисунке прямыми $y=3x+3$ и $y=3x-3$. Таким образом, данная система четырех неравенств задает пересечение этих полос, которым является изображенный на правом рисунке квадрат.

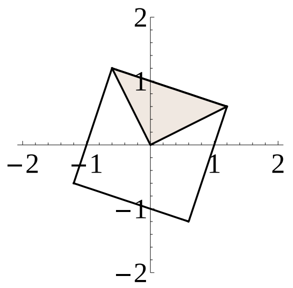


Вершинами этого квадрата являются точки с координатами $\left(\frac{6}{5}\,;\frac{3}{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{5}\,;\frac{6}{5}\right)$, $\left(-\frac{6}{5}\,;-\frac{3}{5}\right)$ и $\left(\frac{3}{5}\,;-\frac{6}{5}\right)$.

Конечно, можно было решать эту задачу, «раскрывая модули». Например, пусть $2x + y \geqslant 0$ и $2y - x \geqslant 0$. Неравенства $y \geqslant -2x$ и $y \geqslant \frac{x}{2}$ задают угол между двумя лучами. При этом предположении получаем неравенство $2x + y + 2y - x \leqslant 3$, или $y \leqslant 1 - \frac{x}{3}$. Полученная система трех неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant -2x, \\ y \geqslant x/2, \\ y \leqslant 1 - \frac{x}{3} \end{cases}$$

задает треугольник, изображенный на следующем рисунке.



При разборе остальных случаев мы получим системы неравенств, задающих на плоскости другие три треугольника. Объединив все четыре треугольника, мы и получим квадрат, изображенный на рисунке выше.

«Неравенство треугольника»

Справедливы неравенства

$$(3)\ |a + b| \leqslant |a| + |b| \quad \text{и} \quad (4)\ |a - b| \geqslant |a| - |b|.$$

Действительно, сложив очевидные неравенства $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ и $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$, получим, что $-|a| - |b| \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$, откуда и следует неравенство (3). Неравенство (4) является его непосредственным следствием, поскольку $|a| = |b + (a - b)| \leqslant |b| + |a - b|$. Теперь рассмотрим неравенство

$$|x - y| \leqslant |x - z| + |z - y| \quad (5)$$

Если положить $a = x - z$ и $b = z - y$, то $x - y = a + b$, поэтому данное неравенство является непосредственным следствием неравенства (3). Доказанное неравенство и принято называть *неравенством* *треугольника* в силу его следующей геометрической интерпретации. Рассмотрим точки A, B и C числовой оси, координатами которых на ней являются числа x, y и z. Так как $|x-y| = |AB|$, $|x-z| = |AC|$ и $|y-z| = |BC|$, то неравенство (5) перепишется в виде

$$|AB| \leqslant |AC| + |BC|.$$

Задача 12. На числовой прямой даны точки $A(-1)$ и $B(2)$. Найдите все точки M числовой прямой, такие что сумма расстояний от M до точек A и B равна: а) 2; б) 3; в) 4.

а) Так как $|AB| = 3$, то $3 = |AB| \leqslant |MA| + |MB|$, поэтому сумма расстояний ни от какой точки числовой прямой до точек A и B не может быть равна 2.

б) Так как $|AB| = 3$, то сумма $|MA|+|MB|$ будет равна трем тогда и только тогда, когда точка M лежит на отрезке AB. Для координаты x точки M это условие означает, что $-1 \leqslant x \leqslant 2$, или что $x \in [-1; 2]$.

в) Так как $|MA| = |x+1|$ и $|MB| = |x-2|$, то мы получаем уравнение $|x+1| + |x-2| = 4$. Если $x \in [-1; 2]$, то левая часть уравнения равна 3, поэтому в этом случае оно не имеет решений. Если $x < -1$, то получаем, что $-x - 1 + 2 - x = 4$, откуда $x = -\frac{3}{2}$. Если $x > 2$, то $x + 1 + x - 2 = 4$, откуда $x = \frac{5}{2}$. *Ответ:* $x = -\frac{3}{2}; \frac{5}{2}$.

Задача 13. Найдите условие на числа a и b, при котором:
а) $|a+b| = |a| + |b|$; б) $|a-b| = |a| - |b|$; в) $|a+b| = a - b$.

а) Смысл задания понятен: предлагается выяснить, в каком случае в нестрогом неравенстве $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ имеет место равенство. До ответа можно догадаться, хотя при этом можно и ошибиться. Советуем показать учащимся два естественных подхода (может быть, они сами до них догадаются).

Способ 1. Равенство $|a+b| = |a| + |b|$ имеет место тогда и только тогда, когда $a+b = |a|+|b|$ или же $a+b = -|a|-|b|$. Поскольку $a \leqslant |a|$ и $b \leqslant |b|$, то первое равенство выполнено в том и только том случае, если $a = |a|$ и $b = |b|$, т. е. если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Рассуждая аналогичным образом, получим, что второе равенство выполнено, если $a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$. Таким образом, равенство а) выполнено тогда и только тогда, когда одно из чисел a и b равно нулю или же их знаки совпадают.

Способ 2. На этот раз поступим формально, а именно, возведем в квадрат обе части равенства. Так как $|x|^2 = x^2$, то в результате мы получим, что $a^2+2ab+b^2 = a^2+2|ab|+b^2$, откуда $ab = |ab|$, что верно, если $ab \geqslant 0$. Конечно, мы получили тот же результат: равенство а) имеет место тогда и только тогда, когда одно из чисел a и b равно нулю или же их знаки совпадают.

б) *Способ 1.* Геометрический смысл данного равенства состоит в том, что расстояние между точками $A(a)$ и $B(b)$ на числовой прямой равно разности расстояний от нуля до точек A и B. В частности, первая из них расположена дальше от нуля, чем вторая. При этом нуль не должен лежать между этими точками. Следовательно, $a \geqslant b \geqslant 0$ или же $a \leqslant b \leqslant 0$.

Способ 2. Перепишем равенство б) в виде $|a| = |a - b| + |b|$ и воспользуемся результатом предыдущего пункта задачи. Получаем, что это равенство справедливо тогда и только тогда, когда $a = b$ или $b = 0$ или же знак разности $a - b$ совпадает со знаком числа b.

в) Поскольку левая часть данного равенства является неотрицательной, то неотрицательна и его правая часть, а потому $a \geqslant b$. При введенном условии равенство имеет место, если $a+b = a-b$, т. е. $b = 0$, или если $-a - b = a - b$, т. е. $a = 0$. Таким образом, равенство в) выполняется тогда и только тогда, когда $b = 0$ и $a \geqslant 0$ или же $a = 0$ и $b \leqslant 0$.

Графики кусочно-линейных функций

Для начала решим одно уравнение.

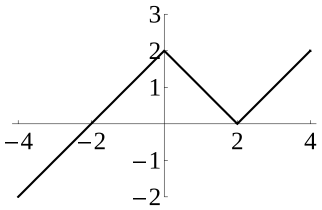
Задача 14. Решите уравнение: $x + |x - 2| = |x| + 1$.

Случаи рассматривать придется, но их всего два. При $x \geqslant 0$ получим уравнение $|x - 2| = 1$, откуда $x = 1; 3$. Если $x < 0$, то получаем уравнение $x + 2 - x = -x + 1$, откуда $x = -1$. *Ответ:* $x = -1; 1; 3$.

Теперь дадим графическую интерпретацию полученного ответа, для чего изобразим график функции $y = x + |x - 2| - |x|$. Рассмотрим три случая: $x \leqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ и $x \geqslant 2$. В первом из них получим, что $y = x + 2 - x + x = x + 2$, во втором — что $y = x + 2 - x - x = 2 - x$ и в третьем — что $y = x - 2$. Таким образом, мы получим функцию, которая задается следующими различными формулами на каждом из трех указанных промежутков:

$$y = \begin{cases} x + 2, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 2 - x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ x - 2, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Ее график изображен на следующем рисунке,



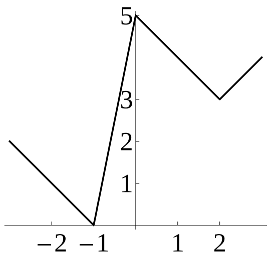
из которого, в частности, сразу очевиден полученный в решении ответ.

Задача 15. а) Постройте график $y = 3|x+1| - 3|x| + |x-2|$; б) Определите наибольшее число решений, которое может иметь уравнение $3|x+1| + |x-2| = 3|x| + a$; в) Докажите, что при всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $3|x+1| + |x-2| \geqslant 3|x|$.

а) Можно применить подход, использованный при построении графика в решении предыдущей задачи, для чего придется рассмотреть 4 случая: $x \leqslant -1$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ и $x \geqslant 2$, в каждом из которых «раскрыть модули» и записать полученное выражение. Однако проще поступить иным способом. Ясно, что на каждом из указанных промежутков данная функция является линейной. Таким образом, ее график представляет собой ломаную, вершинами которой являются точки графика с абсциссами $x = -1$, $x = 0$ и $x = 2$. Составим таблицу значений данной функции.

x	-2	-1	0	2	3
y	1	0	5	3	4

Из этой таблицы мы видим, что «точками излома» являются точки $A(-1;0)$, $B(0;5)$ и $C(2;3)$. Первое и последнее данные в таблице определяют направления лучей, с которыми совпадает график данной функции при $x \leqslant -1$ и при $x \geqslant 2$. Таким образом, угловой коэффициент графика равен -1 при $x \leqslant -1$ и 1 при $x \geqslant 2$. В результате мы получим изображенный на следующем рисунке график.



Для решения заданий пунктов б)–в) достаточно посмотреть на этот график. Ясно, что наибольшее число решений данного уравнения равно четырем, при этом ясно, что уравнение будет иметь четыре решения при $3 < a < 5$. Видно также, что данная функция принимает свое наименьшее решение, равное нулю, при $x = -1$. Следовательно, при всех действительных x верно, что $3|x+1| - 3|x| + |x-2| \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Дополнительные задачи

4.1. Какое из чисел ближе к 1: а) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ или $\frac{\sqrt{5}}{2}$; б) $0{,}3 \cdot \sqrt[3]{4}$ или $\frac{10}{\sqrt[3]{108}}$?

4.2. а) Докажите, что число $\frac{1}{2}(|a-b| + a + b)$ равно наибольшему из чисел a и b. б) Напишите аналогичное выражение для наименьшего из чисел a и b.

4.3. а) На числовой прямой даны точки $A(1)$ и B(4). Найдите координаты точек C и D, таких что $|AC| = |CD| = |BD|$. б) Решите систему уравнений $|x-1| = |x-y| = |y-4|$.

4.4. а) Решите уравнение $|x^2 - x - 2| + |x+1| = 0$. б) Найдите все значения a, при которых уравнение $|x^2 + x - 2| + |x+a| = 0$ имеет решение.

4.5. Найдите все пары $(x; y)$, такие, что: а) $x - y \geqslant |x+y|$; б) $|x-y| \geqslant x+y$.

4.6. Решите неравенства: а) $\frac{|x-2|}{x} \leqslant 0$; б) $\frac{|x-2|}{x} < 1$; в) $\frac{|x-1|}{x-2} < \frac{x-1}{|x-2|}$.

4.7. а) Решите уравнение $\big||x-1|-2\big| = 1$. б) Какое наибольшее число решений имеет уравнение $\big||x-1|-2\big| = a$?

4.8. а) Найдите все значения параметра a, для которых неравенство $|x+1| + |x-1| + |x-5| \geqslant a$ справедливо при всех действительных x. б) Найдите точку числовой оси, для которой сумма расстояний от нее до точек $A(-1)$, $B(1)$ и $C(5)$ является наименьшей.

4.9. Найдите все значения параметра a, при которых: а) множество решений неравенства $|x+1| < 2a-4$ содержит промежуток $[-3; 5]$; б) все решения неравенства $|x+2a| < a-1$ лежат в промежутке $[-7; -3]$; в) промежуток $[-1; 2]$ не содержит ни одного решения неравенства $|x+2a-1| < 3$.

4.10. Найдите все значения параметра a, при которых при всех действительных x справедливо неравенство:
а) $2|x-1| + x \geqslant a$; б) $|x| + |x-2| + |x-a| \geqslant 3$.

4.11. Найдите все значения параметра a, при которых при любом значении b имеет решение уравнение $ax + b = |x|$.

4.12. Задайте уравнением и изобразите на координатной плоскости множество точек, расстояние от которых до оси ординат на единицу больше расстояния до оси абсцисс.

Варианты самостоятельных работ по теме 4

Проверочная работа 1

Вариант 1

1. Упростите выражение $\big|\big||x+1|+2\big|+3\big|-\sqrt{x^2+2x+1}$.

2. Решите уравнения: а) $|2x+1| = 2x+1$; б) $|2x+1| = 2x+15$; в) $|2x+1|+x^2 = 0$.

3. Найдите все значения a, при которых имеет решение уравнение $|2x+1| = 2x+a$.

4. а) Найдите все натуральные числа, расположенные на числовой прямой ближе к 4, чем к 9. б) Решите неравенство: $|x-4| < |x-9|$. в) Решите уравнение: $|x-4|+|x-9| = 5$.

5. а) Постройте график $y = 2|x|+|x-2|$. б) Определите число решений уравнения $|x-2| = a-2|x|$ в зависимости от значения a.

Вариант 2

1. Упростите выражение $\big|\big||x-3|+2\big|+1\big|-\sqrt{x^2-6x+9}$.

2. Решите уравнения: а) $|3x-1| = 3x-1$; б) $|3x-1| = 3x+13$; в) $|3x-1|+x^2 = 0$.

3. Найдите все значения a, при которых имеет решение уравнение $|3x-1| = 3x+a$.

4. а) Найдите все натуральные числа, расположенные на числовой прямой дальше от 12, чем от 5. б) Решите неравенство: $|x-12| > |x-5|$. в) Решите уравнение: $|x-12|+|x-5| = 7$.

5. а) Постройте график $y = |x+2|-3|x|$. б) Определите число решений уравнения $|x+2| = a+3|x|$ в зависимости от значения a.

Вариант 3

1. Решите уравнение: а) $2x+1 = |x-1|$; б) $|2x+1| = x-1$; в) $|2x+1| = |x-1|$.

2. Решите неравенство: а) $2x+1 \leqslant |x-1|$; б) $|2x+1| \leqslant x-1$; в) $|2x+1| \leqslant |x-1|$.

3. Найдите все значения a, при которых уравнение $|2x+1| = x+a$ имеет решение.

4. а) Постройте график $y = |x+1|-|x|+|x-2|$. б) Определите число решений уравнения $|x+1|+|x-2| = |x|+a$ в зависимости от значения a.

5. Найдите точки числовой прямой, сумма расстояний от которых до точек $A(-1)$ и $B(1)$ равна расстоянию до точки $C(3)$.

Вариант 4

1. Решите уравнение: а) $2x-1=|x-1|$; б) $|2x-1|=x-1$; в) $|2x-1|=|x-1|$.

2. Решите неравенство: а) $2x-1\geqslant|x-1|$; б) $|2x-1|\geqslant x-1$; в) $|2x-1|\geqslant|x-1|$.

3. Найдите все значения a, при которых уравнение $|2x-1|=x+a$ имеет решение.

4. а) Постройте график $y=|x-3|-|x|+|x+1|$. б) Определите число решений уравнения $|x-3|+|x+1|=|x|+a$ в зависимости от значения a.

5. Найдите точки числовой прямой, сумма расстояний от которых до точек $A(-2)$ и $B(1)$ равна расстоянию до точки $C(3)$.

Проверочная работа 2

Вариант 1

1. Изобразите на плоскости множество, заданное неравенством: а) $y\geqslant|x|$; б) $|y|\geqslant|x|$; в) $y^{20}\geqslant x^{20}$.

2. Дайте графическое обоснование того, что при любом значении параметра a уравнение $|x|-1=ax$ имеет решение.

3. Найдите все значения a, при которых неравенство $|x|+a\geqslant\frac{1}{2}x$ справедливо для всех действительных чисел x.

4. а) Задайте уравнением множество точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от прямых $y=2$ и $x=1$. б) Изобразите на плоскости множество всех точек, находящихся на одинаковом расстоянии от прямых $y=2$ и $x=1$.

5. Докажите, что если $|x|+|y|\leqslant 2$, то $y<x+3$.

Вариант 2

1. Изобразите на плоскости множество, заданное неравенством: а) $y\leqslant|x|$; б) $|y|\leqslant|x|$; в) $y^{40}\leqslant x^{40}$.

2. Дайте графическое обоснование того, что при любом значении параметра a уравнение $2-|x|=ax$ имеет решение.

3. Найдите все значения a, при которых неравенство $a-|x|\leqslant\frac{1}{3}x$ справедливо для всех действительных чисел x.

4. а) Задайте уравнением множество точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от прямых $x=2$ и $y=-1$. б) Изобразите на плоскости множество всех точек, находящихся на одинаковом расстоянии от прямых $x=2$ и $y=-1$.

5. Докажите, что если $|x|+|y|\leqslant 3$, то $x>y-4$.

Вариант 3

1. Найдите все значения a, при которых имеет решение неравенство $|x-1|+|x+a| \leqslant 2$.

2. Найдите все значения a, при которых при всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство: а) $|x|+1 > ax$; б) $|x-2|+1 > ax$.

3. Напишите уравнение и изобразите на координатной плоскости множество всех точек, расстояние от которых до оси ординат вдвое больше расстояния до прямой $y=1$.

4. Найдите все значения a, при которых для любого значения b имеет решение система неравенств

$$\begin{cases} |x-b| \leqslant 3, \\ |x+1| \geqslant a. \end{cases}$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x-y|+|x+y| = 4, \\ y+3 = |x|. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Найдите все значения a, при которых имеет решение неравенство $|x+1|+|x+a| \leqslant 3$.

2. Найдите все значения a, при которых при всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство: а) $|x|+2 > ax$; б) $|x+2|+1 > ax$.

3. Напишите уравнение и изобразите на координатной плоскости множество всех точек, расстояние от которых до оси абсцисс вдвое меньше расстояния до прямой $x=-1$.

4. Найдите все значения a, при которых для любого значения b имеет решение система неравенств

$$\begin{cases} |x-b| \geqslant 3, \\ |x+1| \leqslant a. \end{cases}$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x-y|+|x+y| = 6, \\ y = 2-|x|. \end{cases}$$

Ответы, решения, комментарии

4.1. а) $\frac{2}{\sqrt{5}}$. б) $0{,}3 \cdot \sqrt[3]{4}$. Рассуждать лучше всего «в общем виде». Если $a > 1$, то $\left|\frac{1}{a} - 1\right| = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a} < a - 1 = |a-1|$. Поэтому из двух взаимно обратных чисел к единице ближе число, меньшее 1.

4.2. а) Если $a \geqslant b$, то данное число равно числу a, т. е. равно большему из чисел a и b. б) $\min\{a, b\} = \frac{1}{2}\big(a + b - |a - b|\big)$. Оба равенства имеют прозрачный геометрический смысл. Чтобы получить наибольшее из двух чисел, надо от середины отрезка между ними (от их среднего арифметического) отступить направо на половину длины этого отрезка (прибавить к среднему половину модуля разности этих чисел).

4.3. *Ответы:* а) $C(4)$ и $D(7)$; $C(-2)$ и $D(1)$; $C(4)$ и $D(1)$; $C(2)$ и $D(3)$. б) $(x; y) = (4; 7), (-2; 1), (4; 1), (2; 3)$. Последний ответ в задании пункта а) виден сразу, предпоследний — тоже. Для того, чтобы найти два первых ответа к этому заданию, придется решать систему уравнений, приведенную в пункте б). Все, что надо сделать, — это решить следующие четыре системы:

$$\begin{cases} x - 1 = x - y, \\ y - 4 = x - y, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 1 = y - x, \\ y - 4 = x - y, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 1 = x - y, \\ y - 4 = y - x, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 1 = y - x, \\ y - 4 = y - x. \end{cases}$$

4.4. *Ответы:* а) -1. б) $a = -2; 1$. Действительно, сумма модулей равна нулю, если каждый из них равен нулю.

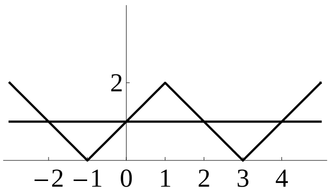
4.5. а) Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x + y \leqslant x - y, \\ x + y \geqslant y - x, \end{cases}$$

откуда следует, что $x \geqslant 0$ и $y \leqslant 0$. б) В данном случае получаем совокупность неравенств: $x - y \geqslant x + y$ или $x - y \leqslant -x - y$, откуда следует, что $x \leqslant 0$ или $y \leqslant 0$.

4.6. а) *Ответ:* $(-\infty; 0) \cup \{2\}$. Левая часть неравенства может быть равна нулю, что имеет место при $x = 2$, или же она отрицательна. Так как $|x - 2| > 0$ при $x \neq 2$, то данное неравенство выполнено и при $x < 0$. б) *Ответ:* $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. Неравенство выполнено при $x < 0$. При $x > 0$ мы можем привести его к виду $|x - 2| < x$ и далее решать одним из стандартных методов. в) *Ответ:* $(1; 2)$. В правой и левой частях неравенства стоят равные по модулю числа. Поэтому неравенство выполнено, если в его левой части стоит отрицательное число, а в правой — положительное, откуда и следует ответ.

4.7. а) *Ответ:* $x = -2; 0; 2; 4$. Решениями данного уравнения являются решения уравнений $|x-1|-2=1$ и $|x-1|-2=-1$, поэтому $|x-1|=3$ или $|x-1|=1$, откуда $x-1=3$, $x-1=-3$, $x-1=1$ или $x-1=-1$. Ответ ясен также с геометрической точки зрения (рисунок).

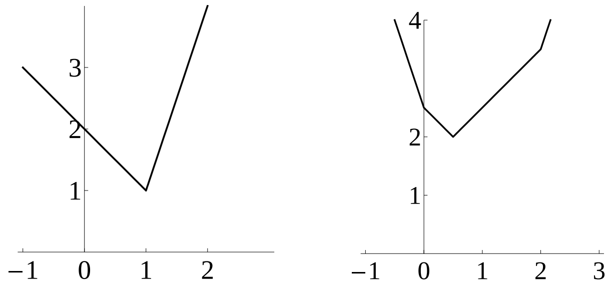


б) *Ответ:* наибольшее число решений равно четырем. Ответ абсолютно ясен из приведенного выше рисунка, на котором изображен график $y = \big||x-1|-2\big|$.

4.8. а) *Ответ:* $a \leqslant 6$. Так как $|x+1|+|x-5| \geqslant 6$ и $|x-1| \geqslant 0$, то $|x+1|+|x-1|+|x-5| \geqslant 6$ при всех действительных x. При этом данное выражение равно 6 при $x=1$. б) *Ответ:* это точка B — см. решение предыдущего пункта.

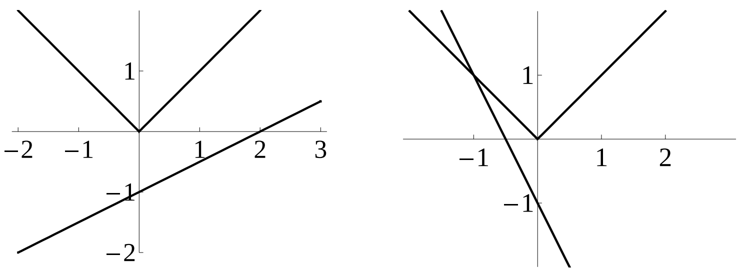
4.9. а) *Ответ:* $a > 5$. Решением данного неравенства является промежуток $(3-2a; 2a-5)$. Этот промежуток содержит отрезок $[-3; 5]$, если $3-2a < -3$ и $2a-5 > 5$. Решив полученную систему неравенств, мы и получим ответ. б) *Ответ:* $a \in \left[2; \frac{8}{3}\right]$. Решением данного неравенства является промежуток $(1-3a; -a-1)$. Этот промежуток содержится в отрезке $[-7; -3]$, если $1-3a \geqslant -7$ и $-a-1 \leqslant -3$. Решив полученную систему неравенств, мы и получим ответ. в) *Ответ:* $a \leqslant -2$ или $a \geqslant \frac{5}{2}$: Решением данного неравенства является промежуток $(-2a-2; 4-2a)$. Этот промежуток не пересекается с отрезком $[-1; 2]$, если $-2a-2 \geqslant 2$ или же $4-2a \leqslant -1$, откуда и следует ответ.

4.10. а) *Ответ:* $a \leqslant 1$. Ответ ясен из левого рисунка, на котором изображен график функции $y = 2|x-1|+x$. б) Проще всего рассуждать следующим образом. При заданном значении a график функции $y = |x|+|x-2|+|x-a|$ представляет собой ломаную с «изломами» в точках с абсциссами $x=0$, $x=2$ и $x=a$ (на правом рисунке изображен такой график при $a=\frac{1}{2}$). Поэтому наименьшее значение функция принимает при одном из этих значений. Следовательно, данное неравенство справедливо при всех x тогда и только тогда, когда оно справедливо при $x = 0$, $x = 2$ и $x = a$.



Таким образом, подставляя вместо x значения 0, 2 и a, получаем, что должны выполняться неравенства: $|a| \geqslant 1$, $|a-2| \geqslant 1$ и $|a|+|a-2| \geqslant 3$. Решив полученную систему, получим ответ: $a \leqslant -1$ или $a \geqslant 3$.

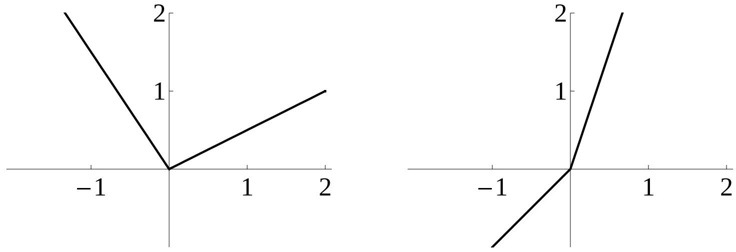
4.11. *Ответ:* $|a| > 1$. Если $b \geqslant 0$, то при любом значении a данное уравнение будет иметь решение, что вполне ясно из графических соображений. Поэтому фиксируем некоторое отрицательное значение b и изобразим график модуля и прямую, заданную уравнением $y = ax+b$. Если $|a| \leqslant 1$, то эта прямая не имеет точек пересечения с графиком $y = |x|$ (левый рисунок), если же $|a| > 1$, то при всяком b эта прямая и график модуля будут иметь общие точки (правый рисунок).



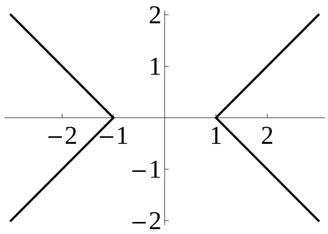
Можно было рассуждать иначе. Рассмотрим функцию $f(x) = |x| - ax$. Вопрос можно поставить так: при каких значениях a каждое действительное число является ее значением?

Функция $f(x)$ будет строго монотонной на всей прямой, если угловые коэффициенты частей ее графика при $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 0$ будут иметь одинаковые знаки, т. е. если $(-1-a)(1-a) > 0$, или $(a+1)(a-1) > 0$, или $a^2 > 1$.

На следующих рисунках приведены примеры графиков функции $f(x)$; на левом — при $a = \frac{1}{2}$, на правом — при $a = -2$.



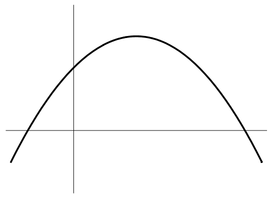
4.12. Поскольку расстояние от точки $M(x; y)$ до оси ординат равно $|x|$, а расстояние до оси абсцисс равно $|y|$, то искомое множество задается уравнением $|x| = |y| + 1$ и изображено на следующем рисунке.



Тема 5. Квадратичная функция

Диагностическая домашняя работа

1. Определите знаки коэффициентов в формуле для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, график которой имеет изображенный на следующем рисунке вид.



2. Дана квадратичная функция $f(x) = ax^2 - 2x + 1$. Найдите все значения a, при которых: а) $f(1) < f(2)$; б) данная функция на промежутке $[1; +\infty)$ является возрастающей.

3. Дана квадратичная функция $f(x) = 3x^2 - 2x + 7$. Выясните, какое из чисел больше: $f(\sqrt[3]{9})$ или $f(\sqrt[5]{30})$?

4. В следующей таблице указаны значения некоторой квадратичной функции.

x	0	1	2
y	1	0	2

Найдите ее значение при $x = 3$.

5. Найдите все возможные значения функции $y = 2x^2 - 4x$, если: а) число x меняется от -1 до 3; б) x — произвольное положительное число; в) x — произвольное действительное число.

6. Выясните, верно ли, что: а) любая прямая, параллельная оси абсцисс; б) любая прямая на плоскости пересекает по крайней мере одну из парабол $y = x^2 + 2x$ и $y = 4x - x^2 - 3$.

7. Найдите все значения a, при которых параболы $y = ax^2 - 6x + 2$ и $y = x^2 - 2ax + 1$ пересекаются в единственной точке.

8. Найдите уравнения касательных к параболе $y = x^2 + 2x + 1$, проходящих через точку $A(1; 0)$.

Решения задач диагностической работы и их обсуждение

1. Положим $f(x) = ax^2 + bx + c$. Поскольку парабола расположена ветвями вниз, то $a < 0$. Так как $f(0) = c$, то коэффициент c есть ордината точки пересечения графика этой функции с осью ординат. Поскольку на данном рисунке эта точка расположена выше оси абсцисс, то получаем, что $c > 0$. Наконец, мы видим, что абсцисса вершины параболы положительна, следовательно, $-\frac{b}{2a} > 0$. Поскольку число a отрицательно, то число b должно быть положительным. Таким образом: $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$.

2. а) Так как $f(1) = a - 1$ и $f(2) = 4a - 3$, то $f(1) < f(2)$ тогда и только тогда, когда $a - 1 < 4a - 3$, т. е. если $a > \frac{2}{3}$.

б) Если квадратичная функция на луче вида $[c; +\infty)$ является возрастающей, то коэффициент при x^2 должен быть положителен. Пусть x_0 — абсцисса вершины параболы, являющейся графиком этой квадратичной функции. Эта функция возрастает на луче $[c; +\infty)$ тогда и только тогда, когда $x_0 \leqslant c$. В данном случае получаем, что функция $f(x) = ax^2 - 2x + 1$ возрастает на промежутке $[1; +\infty)$, если $a > 0$ и $\frac{1}{a} \leqslant 1$, т. е. если $a \geqslant 1$.

3. Данная функция убывает на промежутке $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Теперь оценим значения корней. Так как $9 > 8$, то $\sqrt[3]{9} > \sqrt[3]{8} = 2$. Так как $1 < 30 < 32$, то $1 < \sqrt[5]{30} < 2$. Следовательно, $1 < \sqrt[5]{30} < \sqrt[3]{9}$. Таким образом, поскольку числа $a = \sqrt[5]{30}$ и $b = \sqrt[3]{9}$ лежат на том промежутке, на котором функция возрастает, и при этом $a < b$, то $f\left(\sqrt[5]{30}\right) < f\left(\sqrt[3]{9}\right)$.

4. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $f(0) = c = 1$. Подставив $x = 1$, получим, что $f(1) = a + b + c = 0$, и, так как $c = 1$, то $a + b = -1$. Подставив $x = 2$, получим, что $f(2) = 4a+2b+c = 2$, значит, $4a+2b = 1$. Таким образом, числа a и b являются решениями системы

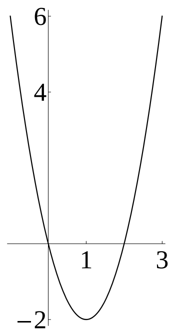
$$\begin{cases} a + b = -1, \\ 4a + 2b = 1. \end{cases}$$

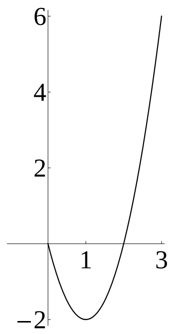
Так как $b = -1-a$, то, подставив выражение для b во второе уравнение, получим, что $4a - 2a - 2 = 1$, откуда $a = \frac{3}{2}$, следовательно, $b = -\frac{5}{2}$. Тем самым $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$. Поэтому $f(3) = \frac{27}{2} - \frac{15}{2} + 1 = 7$.

5. а) Изобразим (хотя это и не обязательно) график $y = 2x^2 - 4x$ при $x \in [-1; 3]$. Прежде всего найдем координаты $(x_0; y_0)$ вершины параболы. По стандартной формуле $x_0 = -\frac{-4}{4} = 1$. Подставив в формулу, получим, что $y_0 = 2 - 4 = -2$. Конечно, график проходит через начало координат. Для точности построения графика полезно вычислить еще несколько значений, при этом, конечно, и в концах данного отрезка. Имеем

x	-1	1	2	3
y	6	-2	0	6

В результате получим график, изображенный на левом рисунке.





Следовательно, значениями данной квадратичной функции на отрезке $[-1; 3]$ являются все числа отрезка $[-2; 6]$.

б) В этом случае, с геометрической точки зрения, нам надо рассматривать только ту часть параболы, абсциссы точек которой являются положительными числами (правый рисунок). Таким образом, значениями данной функции являются числа промежутка $[-2; +\infty)$.

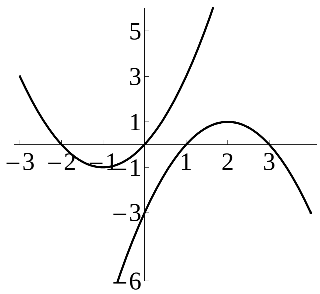
в) Ответ на данный вопрос совпадает с ответом на предыдущий.

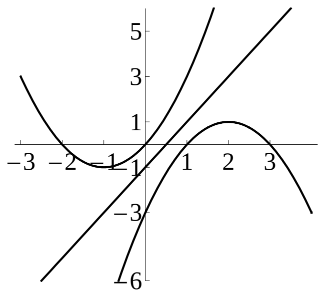
Приведем рассуждения, не связанные с построением графика. Однако, безусловно, нам надо воспользоваться свойствами данной функции. Свое наименьшее значение она принимает при $x = -\frac{-4}{4} = 1$. На промежутке $(-\infty; 1]$ она является убывающей, тогда как на промежутке $[1; +\infty)$ — возрастающей.

а) Следовательно, при x, меняющемся от -1 до 1, значение функции меняется от 6 до -2. А при x, меняющемся от 1 до 3, значение функции меняется от -2 до 6. Таким образом, множеством всех ее значений на промежутке $[-1; 3]$ является промежуток $[-2; 6]$.

б, в) Проще всего рассуждать следующим образом. Множество всех значений квадратичной функции $y = 2x^2 - 4x$ совпадает с множеством ее значений на промежутке $[1; +\infty)$. Расширив множество значений аргумента данной функции, мы не получим ее новых значений. Следовательно, и в пункте б), и в пункте в) задачи ответом является множество всех значений данной функции, т. е. промежуток $[-2; +\infty)$.

6. а) Каков геометрический смысл утверждения, состоящего в том, что число m является значением некоторой функции $f(x)$? Он состоит в том, что прямая $y = m$ (параллельная оси абсцисс) пересекается с графиком $y = f(x)$ этой функции. Значениями функции $y = x^2 + 2x$ являются все числа промежутка $[-1; +\infty)$. Значениями функции $y = 4x - x^2 - 3$ являются все числа промежутка $(-\infty; 1]$. Таким образом, каждое из действительных чисел входит в множество значений по крайней мере одной из данных квадратичных функций. Следовательно, всякая горизонтальная прямая $y = m$ пересекает хотя бы одну из данных парабол (левый рисунок).

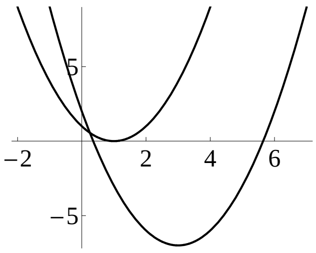


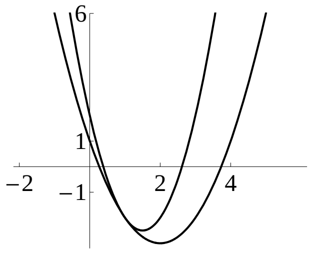


б) Уравнение прямой, не пересекающей ни одну из данных парабол, можно «подобрать», нарисовав такую прямую (правый рисунок). Проверим, что прямая $y = 2x-1$ не пересекает ни одну из них. Точки ее пересечения с первой параболой суть решения уравнения $x^2+2x = 2x-1$, которое, очевидно, решений не имеет. Уравнение $4x - x^2 - 3 = 2x - 1$, или $x^2 - 2x + 2 = 0$ также не имеет решений. Следовательно, прямая $y = 2x - 1$ не пересекается ни с одной из данных парабол.

7. Абсциссами точек пересечения данных парабол являются решения уравнения $ax^2-6x+2 = x^2-2ax+1$, или $(a-1)x^2+2(a-3)x+1 = 0$. Полученное уравнение имеет единственное решение, когда оно является линейным, а именно, если $a = 1$ либо если равен нулю дискриминант квадратного уравнения, т. е. $(a-3)^2 - (a-1) = a^2 - 7a + 10 = 0$. Решениями этого уравнения являются числа $a = 2; 5$.

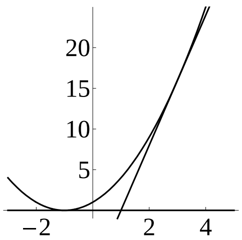
На левом рисунке изображены пересекающиеся в одной точке параболы $y = x^2 - 6x + 2$ и $y = x^2 - 2x + 1$ (в случае $a = 1$). На правом рисунке изображены касающиеся друг друга параболы $y = 2x^2 - 6x + 2$ и $y = x^2 - 4x + 1$ (в случае $a = 2$).

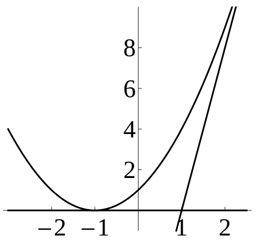




Аналогичную картинку с двумя касающимися друг друга параболами мы получим и при $a = 5$.

8. *Ответ:* $y = 0$ и $y = 8x - 8$. Говорят, что парабола $y = x^2$ касается оси абсцисс в начале координат. Общее определение касательной к кривой на плоскости и, в частности, к графикам функций дается в старших класах школы. Касательными к параболе являются не вертикальные прямые, имеющие с параболой только одну общую точку. Прямая, проходящая через точку $A(1; 0)$, задается уравнением $y = a(x - 1)$. Эта прямая будет касательной к данной параболе, если уравнение $x^2 + 2x + 1 = a(x - 1)$, или $x^2 + (2 - a)x + a + 1 = 0$ имеет единственное решение. Приравнивая к нулю дискриминант полученного квадратного уравнения, получим $(a - 2)^2 - 4(a + 1) = a^2 - 8a = 0$, откуда $a = 0$ или $a = 8$. То, что прямая, заданная уравнением $y = 0$ (т. е. ось абсцисс), является касательной к данной параболе, было очевидно из геометрических соображений (левый рисунок).





Другое дело, что геометрическая наглядность может сыграть дурную шутку. Если начертить «на листе в клеточку» обычную параболу, то может быть трудно представить себе, что она где-то коснется прямой с достаточно большим положительным угловым коэффициентом (правый рисунок).

Понятия, методы и идеи

Как видно из приведенных решений, для решения задач диагностической работы следовало использовать:

1) определение квадратичной функции;
2) промежутки возрастания и убывания квадратичной функции;
3) множество значений квадратичной функции;
4) график квадратичной функции; вершину параболы и ось симметрии параболы;
5) число корней квадратного уравнения;
6) алгебраическую интерпретацию взаимного расположения графиков функций.

В дополнение к ним отметим еще:

7) приложения теоремы Виета;
8) квадратные уравнения и неравенства и их графическую интерпретацию;
9) задачи на наибольшее и наименьшее значение.

Приложения теоремы Виета

Задача 9. Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $ax^2 - x + a + 1 = 0$ имеют противоположные знаки.

Так как при $a = 0$ мы получим линейное уравнение, имеющее только один корень, то $a \neq 0$. Перепишем данное уравнение в виде $x^2 - \frac{x}{a} + \frac{a+1}{a} = 0$. Поскольку по теореме Виета $x_1x_2 = \frac{a+1}{a}$, то, если корни имеют противоположные знаки, значит, $x_1x_2 < 0$, поэтому $\frac{a+1}{a} < 0$, откуда $-1 < a < 0$. Обратно, если $-1 < a < 0$, то свободный член уравнения отрицателен, при этом коэффициент при x^2 равен единице, поэтому это уравнение имеет действительные корни x_1 и x_2. Поскольку по теореме Виета их произведение равно отрицательному числу, то эти корни противоположны по знаку. *Ответ:* $-1 < a < 0$.

Задача 10. а) Решите систему $\begin{cases} x^3 + y^3 = 3, \\ x + y = 1. \end{cases}$

б) Для каждого из решений $(x; y)$ этой системы найдите сумму $x^5 + y^5$.

а) Так как

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)\big((x+y)^2 - 3xy\big) = 1 - 3xy,$$

то данная система равносильна системе

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

В силу теоремы, обратной теореме Виета, числа x и y являются корнями квадратного уравнения $x^2 - x - \frac{2}{3} = 0$, или $3x^2 - 3x - 2 = 0$. Поэтому $x = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{6}$.

Ответ: $(x; y) = \big(\frac{3+\sqrt{33}}{6}; \frac{3-\sqrt{33}}{6}\big); \big(\frac{3-\sqrt{33}}{6}; \frac{3+\sqrt{33}}{6}\big)$.

б) *Ответ:* $\frac{17}{9}$. Так как $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$, то

$$x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x+y) = \frac{7}{3} \cdot 3 - \frac{4}{9} = \frac{59}{9}.$$

Задача 11. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2 - 9x + 5 = 0$. Напишите уравнение с целыми коэффициентами, корнями которого являются числа $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

В силу теоремы Виета, $x_1x_2 = \frac{5}{3}$ и $x_1 + x_2 = 3$. Значит, $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{3}{5}$ и $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{9}{5}$. Поэтому в силу теоремы, обратной теореме Виета, числа $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ являются корнями уравнения $x^2 - \frac{9}{5}x + \frac{3}{5} = 0$, или $5x^2 - 9x + 3 = 0$.

Однако у этой задачи есть и другое решение, никак не связанное с теоремой Виета. Действительно, числа $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ являются корнями уравнения $3\big(\frac{1}{x}\big)^2 - \frac{9}{x} + 5 = 0$, или $5x^2 - 9x + 3 = 0$.

Квадратные уравнения и неравенства и их графическая интерпретация

Задача 12. Докажите, что если $a(a+b+c) < 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$: а) имеет два различных действительных корня и б) один из них больше 1, а другой — меньше 1. в) Верно ли утверждение, обратное утверждению пункта а) задачи?

а) Доказать это утверждение несложно. Действительно, по условию $a^2 + ab + ac < 0$, откуда следует, что $-ac > a^2 + ab$. Следовательно, для дискриминанта D квадратного уравнения справедливы неравенства

$$D = b^2 - 4ac > b^2 + 4a^2 + 4ab = (2a+b)^2 \geqslant 0,$$

откуда и следует, что это квадратное уравнение имеет два различных действительных корня.

Пункт а) доказан, однако приведенное решение не подсказывает, как ответить на вопрос пункта б) задачи. Поэтому давайте рассуждать следующим образом.

б) Если положить $f(x) = ax^2+bx+c$, то данное условие перепишется в виде $af(1) < 0$. Таким образом, если $a > 0$, то $f(1) < 0$. Парабола, являющаяся графиком функции $f(x)$, направлена «вверх ветвями», а точка ее графика с абсциссой $x = 1$ лежит ниже оси абсцисс. Значит, эта парабола пересечет ось абсцисс в двух различных точках, при этом одна из них будет лежать правее точки $x = 1$, а другая — левее ее. Аналогичное рассуждение можно провести в случае, когда $a < 0$.

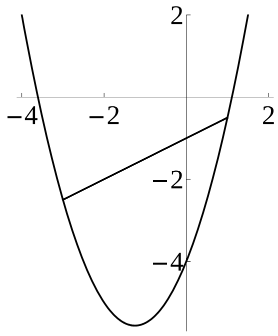
в) Теперь понятно, что ответ на вопрос этого пункта — отрицательный. Нетрудно понять, что существует парабола, пересекающая ось абсцисс в двух различных точках, но для которой знаки чисел a и $f(1)$ совпадают. К примеру, квадратное уравнение $x^2 + 2x = 0$ имеет два различных корня, однако $a(a + b + c) = 3 > 0$.

Задача 13. Напишите уравнение параболы, пересекающей ось абсцисс в точках $A(-1; 0)$ и $B(4; 0)$ и проходящей через точку $C(1; 3)$.

Пусть $y = ax^2 + bx + c$ — уравнение искомой параболы. Так как квадратный трехчлен ax^2+bx+c обращается в нуль при $x = -1$ и $x = 4$, то он равен $a(x+1)(x-4)$. Так как он должен быть равен 3 при $x = 1$, то $-6a = 3$, откуда $a = -\frac{1}{2}$. Получаем ответ: $y = -\frac{1}{2}(x + 1)(x - 4) = 2 + \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{2}$.

Задача 14. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2 - ax + 2a - 4 \leqslant 0$ справедливо при всех $x \in [-3; 1]$.

Положим $f(x) = x^2 - ax + 2a - 4$. По условию $f(-3) \leqslant 0$ и $f(1) \leqslant 0$. Таким образом, $9 + 3a + 2a - 4 = 5a + 5 \leqslant 0$ и $1 - a + 2a - 4 = a - 3 \leqslant 0$, следовательно, $a \leqslant -1$. То, что мы получили ответ на вопрос задачи, видно из следующего рисунка. Действительно, поскольку ветви данной параболы «направлены вверх», то дуга ее графика между двумя точками на нем лежит ниже отрезка с концами в этих точках. Поэтому из неположительности значений квадратичной функции при $x = x_1$ и $x = x_2$ следует их неположительность при всех x, лежащих между x_1 и x_2. Конечно, это утверждение еще надо обосновать, что мы сделаем двумя способами.



Способ 1. Докажем именно то утверждение, иллюстрацией к которому является приведенный выше рисунок. Рассмотрим точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ на графике квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$. Мы хотим доказать, что отрезок AB лежит выше дуги графика с концами в этих точках. Уравнение прямой AB имеет вид

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1).$$

Так как $y_2 - y_1 = ax_2^2 - ax_1^2 + b(x_2 - x_1)$, то $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a(x_1 + x_2) + b$, откуда получаем уравнение

$$\begin{aligned} y = ax_1^2 + bx_1 + c + \big(a(x_1 + x_2) + b\big)x - ax_1(x_1 + x_2) - bx_1 = \\ = \big(a(x_1 + x_2) + b\big)x + c - ax_1x_2. \end{aligned}$$

Таким образом, надо доказать, что при всех $x \in [x_1; x_2]$ справедливо неравенство

$$\big(a(x_1 + x_2) + b\big)x + c - ax_1x_2 \geqslant ax^2 + bx + c,$$

или $ax^2 - a(x_1 + x_1) + ax_1x_2 = a(x - x_1)(x - x_2) \leqslant 0$, что очевидно верно.

Способ 2. Модифицируем предыдущее утверждение так, что не придется ничего вычислять. Пусть $y = \ell(x)$ — уравнение прямой AB, $f(x) = ax^2 + bx + c$ — данная квадратичная функция. Так как числа x_1 и x_2 являются решениями квадратного уравнения $f(x) - \ell(x) = 0$, то $f(x) - \ell(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, откуда и следует, что $f(x) \leqslant \ell(x)$ при всех $x \in [x_1; x_2]$.

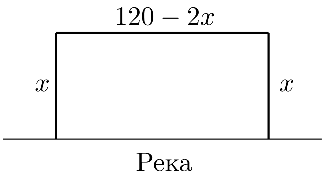
Замечание. В данном случае можно было рассуждать иначе. Так как число $x = 2$ является корнем уравнения $x^2 - ax + 2a - 4 = 0$, то $x^2 - ax + 2a - 4 = (x - 2)(x - a + 2)$. Поэтому $x^2 - ax + 2a - 4 \leqslant 0$ при всех $x \in [-3; 1]$ тогда и только тогда, когда корень $x = a - 2$ лежит на числовой оси левее числа -3, т. е. $a - 2 \leqslant -3$, откуда $a \leqslant -1$.

Задачи на наибольшее и наименьшее значение

Квадратичная функция часто появляется в задачах, в которых требуется найти наибольшее или же наименьшее значение некоторого выражения.

Задача 15. Участок примыкает к берегу реки. Требуется огородить его забором прямоугольной формы. Какую наибольшую площадь может иметь этот участок, если в наличии имеются материалы для строительства 120 метров забора?

Обозначим через x длины сторон забора, перпендикулярных берегу реки (рисунок).



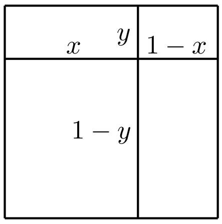
Поскольку остается материалов на $120 - 2x$ метров, то размер участка составляет $x \times (120 - 2x)$ метров, поэтому его площадь $s(x)$ вычисляется по формуле $s(x) = x(120 - 2x) = 120x - 2x^2$ (квадратных метров). Полученная квадратичная функция $s(x)$ принимает свое наибольшее значение при $x = \frac{120}{2\cdot 2} = 30$. Таким образом, наибольшая площадь огороженного участка равна $30 \cdot 60 = 1800$ м^2.

Задача 16. Два отрезка, параллельные сторонам единичного квадрата, разделили его на четыре прямоугольника. Докажите, что произведение площадей двух несмежных прямоугольников не больше $\frac{1}{16}$.

Обозначим через x и y длины сторон одного из прямоугольников (рисунок). Длины сторон прямоугольника, не смежного с ним, равны $1 - x$ и $1 - y$. Произведение площадей этих прямоугольников равно

$$xy(1 - x)(1 - y) = x(1 - x)y(1 - y) \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16},$$

так как наибольшее значение функции $x(1 - x)$ равно $\frac{1}{4}$.



Дополнительные задачи

5.1. Найдите все квадратичные функции, графики которых касаются оси абсцисс и проходят через точки $A(1;1)$ и $B(2;4)$.

5.2. Найдите целые числа p и q, такие что число $2+\sqrt{3}$ является корнем квадратного трехчлена x^2+px+q.

5.3. Найдите все пары чисел p и q, такие что эти числа являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.

5.4. Найдите все значения a, при которых один из корней уравнения $x^2-ax+2a-4=0$ вдвое меньше другого.

5.5. Известно, что значения функции $f(x)=ax^2+bx+c$ в точках 1, 2 и 3 являются целыми числами. Верно ли, что тогда коэффициенты a, b и c обязаны быть целыми числами?

5.6. Напишите уравнение прямой, касающейся графика квадратичной функции $f(x)=ax^2+bx+c$: а) в точке ее пересечения с осью ординат; б) в точке с координатами $\big(x_0;f(x_0)\big)$.

5.7. Найдите на графике $y=x^2$ точки A и B, такие что серединой отрезка с концами в этих точках является точка: а) $M(1;2)$; б) $N(1;5)$.

5.8. Найдите на параболе $y=x^2$ точку, ближайшую к прямой $y=x-1$.

5.9. Две прямолинейные дороги пересекаются под прямым углом. По каждой из этих дорог по направлению к перекрестку движутся два автомобиля, первый со скоростью 40 км/час, а второй со скоростью 60 км/час. Проехав перекресток, каждый автомобиль продолжает движение по той же дороге. В начальный момент первый автомобиль находился на расстоянии 5 км от перекрестка, тогда как второй — на расстоянии 40 км. Определите момент времени, в который расстояние между автомобилями будет наименьшим.

5.10. Дана функция $f(x)=ax^2+bx+c$, где $a>0$. Докажите, что для любых чисел x и y справедливо неравенство $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}$.

5.11. На графике $y = x^2 - 3x - 3$ найдите две точки, являющиеся вершинами квадрата, две другие вершины которого лежат на оси абсцисс.

5.12. Известно, что парабола проходит через две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, при этом $y_1 y_2 < 0$. Докажите, что эта парабола пересекает ось абсцисс.

5.13. Решите уравнение $x^2 - 5xy + 3y^2 = 0$ в рациональных числах.

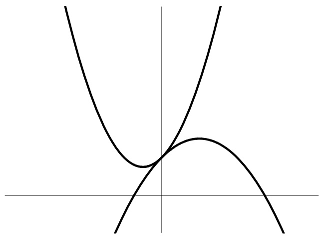
5.14. Коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют условию $2a + 3b + 6c = 0$. Докажите, что это уравнение имеет корень на промежутке $(0; 1)$.

5.15. Про квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$ известно, что $f(-2) = 4$ и $f(1) = 1$. а) Докажите, что если $c < 0$ или $c > 2$, то функция $f(x)$ имеет два различных корня. б) Найдите все значения c, при которых эта функция имеет два различных положительных корня.

5.16. Выясните, существует ли квадратичная функция, график которой проходит через точки: а) $A(-1; 1)$, $B(1; 1)$ и $C(5; 1)$; б) $A(-1; 1)$, $B(1; 2)$ и $C(5; 4)$.

5.17. На параболе $y = x^2$ выбраны точки A и B с целыми координатами. Докажите, что проходящая через них прямая пересекает ось ординат в точке, ордината которой также является целым числом.

5.18. На следующем рисунке изображены графики квадратичных функций $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$.



Найдите соотношения между коэффициентами: a_1 и a_2; b_1 и b_2; c_1 и c_2.

5.19. а) Найдите все целые решения неравенства $x^2 - 3x - 1 \leqslant 0$. б) Найдите число пар $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющих неравенству $|y| \leqslant 1 + 3x - x^2$.

Варианты самостоятельных работ по теме 5

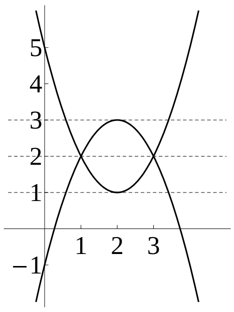
Проверочная работа 1

Вариант 1

1. а) Докажите, что если $a > b > 0$, то $a^2 + 31a > b^2 + 31b$. б) Выясните, верно ли, что для любых чисел a и b из того, что $a > b$, следует, что $a^2 + 31a > b^2 + 31b$.

2. Дана квадратичная функция $f(x) = -4x^2 + 24x - 27$. Найдите все такие натуральные числа a, что уравнение $f(x) = a$ имеет решение.

3. а) Напишите уравнения парабол, изображенных на следующем рисунке.



б) Напишите уравнение параболы, симметричной параболе $y = x^2 - 3x + 1$ относительно прямой $y = 2$.

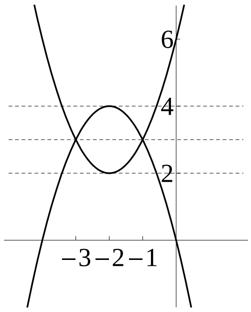
4. График квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $A(1; 1)$ и $B(3; 1)$.
а) Сравните друг с другом значения этой функции при $x = -1$ и $x = 5$.
б) Докажите, что $f(x) = a(x-1)(x-3) + 1$.

Вариант 2

1. а) Докажите, что если $a > b > 0$, то $2a^2 + 51a > 2b^2 + 51b$.
б) Выясните, верно ли, что для любых чисел a и b из того, что $a > b$, следует, что $2a^2 + 51a > 2b^2 + 51b$.

2. Дана квадратичная функция $f(x) = -3x^2 + 18x - 16$. Найдите все такие натуральные числа a, что уравнение $f(x) = a$ имеет решение.

3. а) Напишите уравнения парабол, изображенных на следующем рисунке.



б) Напишите уравнение параболы, симметричной параболе $y = -x^2 - 3x + 5$ относительно прямой $y = 3$.

4. График квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $A(-1; 2)$ и $B(3; 2)$.
а) Сравните друг с другом значения этой функции при $x = -3$ и $x = 5$.
б) Докажите, что $f(x) = a(x + 1)(x - 3) + 2$.

Вариант 3

1. Выясните, верно ли, что для любых положительных чисел a и b из того, что $a > b$, следует, что $10a^2 - a > 10b^2 - b$. Ответ обоснуйте.

2. Найдите: а) число натуральных значений квадратичной функции $y = -21x - x^2$; б) наименьшее значение выражения $(x - y)(x - y - 6)$.

3. а) Приведите пример двух квадратичных функций, графики которых симметричны относительно прямой $y = 2$. б) Предположим, что графики функций $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ симметричны относительно прямой $y = 2$. Найдите соотношения между коэффициентами: a_1 и a_2; b_1 и b_2; c_1 и c_2. Ответ обоснуйте.

4. Дана квадратичная функция $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$. Определите все значения параметра a, при которых: а) функция $f(x)$ принимает одинаковые значения на концах отрезка $[a; a + 2]$; б) наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; a + 2]$ достигается в его правом конце.

5. Пусть ℓ — прямая, касающаяся параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ в точке $A(4; 8)$, B — точка пересечения этой прямой с осью абсцисс, а C — точка пересечения прямой ℓ с осью ординат. Докажите, что точка B является серединой отрезка AC.

Вариант 4

1. Выясните, верно ли, что для любых положительных чисел a и b из того, что $a < b$, следует, что $a - 20a^2 > b - 20b^2$. Ответ обоснуйте.

2. Определите: а) число целых неположительных значений квадратичной функции $y = x^2 + 19x$; б) наибольшее значение выражения $(x - 2y)(8 + 2y - x)$.

3. а) Приведите пример двух квадратичных функций, графики которых симметричны относительно прямой $y = 3$. б) Предположим, что графики функций $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ симметричны относительно прямой $y = 2$. Найдите соотношения между коэффициентами: a_1 и a_2; b_1 и b_2; c_1 и c_2. Ответ обоснуйте.

4. Дана квадратичная функция $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$. Определите все значения параметра a, при которых: а) функция $f(x)$ принимает одинаковые значения на концах отрезка $[a - 2; a]$; б) наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a - 2; a]$ достигается в его левом конце.

5. Пусть ℓ — прямая, касающаяся параболы $y = 2x^2$ в точке $A(2; 8)$, B — точка пересечения этой прямой с осью абсцисс, а C — точка пересечения прямой ℓ с осью ординат. Докажите, что точка B является серединой отрезка AC.

Проверочная работа 2

Вариант 1

1. Определите возможное количество точек пересечения параболы $y = x^2 + 6x - 3$ и прямой, параллельной:
а) оси ординат;
б) оси абсцисс.

2. Найдите все значения a, при которых прямая $y = 2x + a$:
а) имеет общие точки с параболой $y = x^2 - 2$;
б) касается этой параболы.

3. Найдите все значения параметра a, при которых решением неравенства $ax^2 - 566x + 1 \geqslant 0$ является некоторый отрезок.

4. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2 - 2x = a^2 - 2a$ имеет решение на отрезке $[-2; 2]$.

5. Пусть $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Найдите все значения a, при которых:
а) значение этой функции на правом конце отрезка $[a; a+2]$ не меньше ее значения на его левом конце;
б) $f(x)$ возрастает на отрезке $[a; a + 2]$.

Вариант 2

1. Определите возможное количество точек пересечения параболы $y = 1 + 4x - x^2$ и прямой, параллельной:
а) оси ординат;
б) оси абсцисс.

2. Найдите все значения a, при которых прямая $y = a - 2x$:
а) имеет общие точки с параболой $y = x^2 + 3$;
б) касается этой параболы.

3. Найдите все значения параметра a, при которых решением неравенства $ax^2 - 30x + 4 \geqslant 0$ является некоторый отрезок.

4. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2 + 3x = a^2 + 3a$ имеет решение на отрезке $[-2; 2]$.

5. Пусть $f(x) = 4x^2 + 8x + 3$. Найдите все значения a, при которых:
а) значение этой функции на правом конце отрезка $[a - 2; a]$ не больше ее значения на его левом конце;
б) $f(x)$ убывает на отрезке $[a - 2; a]$.

Вариант 3

1. Найдите все значения a, при которых графики $y = x^2 - 2x + 1$ и $y = ax^2 - (a+1)x - 2$ не имеют общих точек.

2. Найдите все значения, которые может принимать произведение корней уравнения $x^2 + 3x + a = 0$.

3. Найдите все значения a, при которых неравенство $\frac{ax^2+7x+11}{x^2+3x+9} > 1$ выполняется для всех значений x, за исключением одного.

4. Пусть $f(x) = x^2 - 3x + 1$. а) Изобразите на плоскости множество, заданное уравнением $f(x) = f(y)$.
б) Найдите все значения a, при которых уравнение $f(x) = f(a)$ не имеет решений на отрезке $[-2; 2]$.

5. Определите возможное количество точек пересечения объединения графиков функций $y = x^2 - 4x + 4$ и $y = 4 + 8x - 2x^2$ с прямой, параллельной:
а) оси ординат; б) оси абсцисс.

Вариант 4

1. Найдите все значения a, при которых графики $y = x^2 + 2x + 1$ и $y = ax^2 + (a+1)x - 3$ не имеют общих точек.

2. Найдите все значения, которые может принимать сумма корней уравнения $x^2 + ax + 4 = 0$.

3. Найдите все значения a, при которых неравенство $\frac{2x^2+ax+3}{x^2+x+2} > 1$ выполняется для всех значений x, за исключением одного.

4. Пусть $f(x) = x^2 - x + 2$. а) Изобразите на плоскости множество, заданное уравнением $f(x) = f(y)$.
б) Найдите все значения a, при которых уравнение $f(x) = f(a)$ не имеет решений на отрезке $[-2; 2]$.

5. Определите возможное количество точек пересечения объединения графиков функций $y = x^2 - 2$ и $y = x^2 + 4x + 2$ с прямой, параллельной:
а) оси ординат; б) оси абсцисс.

Ответы, решения, комментарии

5.1. *Ответ:* $y = x^2$ и $y = (3x-4)^2$. Запишем неизвестную функцию в виде $y = a(x-b)^2$. Поскольку по условию ее график проходит через точки $A(1;1)$ и $B(2;4)$, то $1 = a(1-b)^2$ и $4 = a(2-b)^2$. Значит, $(b-2)^2 = 4(b-1)^2$, или $3b^2 - 4b = 0$, откуда $b = 0$ или $b = \frac{4}{3}$. Если $b = 0$, то $a = 1$, если $b = \frac{4}{3}$, то $a = 9$.

5.2. *Ответ:* $p = -4$, $q = 1$. Подставив число $2 + \sqrt{3}$ в левую часть данного уравнения, получим, что $7 + 4\sqrt{3} + p(2 + \sqrt{3}) + q = 0$, или $2p + q + 7 + \sqrt{3}(p + 4) = 0$. Так как число $\sqrt{3}$ — иррациональное, то $p + 4 = 2p + q + 7 = 0$, откуда и следует ответ.

5.3. *Ответ:* $(p, q) = (0, 0); (1, -2); \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. По условию имеют место равенства $p^2 + p^2 + q = 0$ и $q^2 + pq + q = 0$. Таким образом, числа p и q являются решениями системы

$$\begin{cases} 2p^2 + q = 0, \\ q(p + q + 1) = 0. \end{cases}$$

Из ее второго уравнения следует, что $q = 0$ или $q = -p - 1$. Если $q = 0$, то и $p = 0$. Подставив $q = -p - 1$ в первое уравнение, получим, что $2p^2 - p - 1 = 0$, откуда $p = 1$ или $p = -\frac{1}{2}$.

Обратите внимание, что рассуждение, основанное на использовании теоремы Виета, даст только первые два ответа.

5.4. *Ответ:* $a = 3; 6$. Пусть числа t и $2t$ являются корнями уравнения. Тогда, в силу теоремы Виета, получаем, что $a = 3t$ и $2a - 4 = 2t^2$. Исключив переменную t, получим, что $a^2 - 9a + 18 = 0$, откуда $a = 3$ или $a = 6$. Обратите внимание, что необходимо проверить, что при найденных значениях a данное уравнение имеет корни. При $a = 3$ получаем уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$ с корнями 1 и 2; при $a = 6$ получаем уравнение $x^2 - 6x + 8 = 0$, корнями которого являются 2 и 4.

Возможен и другой подход, не связанный с использованием теоремы Виета. Надо найти все возможные пары $(x; a)$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} x^2 - ax + 2a - 4 = 0, \\ 4x^2 - 2ax + 2a - 4 = 0. \end{cases}$$

Найденные значения a и являются искомыми.

5.5. *Ответ:* нет, не обязательно. Например, если $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$, то $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ и $f(3) = 3$.

5.6. *Ответы:* а) $y = bx + c$; б) $y = (2ax_0 + b)x + c - ax_0^2$. а) Действительно, прямая $y = bx + c$ и парабола $y = ax^2 + bx + c$ очевидным образом имеют единственную общую точку — точку $(0; c)$. б) Сделаем замену $t = x - x_0$. Относительно новой переменной парабола задается уравнением

$$y = a(t + x_0)^2 + b(t + x_0) + c = at^2 + (2ax_0 + b)t + ax_0^2 + bx_0 + c.$$

В силу доказанного в предыдущем пункте, касательная к параболе, проходящая через точку $(t; y) = (0; ax_0^2 + bx_0 + c)$, задается уравнением

$$y = (2ax_0 + b)t + ax_0^2 + bx_0 + c.$$

Таким образом, нам остается вернуться к прежним переменным $(x; y)$, получив в результате уравнение

$$y = (2ax_0 + b)(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c = (2ax_0 + b)x + c - ax_0^2.$$

5.7. *Ответы:* а) $A(0; 0)$ и $B(2; 4)$. б) $A(-1; 1)$ и $B(3; 9)$. Обозначим через u и v абсциссы точек A и B. Координатами середины отрезка AB являются числа $\frac{u+v}{2}$ и $\frac{u^2+v^2}{2}$. а) Так как по условию середина отрезка совпадает с точкой $M(1; 2)$, то

$$\begin{cases} \frac{u+v}{2} = 1, \\ \frac{u^2+v^2}{2} = 2, \end{cases} \qquad \text{или} \quad \begin{cases} u + v = 2, \\ u^2 + v^2 = 4. \end{cases}$$

Решениями полученной системы являются пары $(2; 0)$ и $(0; 2)$. Таким образом, одна из искомых точек совпадает с началом координат, а другая имеет координаты $(2; 4)$.

б) В этом случае мы получаем систему

$$\begin{cases} u + v = 2, \\ u^2 + v^2 = 10, \end{cases}$$

решениями которой являются пары $(-1; 3)$ и $(3; -1)$.

5.8. *Ответ:* точка $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$. Расстояние от точки $(x; x^2)$ на параболе до данной прямой равно $\frac{x^2-(x-1)}{\sqrt{2}}$. Полученное выражение принимает свое наименьшее значение при $x = \frac{1}{2}$.

5.9. Примем первую дорогу за ось абсцисс, вторую — за ось ординат. Пусть в начальный момент времени первый автомобиль находился в точке $(-5; 0)$, а второй — в точке $(0; -40)$. Через время t первый автомобиль будет находиться в точке с абсциссой $40t - 5$, а второй — в точке с ординатой $60t - 40$. Квадрат расстояния между этими точками равен

$$(40t - 5)^2 + (60t - 40)^2 = 5200t^2 - 5200t + 1625,$$

следовательно, он будет наименьшим при $t = \frac{1}{2}$, т. е. через полчаса после начального момента.

5.10. Так как

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{a(x^2 + 2xy + y^2)}{4} + \frac{b(x+y)}{2} + c \text{ и}$$
$$\frac{f(x) + f(y)}{2} = \frac{ax^2 + ay^2 + bx + by + 2c}{2},$$

то данное неравенство равносильно неравенству $a(x - y)^2 \geqslant 0$.

5.11. *Ответ:* точки $(0; -3)$ и $(3; -3)$; или же точки $(-2; 7)$ и $(5; 7)$. Обозначим через u и v абсциссы вершин квадрата, лежащих на данной параболе. Поскольку прямая, соединяющая эти вершины, параллельна оси абсцисс, то $u^2 - 3u - 3 = v^2 - 3v - 3$, или $(u - v)(u + v - 3) = 0$. Так как $u \neq v$, то $u + v = 3$. Так как длина горизонтальной стороны квадрата равна $|u - v|$, длина вертикальной стороны равна $|u^2 - 3u - 3|$, то $|u - v| = |u^2 - 3u - 3|$, следовательно, координата u является решением уравнения $|2u - 3| = |u^2 - 3u - 3|$. Если $2u - 3 = u^2 - 3u - 3$, то $u^2 - 5u = 0$, откуда $u = 0$, и в этом случае $v = 3$, или же $u = 5$ и $v = -2$. Таким образом, мы получили два возможных ответа: точки с координатами $(0; -3)$ и $(3; -3)$ или точки с координатами $(5; 7)$ и $(-2; 7)$. Если $3 - 2u = u^2 - 3u - 3$, то $u^2 - u - 6 = 0$, откуда $u = 3$ или $u = -2$. В этом случае мы получаем те же пары точек.

5.12. Множеством значений квадратичной функции является луч. Поскольку числа y_1 и y_2 являются ее значениями, то и любая точка отрезка с концами в этих точках является значением этой функции. Так как $y_1 y_2 < 0$, то нуль лежит внутри этого отрезка, значит, нуль является ее значением. Следовательно, парабола пересечет ось абсцисс.

5.13. Ясно, что пара $(x; y) = (0; 0)$ является решением данного уравнения. Покажем, что других рациональных решений оно не имеет. Решив уравнение $x^2 - 5xy + 3y^2 = 0$ «относительно x», получим, что

$$x = \frac{5y \pm \sqrt{13y^2}}{2} = \frac{5y \pm y\sqrt{13}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}\, y,$$

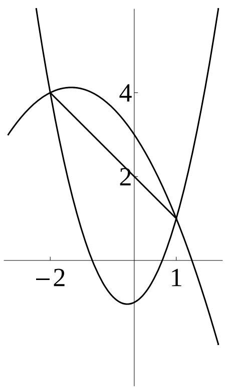
таким образом, если число y рационально и отлично от нуля, то число x будет иррациональным. Поэтому других, отличных от нулевого, рациональных решений данное уравнение не имеет.

5.14. Эта задача достаточно трудна, и, возможно, здесь ей не место. Тем не менее мы хотим привести два ее достаточно естественных решения.

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Проведем рассуждение «от противного», предположив, что уравнение $ax^2+bx+c = 0$ не имеет корней на промежутке $(0;1)$. Тогда числа $f(0) = c$, $4f\left(\frac{1}{2}\right) = a+2b+4c$ и $f(1) = a+b+c$ имеют один и тот же знак (либо первое или третье из них равно нулю). Поэтому их сумма, равная $2a + 3b + 6c$, не может быть равной нулю, что противоречит условию.

Второе решение использует идею, похожую на идею решения задачи 5.12. В обозначениях предыдущего решения, если $c = 0$, то решениями данного уравнения являются числа $x = 0$ и $x = -\frac{b}{a}$. Так как $2a + 3b = 0$, то $\frac{b}{a} = -\frac{2}{3}$, поэтому $-\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \in (0;1)$. Если $c \neq 0$, то $f(0) = c$, а $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4a}{9} + \frac{2b}{3} + c = \frac{2}{9}(2a + 3b) + c = -\frac{c}{3}$. Следовательно, на концах отрезка $\left[0; \frac{2}{3}\right]$ функция $f(x)$ принимает значения противоположных знаков, следовательно, она обращается в нуль в некоторой точке промежутка $\left(0; \frac{2}{3}\right)$.

5.15. а) Первое решение. Если $c < 0$, то при $x = 0$ значение функции $f(x) = ax^2+bx+c$ отрицательно, поэтому парабола — график этой функции — пересечет ось абсцисс как на отрезке $[-2;0]$, так и на отрезке $[0;1]$. Пусть $c > 2$. Отрезок с концами в точках $A(-2;4)$ и $B(1;1)$ пересекает ось ординат в точке $C(0;2)$. Парабола — график данной функции — пересекает ось ординат в точке, лежащей выше точки C.



Как следует из решения задачи 14 раздела «Квадратные уравнения и неравенства и их графическая интерпретация», в таком случае коэффициент a отрицателен, следовательно, ветви параболы направлены вниз, поэтому данная функция будет иметь два корня разных знаков. На рисунке выше изображены графики при значениях $c = -1$ и $c = 3$.

Второе решение. Так как по условию $f(1) = 1$ и $f(-2) = 4$, то

$$\begin{cases} a + b + c = 1, \\ 4a - 2b + c = 4. \end{cases}$$

Выразив a из первого уравнения системы, $a = 1-b-c$, и подставив его во второе уравнение, получим, что $b = -\frac{c}{2}$, откуда $a = 1-\frac{c}{2}$. Получаем уравнение $\left(1-\frac{c}{2}\right)x^2 - \frac{c}{2}\,x + c = 0$, или $x^2 - \frac{c}{2-c}\,x + \frac{2c}{2-c} = 0$. Если $c < 0$ или $c > 2$, то свободный член полученного уравнения отрицателен, следовательно, оно имеет два корня противоположных знаков.

б) *Ответ:* $c \in \left(\frac{16}{9}; 2\right)$. Воспользуемся результатом вычислений, проведенных во втором решении пункта а), и запишем уравнение $(2-c)x^2 - cx + 2c = 0$ для корней данной функции. Дискриминант этого уравнения равен $c(9c-16)$. Мы знаем, что при $c < 0$ корни имеют разные знаки, поэтому будем считать, что $c > \frac{16}{9}$. При $c = 2$ уравнение не является квадратным, при $c > 2$, как мы уже знаем, его корни имеют разные знаки. Если $c \in \left(\frac{16}{9}; 2\right)$, то уравнение имеет два различных корня, знаки этих корней совпадают, при этом, так как их сумма равна $\frac{c}{2-c}$, то она положительна, следовательно, оба корня этого уравнения являются положительными.

5.16. *Ответ:* а)-б) Нет, не существует. а) Поскольку квадратное уравнение имеет не более двух решений, то уравнение $f(x) = 1$ не может иметь своими корнями числа -1, 1 и 5. б) Поскольку точки A, B и C лежат на прямой $y = \frac{x+3}{2}$, то числа -1, 1 и 5 должны быть корнями квадратного уравнения $f(x) = \frac{x+3}{2}$, чего быть не может.

Конечно, можно было непосредственно искать коэффициенты квадратного уравнения. В условиях пункта б) для коэффициентов многочлена $ax^2 + bx + c$ получаем систему

$$\begin{cases} a - b + c = 1, \\ a + b + c = 2, \\ 25a + 5b + c = 4. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получим, что $b = \frac{1}{2}$ и

$$\begin{cases} a + c = \frac{3}{2}, \\ 25a + c = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

откуда $a = 0$ и $c = \frac{3}{2}$, таким образом, искомый многочлен не является квадратным.

5.17. Если a — абсцисса точки A и b — абсцисса точки B, то прямые вычисления показывают, что прямая AB пересечет ось ординат в точке $C(0; -ab)$.

5.18. На приведенном в условии рисунке параболы касаются друг друга в точке, лежащей на оси ординат. Поэтому они имеют одну и ту же касательную в этой точке. Так как уравнение касательной к параболе $y = ax^2 + bx + c$ в точке ее пересечения с осью ординат имеет вид $y = bx + c$, то тем самым $b_1 = b_2$ и $c_1 = c_2$. Про связь a_1 и a_2 ничего определенного сказать нельзя, кроме того, что они имеют противоположные знаки.

5.19. а) Смысл задачи в том, что данное неравенство не надо решать. При $x = -1$ оно неверно, а так как абсцисса вершины параболы равна $\frac{3}{2}$, то оно неверно при всех $x \leqslant -1$. При $x = 0; 1; 2; 3$ оно верно, а при $x = 4$ — неверно, значит, оно неверно при всех $x \geqslant 4$. Поэтому целыми решениями данного неравенства являются только числа 0, 1, 2 и 3. б) *Ответ:* 20 решений. Так как данное неравенство имеет решение только в случае, когда $x^2 - 3x - 1 \leqslant 0$, то $x = 0; 1; 2; 3$. В каждом случае делаем прямую подстановку. При $x = 0$ получаем неравенство $|y| \leqslant 1$, имеющее три решения. Аналогичным образом, при $x = 3$ неравенство также имеет три решения. Если же $x = 1$ или $x = 2$, то получаем неравенство $|y| \leqslant 3$, имеющее 7 решений.

Ответы и решения задач проверочных работ

Каждая из работ обозначается тремя цифрами. Первая цифра — это номер темы, вторая — номер проверочной работы в этой теме, третья — номер варианта. Напоминаем читателю, что варианты работ с номерами 1 и 2 являются более простыми, чем варианты с номерами 3 и 4. Поэтому, к примеру, **2.2.3** — это первый из двух более сложных вариантов второй проверочной работы по второй теме — «Тождества для многочленов и разложения на множители».

Тема 1. «Свойства числовых неравенств»

1.1.1. 1. а) *Ответ:* $\frac{12}{19}, \frac{2}{3}, \frac{13}{18}$. Так как $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$, то $\frac{2}{3} > \frac{12}{19}$ и $\frac{2}{3} < \frac{13}{18}$. б) *Ответ:* $\sqrt[8]{6} < \sqrt[7]{7} < \sqrt[6]{8}$. Действительно,

$$\sqrt[8]{6} < \sqrt[7]{6} < \sqrt[7]{7} < \sqrt[7]{8} < \sqrt[6]{8}.$$

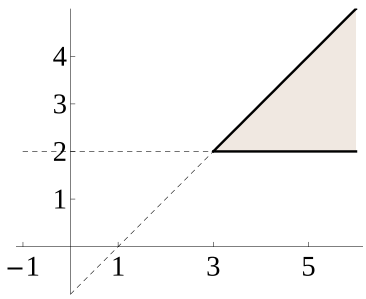
2. а) Нет, не верно. $3a - 2b = 3(a - b) + b$. Предположим, мы выберем числа a и b так, что $a - b = 1$. Тогда $3a - 2b = 3 + b$. Если взять $b = -4$, то эта разность отрицательна. б) Да, верно, в силу известного свойства. в) Нет, неверно. Например, можно взять $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{3}$. **3.** а) Так как $x \geqslant 2$ и $y \geqslant -1$, то $x+2y \geqslant 0$, при этом выражение $x+2y$ может быть произвольным неотрицательным числом. Действительно, если $a \geqslant 0$, то можно взять $x = a+2$ и $y = -1$. В этом случае $x+2y = a$. б) Число $2x - y$ может быть произвольным. Возьмем $y = -1$. Тогда $2x-y = 2x+1$. Так как x — произвольное число, не меньшее 2, то $2x+1$ может быть произвольным числом, не меньшим 5. Теперь положим $x = 2$, в таком случае $2x - y = 4 - y$. Так как $-y \leqslant 1$, то $2x - y$ — произвольное число, не большее 5. **4.** *Ответ:* наименьшее значение -12, наибольшее значение 8. **5.** *Ответ:* 3. Поскольку $\frac{2n+1}{2n-1} = 1 + \frac{2}{2n-1}$, то это отношение тем меньше, чем больше n, значит, оно является наибольшим при $n = 1$.

1.1.2. 1. а) $\frac{17}{24} < \frac{3}{4} < \frac{18}{23}$. б) $\sqrt[9]{5} < \sqrt[7]{7} < \sqrt[5]{9}$. **2.** а-в) Нет, не верно. **3.** а) $(-\infty; 5]$. б) Данное число может быть произвольным. **4.** Наименьшее значение -8, наибольшее значение 12. **5.** $\frac{1}{3}$.

1.1.3. 1. Утверждение неверно, так как если $b < 0$, то, поделив обе части неравенства $a > b$ на b, мы получим неравенство $\frac{a}{b} < 1$. Например, можно взять $a = 1$ и $b = -1$. **2.** Удобнее сначала сравнить друг с другом числа $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{5}$. Так как $27 > 25$, то $3 > \left(\sqrt[3]{5}\right)^2$, следовательно, $\sqrt{3} > \sqrt[3]{5}$. Так как $\frac{20}{11} > 1{,}8$, то $\frac{20}{11} > \sqrt{3}$. Значит, $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3} < \frac{20}{11}$. **3.** *Ответ:* 8. Так как $x \geqslant 4$ по определению квадратного корня, то $\sqrt{x-4} + 2x \geqslant 8$. **4.** а) Так как $2x \geqslant 4$ и $-y \geqslant -1$, то $2x - y \geqslant 3$. б) Любое число. Положим $x = 2$. Тогда $x + 2y = 2 + 2y$ может быть любым числом, не превосходящим 4. Положив $y = 1$, получим, что $x + 2y = x + 2$, которое может быть любым числом, не меньшим 4. в) Если $y = 1$, то $xy = x$ есть произвольное число из промежутка $[2; +\infty)$. Если $x = 2$, то $xy = 2y$ — произвольное число из промежутка $(-\infty; 2]$. Таким образом, произведение xy может быть любым числом. **5.** *Ответ:* 4, так как $4a + \frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{4a \cdot \frac{1}{a}} = 4$.

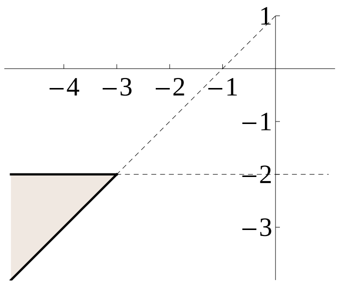
1.1.4. 1. Нет, неверно. **2.** $\sqrt[3]{9} < \frac{20}{9} < \sqrt{5}$. **3.** -3. **4.** а) Любое число из промежутка $(-\infty; 1]$. б-в) Любое число. **5.** 6.

1.2.1. 1. а) Имеем $x \geqslant y + 1 \geqslant 2 + 1 = 3$. Далее, $x + y \geqslant 3 + 2 = 5$. б) Ответ на рисунке.



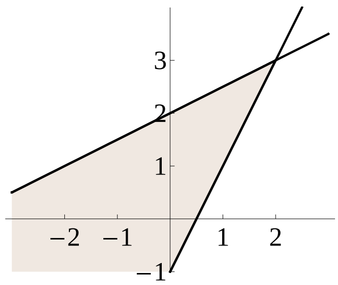
2. а) Так как наименьшее значение переменной x равно 3, а переменной y равно 2, то наименьшим значением суммы $x^2 + y^2$ является 13. б) Имеем $2x - y = x + x - y \geqslant 3 + 1 = 4$. Равенство достигается, если $(x; y) = (3; 2)$ (см. рисунок). **3.** а) Если a и b — различные положительные числа, то $a+b > 2\sqrt{ab}$, поэтому $\sqrt{5}+\frac{3}{\sqrt{5}} > 2\sqrt{3}$. б) Если a и b — различные положительные числа, то $\frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2}$, или $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \frac{a+b}{2}$, откуда $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}$. Если $a = 247$ и $b = 253$, то $a + b = 500$, так что $\frac{4}{a+b} = \frac{1}{125}$. **4.** Так как $\frac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, а $x^2+y^2 \leqslant 9$, то $x+y \leqslant 2\sqrt{\frac{9}{2}} = 3\sqrt{2}$. **5.** Обозначим через x и y длины катетов данного треугольника. По условию $x^2 + y^2 = 9$. Так как $xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$, то площадь треугольника, равная $\frac{1}{2}\,xy$, не больше, чем $\frac{9}{4}$. Равенство достигается, если $x = y = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

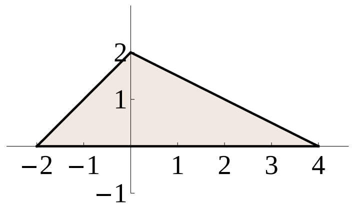
1.2.2. 1. б) Ответ на рисунке.



2. а) 13. б) −7. **5.** $\frac{25}{2}$.

1.2.3. 1. а) Сложив неравенства, получим, что $2x + 2y \leqslant x + y + 5$, откуда $x + y \leqslant 5$. б) Так как $2x \leqslant y + 1 \leqslant \frac{x+4}{2} + 1$, то $4x \leqslant x + 6$, откуда и следует, что $x \leqslant 2$. Полезно также изобразить множество, заданное этой системой неравенств (левый рисунок).

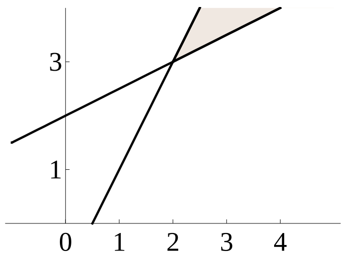


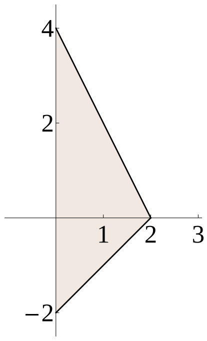


2. б) См. правый рисунок выше. Из этого рисунка виден и ответ на вопрос пункта а): $x \in [-2; 4]$ и $y \in [0; 2]$. Конечно, можно было рассуждать так же, как и в решении задачи 1. Так как $0 \leqslant y \leqslant x + 2$, то $x \geqslant -2$. Так как $y \geqslant 0$, то из неравенства $x \leqslant 4 - 2y$ следует, что $x \leqslant 4$. Так как $y \leqslant x + 2 \leqslant 4 - 2y + 2$, то $3y \leqslant 6$, так что $y \leqslant 2$. **3.** Так как $\frac{k+3}{n+2} > \frac{k}{n}$, то $3n > 2k$, так что $\frac{k}{n} < \frac{3}{2}$. **4.** Обозначим через a и b длины сторон участка. Так как $2a + 2b \leqslant 120$, то $a + b \leqslant 60$. В силу неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим, $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant 900$. Следовательно, площадь участка не более 900 м^2. При этом участок может иметь сколь угодно малую площадь. Заметим, что второе условие задачи является лишним. **5.** Пусть a и b — длины катетов треугольника, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ — длина его гипотенузы.

Так как $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$, то $c \geqslant 3\sqrt{2}$. Равенство достигается при $a = b = 3$. При этом $c < a + b = 6$. Следовательно, $3\sqrt{2} \leqslant c < 6$. То, что длиной гипотенузы может быть любое число из промежутка $[3\sqrt{2}; 6)$, можно пока не пояснять. Это уже геометрия.

1.2.4. 1. См. левый рисунок. **2.** а) $x \in [0; 2]$, $y \in [-2; 4]$; см. правый рисунок.





3. $\frac{k}{n} > \frac{2}{3}$. **4.** Площадь участка — произвольное положительное число, не превосходящее 1600 м^2. **5.** $c \in \left[2\sqrt{2}; 4\right)$.

Тема 2. «Тождества для многочленов и разложения на множители»

2.1.1. 1. *Ответ:* $3(a+b)(b-a)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$. **2.** Данное выражение равно $\frac{a+b}{a-b} = 5$. **3.** Да, является; $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \sqrt{5} = \frac{2\sqrt{5}}{2} - \sqrt{5} = 0$. **4.** $2^{12} - 1 = 8^4 - 1 = (8-1)(8+1)(8^2+1) = 7 \cdot 9 \cdot 65 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. **5.** Так как $(x-y)(x+y) = 125$, то

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 125 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - y = 5, \\ x + y = 25, \end{cases}$$

откуда $(x; y) = (63; 62), (15; 10)$.

2.1.2. 1. $3(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$. **2.** Данное выражение равно $\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$. **3.** Число равно 0. **4.** $2^5 \cdot 5 \cdot 41$. **5.** $(x; y) = (41; 40), (15; 12)$.

2.1.3. 1. Да, является: $\bigl(4+2\sqrt{3}\,\bigr)\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2\bigl(2+\sqrt{3}\,\bigr)\sqrt{7-4\sqrt{3}}=$ $=2\sqrt{\bigl(7+4\sqrt{3}\,\bigr)\bigl(7-4\sqrt{3}\,\bigr)}=2\sqrt{49-48}=2$. **2.** $x^3-x^2y-xy^2+y^3=$ $=(x-y)^2(x+y)$. **3.** $n^3+3n^2+2n=n(n^2+3n+2)=n(n+1)(n+2)$, поэтому это число делится на три как произведение трех последовательных натуральных чисел, так как одно из них всегда делится на 3. **4.** Так как числа 29^4-22^4 и 18^4-11^4 делятся на 7, то данное число, равное их разности, делится на 7. Число 29^4-18^4 делится на 11, потому и все число делится на 11. Так как данное число делится и на 7, и на 11, то оно делится на 77. **5.** Так как $2x^2+6xy+ay^2=2\bigl(x+\frac{3}{2}\,y\bigr)^2+\bigl(a-\frac{9}{2}\bigr)y^2$, то данный многочлен неотрицателен при всех x и y тогда и только тогда, когда $a\geqslant\frac{9}{2}$.

2.1.4. 1. Число равно 8. **2.** $x^3+x^2y-xy^2-y^3=(x+y)^2(x-y)$. **3.** Имеем

$$n^4+2n^3-n^2-2n=n\bigl(n^2(n+2)-(n+2)\bigr)=(n-1)n(n+1)(n+2),$$

а из четырех последовательных натуральных чисел одно делится на два, а еще одно — на четыре. **4.** Данное число делится и на 7, и на 13. **5.** При $b\geqslant\frac{1}{2}$.

2.2.1. 1. Так как

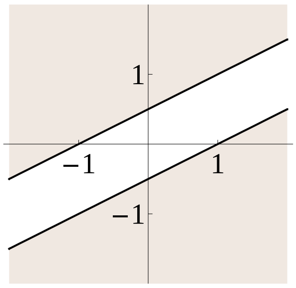
$$x^3+x^2-2=x^3-1+x^2-1=(x-1)(x^2+x+1+x+1)=(x-1)(x^2+2x+2),$$

а выражение x^2+2x+2 в нуль не обращается, то $x=1$. **2.** Ясно, что данная система имеет решения. При этом, если пара $(x;y)$ — это решение, то и пара $(-x;-y)$ также является ее решением. Так как $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=8(x+y)$, $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=17$, то $x^3+y^3=\pm8\sqrt{17}$. **3.** а) Так как $x^4+2x^2\geqslant0$, то $x^4+2x^2+3\geqslant3$. Равенство имеет место при $x=0$. б) $x^4-4x^2+1=(x^2-2)^2-3\geqslant-3$. Равенство имеет место, например, при $x=\sqrt{2}$. **4.** Записав данное неравенство в виде $(x+1)^2+(y-2)^2\leqslant5$, получаем, что оно задает круг с центром в точке $(-1;2)$ и радиусом $\sqrt{5}$. **5.** Неравенство верно, так как $5x^2-6xy+2y^2=\frac{1}{2}\,x^2+2\bigl(\frac{3}{2}\,x-y\bigr)^2\geqslant0$.

2.2.2. 1. Так как $x^3-x^2+2=(x+1)(x^2-2x+2)$, то $x=-1$. **2.** $\pm16\sqrt{7}$. **3.** а) 2. б) 1. **4.** Круг с центром в точке $(1;-3)$ и радиусом $\sqrt{10}$.

2.2.3. 1. *Ответ:* $x=-2;1;2$. Поскольку $x^5-4x^3-x^2+4=x^3(x^2-4)-$ $-(x^2-4)=(x^3-1)(x^2-4)$, то $x^3=1$ или $x^2=4$. **2.** Если $x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}+1}$, то

$\sqrt[3]{3}+1 = \frac{1}{x}$, $\sqrt[3]{3} = \frac{1}{x}-1 = \frac{1-x}{x}$, поэтому $3x^3 = (1-x)^3$, откуда получаем, что $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+1}$ — это корень уравнения $4x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$. **3.** *Ответ:* 5, так как $x^4 - 2x^3 + x^2 + 5 = x^2(x-1)^2 + 5$. **4.** а) Так как $x^2 - 4xy + 4y^2 = (x-2y)^2$, то данное множество есть объединение прямых $y = \frac{x+1}{2}$ и $y = \frac{x-1}{2}$. б) Так как $(x-2y)^2 \geqslant 1$ тогда и только тогда, когда $x - 2y \geqslant 1$ или $x - 2y \leqslant -1$, т. е. $y \leqslant \frac{x-1}{2}$ или $y \geqslant \frac{x+1}{2}$, то данное множество есть объединение изображенных на рисунке полуплоскостей.

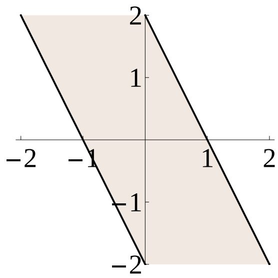


5. Преобразуем разность левой и правой частей неравенства,

$$2(x^4 + y^4) - xy(x+y)^2 = (x^2 - y^2)^2 + x^4 - x^3y + y^4 - xy^3 = \\ = (x^2 - y^2)^2 + (x-y)(x^3 - y^3).$$

В полученной сумме оба слагаемых являются неотрицательными.

2.2.4. **1.** $-2; -1; 1$. **2.** $x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$. **3.** $x^4 + 2x^3 + x^2 + 6 = x^2(x+1)^2 + 6 \geqslant 6$. **4.** а) Объединение прямых $y = 2 - 2x$ и $y = -2 - 2x$. б) Полоса между этими прямыми (рисунок).



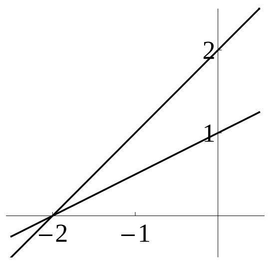
5. $(x^2 + y^2)^2 - xy(x+y)^2 = (x-y)(x^3 - y^3) \geqslant 0$.

Тема 3. «Линейная функция и прямые на плоскости»

3.1.1. 1. а-б) $y = \frac{4-x}{2}$. в) $y = x - 1$. **2.** $(x; y) = (-2; -8)$. **3.** Ответ: $b > 2$. Можно нарисовать «картинку», из которой очевиден ответ. Приведем также алгебраическое решение. Точка пересечения прямых $y = -2x+b$ и $y = x - 1$ имеет координаты $\left(\frac{b+1}{3}; \frac{b-2}{3}\right)$. Поэтому ее ордината положительна при $b > 2$. **4.** а) Подставив $x = 3$ в данное неравенство, получим, что $3a - 3 \geqslant a - 2$, откуда $a \geqslant \frac{1}{2}$. б) Нет, неверно. При $a = \frac{1}{2}$ получаем неравенство $-\frac{x}{2} \geqslant -\frac{3}{2}$, откуда $x \leqslant 3$. **5.** а) Подставив $x = 0$ в данное равенство, получим, что $f(1) = -\frac{1}{2}$. б) Подставив $x = \frac{1}{3}$, получим, что $f(2) = -\frac{1}{3}$. в) Есть два способа решения. Так как мы знаем значения линейной функции $f(x)$ в двух точках, то мы можем найти ее значения в произвольной точке, $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(x - 1) = \frac{x}{6} - \frac{2}{3}$. Другой способ связан с заменой аргумента в равенстве, определяющем функцию. Пусть $u = 3x + 1$. Тогда $x = \frac{u-1}{3}$ и $\frac{x-1}{2} = \frac{\frac{u-1}{3}-1}{2} = \frac{u-4}{6}$. Поэтому $f(u) = \frac{u-4}{6}$. Так как «буква» может быть любой, то $f(x) = \frac{x-4}{6}$.

3.1.2. 1. а-б) $y = 1 - 2x$. в) $y = 3x + 6$. **2.** $(x; y) = (-2; 8)$. **3.** $b > 2$. **4.** а) $a \geqslant \frac{1}{3}$. б) Нет, не верно. **5.** а) $f(1) = \frac{1}{5}$. б) $f(2) = \frac{1}{4}$. в) $f(x) = \frac{x+3}{20}$.

3.1.3. 1. Уравнение прямой $y = a(x + 2)$, координата ее точки пересечения с осью ординат равна $2a$. Поэтому $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$. Геометрическая интерпретация — на рисунке.

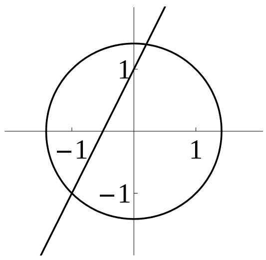


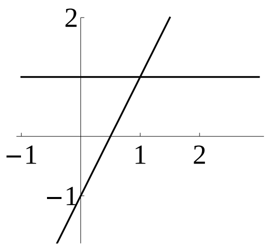
2. Пусть размер кредита составляет s тысяч рублей. Сумма, которую придется выплатить за кредит банку «ОХО», равна $9 + s + 0,13s = 9 + 1,13s$. Банку «ЭХЭ» за тот же кредит придется выплатить $4 + 1,17s$ тысяч рублей. Второй кредит выгоднее, если $4 + 1,17s < 9 + 1,13s$, или $0,04s < 5$, т. е. $s < 125$. Таким образом, клиенту, который берет кредит менее чем на 125 тысяч рублей, выгоднее обратиться в банк «ЭХЭ». **3.** *Ответ:* $0 \leqslant a \leqslant 2$. Неравенство $ax \leqslant 2$

должно быть верно при $x = 1$, значит, $a \leqslant 2$. Если $a > 0$, то линейная функция $y = ax$ — возрастающая, поэтому неравенство $ax \leqslant 2$ будет верно при всех $x \leqslant 1$. При $a = 0$ неравенство очевидно верно. Если $a < 0$, то функция является убывающей, и данное неравенство будет верно не при всех $x \leqslant 1$. Например, оно неверно при $x = \frac{3}{a}$.
4. Пусть $g(x) = ax + b$. а) $f\bigl(g(x)\bigr) = 3(ax + b) + 2 = 3ax + 3b + 2$, $g\bigl(f(x)\bigr) = a(3x + 2) + b = 3ax + 2a + b$. Эти выражения равны, если $3b+2 = 2a+b$, т. е. $b = a-1$. Таким образом, таких функций бесконечно много, их общий вид $y = ax+a-1$. *Замечание.* Смысл полученного условия состоит в следующем. Сделаем сдвиг координат на числовой оси, приняв за новое начало точку $O'(-1)$. Тогда новые координаты x' связаны со старыми соотношением $x' = x + 1$. Выпишем формулу, которой задается функция $y = 3x + 2$ в новых координатах. Так как $y' = y + 1$ и $x' = x + 1$, то $y' - 1 = 3(x' - 1) + 2$, так что $y' = 3x'$. Если $y = ax+a-1$, то $y+1 = a(x+1)$, значит, $y' = ax'$. А очевидно, что если $f_1(x) = a_1x$ и $f_2(x) = a_2x$, то $f_1\bigl(f_2(x)\bigr) = f_2\bigl(f_1(x)\bigr)$. б) В этом случае должно выполняться равенство $3ax+3b+2 = -3x-2$, что имеет место при $a = -1$ и $b = -\frac{4}{3}$. Таким образом, ответ: $g(x) = -\frac{4}{3} - x$.

3.1.4. 1. $-2 \leqslant a \leqslant -1$. **2.** Если сумма кредита более 250 тысяч рублей. **3.** $0 \leqslant a \leqslant 3$. **4.** а) $g(x) = ax + 1 - a$; б) $g(x) = 1 - x$.

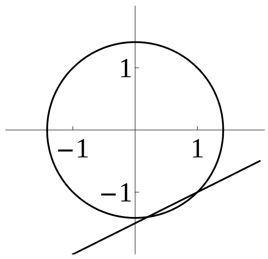
3.2.1. 1. $y \leqslant \frac{x+2}{2}$, $y \geqslant 0$, $x \leqslant 0$. **2.** а) $(x; y) = (-1; -1), \bigl(\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\bigr)$. Иллюстрация — на левом рисунке.

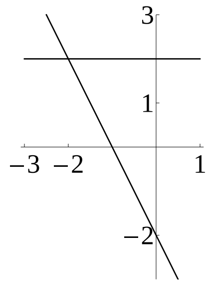




3. Уравнения а) и в) задают одно и то же множество, изображенное на правом рисунке. Уравнение б) задает точку $P(1; 1)$ — точку пересечения этих прямых. **4.** $a = -2; 4$. **5.** Не более 230 тысяч рублей.

3.2.2. 1. $y \geqslant -\frac{x+2}{2}$, $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$. **2.** а) $(x; y) = (1; -1), \bigl(\frac{1}{5}; -\frac{7}{5}\bigr)$. Иллюстрация — на левом рисунке.





3. Уравнения а) и в) задают одно и то же множество, изображенное на правом рисунке. Уравнение б) задает точку $P(-2; 2)$ — точку пересечения этих прямых. **4.** $a = -2; 2$. **5.** Не более 275 тысяч рублей.

3.2.3. 1. а) Напишем уравнения прямых, параллельных прямой $y = 2x$ и проходящих через данные точки A и B. Уравнение прямой ℓ_1, проходящей через точку A: $y = 3+2(x+1)$, или $y = 2x+5$. Уравнение прямой ℓ_2, проходящей через точку B: $y = -1+2(x-1)$, или $y = 2x-3$. Всякая прямая, лежащая в полосе между прямыми ℓ_1 и ℓ_2, будет пересекать отрезок AB. Поэтому такая прямая задается уравнением $y = 2x+b$, где $-3 \leqslant b \leqslant 5$. б) Уравнение прямой, проходящей через точку $C(-2; 0)$, имеет вид $y = a(x+2)$. Перепишем его в виде $y - a(x+2) = 0$. Прямая пересекает отрезок AB, если она проходит через одну из точек A и B или же если эти точки лежат по разные стороны от этой прямой. Точки A и B лежат по разные стороны, если при подстановке их координат в левую часть уравнения прямой мы получим числа противоположных знаков. Таким образом, знаки чисел $3-a$ и $-1-3a$ должны быть противоположны, следовательно, их произведение отрицательно. Решив неравенство $(3-a)(-1-3a) < 0$ (например, «методом интервалов»), получим ответ. *Ответ:* $-\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant 3$. Конечно, можно было рассуждать и геометрически. **2.** а) *Ответ:* система неравенств $y \leqslant 2x+2$, $y \geqslant \frac{x+1}{2}$ и $y \leqslant 2-x$. Все, что надо было сделать, — это написать уравнения прямых, на которых лежат стороны данного треугольника, и не ошибиться в выборе знаков неравенств. б) Так как наименьшее значение абсцисс точек треугольника равно -1, а наименьшее значение их ординат равно 0, то $x+y \geqslant -1$. При этом $x+y = -1$ в точке $(-1; 0)$. **3.** а) *Ответ:* Да, верно. Так как первое уравнение системы можно записать в виде $y = \frac{b-x}{2}$, то оно задает на плоскости прямую, параллельную прямой $y = -\frac{x}{2}$. Второе уравнение системы запишем в виде $y = 1-ax$, оно также задает на плоскости прямую. Если $a \neq \frac{1}{2}$, то эти прямые не параллельны. Координаты точки их пересечения и являются решениями системы. Поэтому можно взять произвольное число $a \neq \frac{1}{2}$ и для любого b система имеет решение. Конечно, можно было сразу сказать, что при $a = 0$ для любого b решением системы является пара $(b-2; 1)$. Тем не менее проведенное рассуждение полезно, так как поможет дать ответ на вопрос следующего пункта задачи. б) *Ответ:* Да, верно. Мы уже видели, что если $a \neq \frac{1}{2}$, то при любом b система имеет решение. Пусть теперь $a = \frac{1}{2}$. Перепишем второе уравнение в виде $x + 2y = 2$. Теперь ясно, что система будет иметь решение только при $b = 2$. В этом случае оба уравнения задают на плоскости одну и ту же прямую. **4.** Обозначим через y_0 доход от продаж при начальных вложениях x_0, через y_1 — доход от продаж при вложениях $x_1 = x_0 + 1$ и y_2 — доход от продаж при вложениях $x_2 = x_0 + 2$. Так как $x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$, то по свойству линейной функции $y_1 = \frac{y_0 + y_2}{2}$. По условию $y_1 = \frac{3}{2}\,y_0$, поэтому $\frac{3}{2}\,y_0 = \frac{y_0 + y_2}{2}$, значит, $y_2 = 2y_0$. Таким образом, при увеличении вложений на 2 млн доходы увеличились бы в 2 раза.

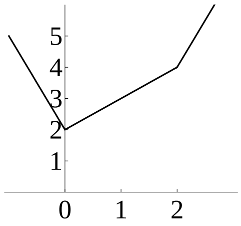
3.2.4. 1. а) Уравнения $y = \frac{x}{2} + b$, где $-\frac{1}{2} \leqslant b \leqslant \frac{7}{2}$. б) Уравнения $y = a(x-2)$, где $-4 \leqslant a \leqslant \frac{1}{3}$. **2.** а) *Ответ:* система неравенств $y \leqslant x + 1$, $y \leqslant 1 - 2x$ и $y \geqslant -\frac{x+1}{2}$. б) Наибольшее значение суммы равно 1, однако в этом случае нельзя рассуждать так же, как в решении задачи варианта I. Дело в том, что наибольшее значение абсцисс точек данного треугольника равно 1, наибольшее значение их ординат также равно 1. Конечно, неравенство $x + y \leqslant 2$ справедливо, однако нет ни одной точки треугольника, для которой эта сумма была бы равна двум. Поэтому будем рассуждать следующим образом. Если умножить неравенство $y - x \leqslant 1$ на $\frac{1}{3}$ и сложить с умноженным на $\frac{2}{3}$ неравенством $2x + y \leqslant 1$, мы и получим неравенство $x + y \leqslant 1$. **3.** а) Да, верно. б) Да, верно. **4.** Доходы увеличились бы в 1,25 раза.

Тема 4. «Модуль»

4.1.1. 1. Данное выражение равно 5, так как

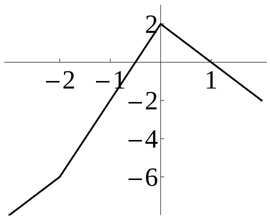
$$\Big|\big||x+1| + 2\big| + 3\Big| = |x+1| + 5.$$

2. а) $x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. б) -4. в) Уравнение решений не имеет. **3.** $a \geqslant 1$. **4.** а) Числа множества $\{1, 2, \ldots, 6\}$. б) $x \in \left(-\infty; \frac{13}{2}\right)$. в) $x \in [4; 9]$. **5.** а) График — на рисунке.

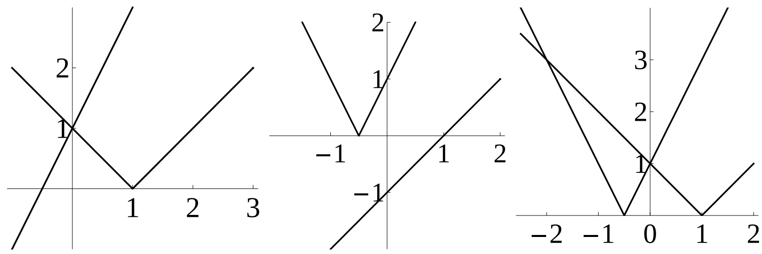


б) Уравнение не имеет решений при $a < 2$; имеет одно решение при $a = 2$; имеет два решения при $a > 2$.

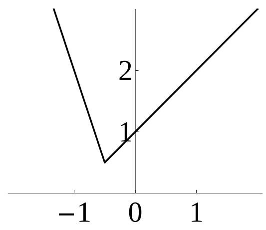
4.1.2. 1. Данное выражение равно 3. **2.** а) $x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. б) -2. в) Уравнение решений не имеет. **3.** $a \geqslant -1$. **4.** а) Все числа множества $\{1, 2, \ldots, 8\}$. б) $x \in \left(-\infty; \frac{17}{2}\right)$. в) $x \in [5; 12]$. **5.** а) График — на рисунке. б) Уравнение не имеет решений при $a > 2$; имеет одно решение при $a = 2$; имеет два решения при $a < 2$.



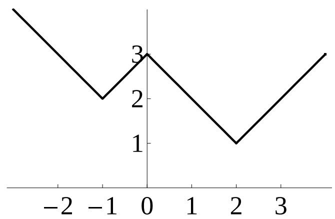
4.1.3. 1. а) $x = 0$. б) Решений нет. в) $x = -2; 0$. **2.** а) $(-\infty; 0]$. б) Решений нет. в) $[-2; 0]$. Иллюстрациями к решениям этих задач являются следующие рисунки.



На левом рисунке изображены графики $y = 2x + 1$ и $y = |x - 1|$. На среднем рисунке: $y = |2x + 1|$ и $y = x - 1$. На правом рисунке: $y = |2x + 1|$ и $y = |x - 1|$. **3.** На следующем рисунке изображен график $y = |2x + 1| - x$.

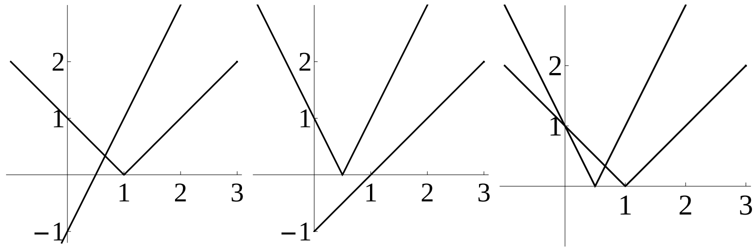


Уравнение имеет решение, если число a является значением этой функции. Поэтому $a \geqslant \frac{1}{2}$. **4.** а) График данной функции изображен на следующем рисунке.

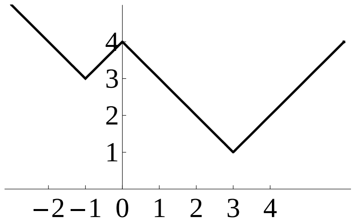


б) Ответ сразу читается по построенному графику. Данное уравнение имеет столько решений, сколько точек пересечения с этим графиком имеет (горизонтальная) прямая $y = a$. *Ответ:* уравнение не имеет решений при $a < 1$; уравнение имеет одно решение при $a = 1$; уравнение имеет два решения при $1 < a < 2$ и при $a > 3$; уравнение имеет три решения при $a = 2$ и $a = 3$; уравнение имеет четыре решения при $2 < a < 3$. **5.** *Ответ:* точки $K(-3)$ и $L(1)$. Прежде всего надо написать уравнение $|x+1| + |x-1| = |x-3|$, решениями которого и являются координаты искомых точек. Если $x > 1$, то $|x+1| > |x-3|$, а потому уравнение решений не имеет. Значение $x = 1$ является решением уравнения. Если $-1 \leqslant x < 1$, то $|x+1| + |x-1| = 2$, а $|x-3| > 2$, поэтому на этом промежутке уравнение также не имеет решений. Если $x < -1$, то мы получаем уравнение $-2x = 3 - x$, решением которого является $x = -3$.

4.1.4. 1. а) $x = \frac{2}{3}$. б) Решений нет. в) $x = 0; \frac{2}{3}$. **2.** а) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. б) Неравенство справедливо для всех $x \in \mathbb{R}$. в) $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. Иллюстрациями к решениям являются следующие рисунки.

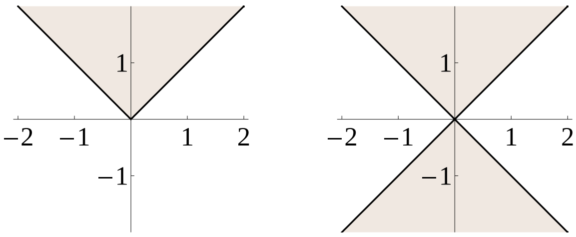


3. $a \geqslant -\frac{1}{2}$. **4.** а) График данной функции изображен на следующем рисунке.



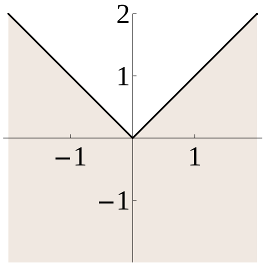
б) *Ответ:* уравнение не имеет решений при $a < 1$; уравнение имеет одно решение при $a = 1$; уравнение имеет два решения при $1 < a < 3$ и при $a > 4$; уравнение имеет три решения при $a = 3$ и $a = 4$; уравнение имеет четыре решения при $3 < a < 4$. **5.** Точки $K(-4)$ и $L(0)$.

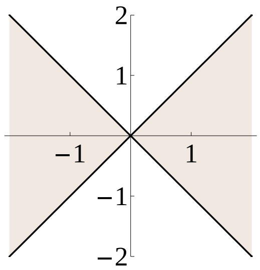
4.2.1. 1. а) Ответ на левом рисунке. б-в) Ответ на правом рисунке.



2. Рассмотрим точки $A(-1;0)$, $B(1;0)$ и $C(0;-1)$, лежащие на графике $y = |x| - 1$. Прямая $y = ax$, проходящая через середину стороны AB треугольника ABC, всегда будет пересекать одну из других его сторон, таким образом, будет пересекать график $y = |x| - 1$. **3.** $a \geqslant 0$. **4.** а) $|x-1| = |y-2|$. б) Объединение прямых $y = x + 1$ и $y = 3 - x$. **5.** Так как $y \leqslant |y|$ и $-x \leqslant |x|$, то $-x+y \leqslant |x|+|y| \leqslant 2$, значит, $y-x \leqslant 2$, $y \leqslant x + 2 < x + 3$.

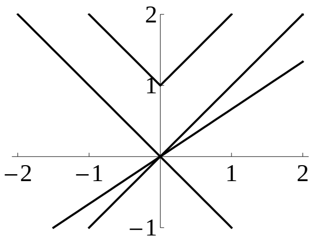
4.2.2. 1. а) Ответ на левом рисунке. б-в) Ответ на правом рисунке.

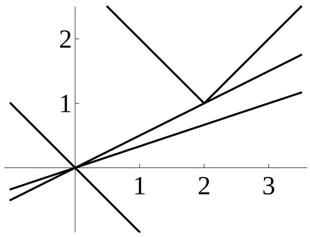




2. Рассмотрим треугольник с вершинами в точках $A(-2;0)$, $B(2;0)$ и $C(0;2)$, лежащих на графике $y = 2 - |x|$. Прямая $y = ax$, проходящая через середину стороны AB, всегда будет пересекать одну из других сторон этого треугольника, таким образом, будет пересекать график $y = 2 - |x|$. **3.** $a \leqslant 0$. **4.** а) $|x - 2| = |y + 1|$. б) Объединение прямых $y = x-3$ и $y = 1-x$. **5.** Так как $y-x \leqslant |x|+|y| \leqslant 3$, то $y \leqslant x+3 < x+4$.

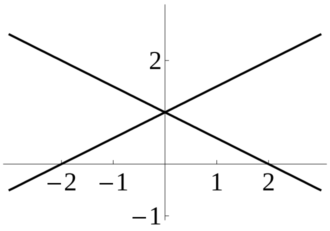
4.2.3. 1. Так как $|x - 1| + |x + a| \geqslant |a + 1|$, при этом число $|a + 1|$ является наименьшим значением левой части данного неравенства, то оно имеет решение тогда и только тогда, когда $|a + 1| \leqslant 2$, т. е. при $-3 \leqslant a \leqslant 1$. **2.** а) *Ответ:* $|a| \leqslant 1$. На левом рисунке изображены: график $y = |x| + 1$ и прямые $y = x$ и $y = -x$. Если $|a| > 1$, то прямая $y = ax$ будет иметь точки пересечения с данным графиком, а потому неравенство будет справедливо не для всех $x \in \mathbb{R}$.





б) На правом рисунке изображены: график $y = |x - 2| + 1$ и прямые $y = \frac{x}{2}$ и $y = -x$. Если $a \geqslant \frac{1}{2}$ или же если $a < -1$, то прямая $y = ax$ будет иметь точки пересечения с данным графиком, а потому неравенство будет справедливо не для всех $x \in \mathbb{R}$. *Ответ:* $-1 \leqslant a < \frac{1}{2}$.
3. Расстояние от точки $M(x;y)$ до оси ординат равно $|x|$, расстояние от

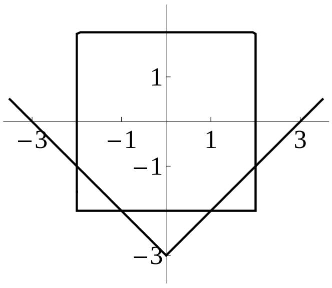
этой точки до прямой $y = 1$ равно $|y-1|$. По условию $|x| = 2|y-1|$. Полученное уравнение задает на плоскости объединение прямых $y = 1+\frac{x}{2}$ и $y = 1 - \frac{x}{2}$ (рисунок).



4. *Ответ:* $a \leqslant 3$. Ясно, что система имеет решения, если $a \leqslant 0$. Пусть $a > 0$. Первое неравенство системы при любом b задает на числовой прямой отрезок длины 6. Второе неравенство задает объединение промежутков $(-\infty; -1-a]$ и $[-1+a; +\infty)$. Система не будет иметь решений при некотором b, если отрезок длины 6 можно поместить в промежуток $(-1-a; -1+a)$, что возможно только если $2a > 6$, т. е. при $a > 3$.
5. Подставив $y = |x| - 3$ в первое уравнение системы, получим уравнение

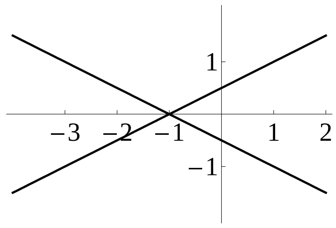
$$\bigl|x - |x| + 3\bigr| + \bigl|x + |x| - 3\bigr| = 4.$$

Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, поэтому получаем уравнение $|2x - 3| = 1$, откуда $x = 1; 2$. Если $x < 0$, то получим уравнение $|2x + 3| = 1$, откуда $x = -1; -2$. *Ответ:* $(x; y) = (1; -2), (2; -1), (-2; -1), (-1; -2)$. Иллюстрацией к данной задаче является следующий рисунок.

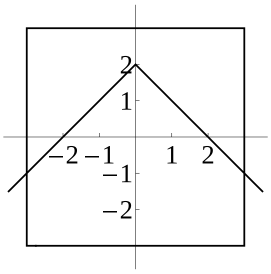


Дело в том, что уравнение $|x-y|+|x+y| = 4$ задает изображенный на этом рисунке квадрат, стороны которого параллельны осям координат.

4.2.4. 1. $-2 \leqslant a \leqslant 4$. **2.** а) $|a| \leqslant 1$. б) $-\frac{1}{2} < a \leqslant 1$. **3.** а) Уравнение $2|y| = |x+1|$. б) Полученное уравнение задает пару прямых $y = \frac{x+1}{2}$ и $y = -\frac{x+1}{2}$, изображенных на следующем рисунке.



4. $a \geqslant 3$. **5.** $(x; y) = (-3; -1), (3; -1)$. Геометрическая иллюстрация — на следующем рисунке.



Тема 5. «Квадратичная функция»

5.1.1. 1. а) Верно, так как если $a > b > 0$, то $a^2 > b^2$ и $31a > 31b$, поэтому $a^2 + 31a > b^2 + 31b$. б) Нет, неверно, поскольку квадратичная функция не является возрастающей на всей числовой оси. Другое дело, что подобрать контрпример «наугад» будет непросто. Поскольку неравенство преобразуется к виду $(a - b)(a + b + 31) > 0$, то числа a и b должны удовлетворять неравенствам $a > b$ и $a + b < -31$. Например, $a = -15$ и $b = -17$. **2.** Наибольшее значение функции равно 9, поэтому уравнение $f(x) = a$ имеет решение, если $a \leqslant 9$. Натуральными значениями a являются числа $1, 2, \ldots, 9$. **3.** а) «Верхняя» парабола задается уравнением $y = 1 + (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 5$; «нижняя» — уравнением $y = 3 - (x - 2)^2 = 4x - x^2 - 1$. б) Ясно, что парабола, симметричная параболе $y = x^2 - 3x + 1$, задается уравнением вида $y = 3x - x^2 + c$. Поскольку числа 1 и c — ординаты их точек пересечения с осью ординат — должны быть симметричны относительно точки 2, то $c + 1 = 4$, откуда $c = 3$. *Ответ:* $y = 3x - x^2 + 3$. **4.** Разумнее всего доказать сначала пункт б). Так как числа 1 и 3 являются корнями квадратного уравнения $f(x) - 1 = 0$, то $f(x) - 1 = a(x-1)(x-3)$, таким образом, $y = a(x-1)(x-3) + 1$. Для ответа на вопрос пункта а) осталось заметить, что $f(-1) = 8a + 1 = f(5)$, так что $f(-1) = f(5)$.

5.1.2. 1. б) Нет, не верно. **2.** Числа $1, 2, \ldots, 11$. **3.** а) $y = x^2 + 4x + 6$ и $y = -4x - x^2$. б) $y = x^2 + 3x + 1$. **4.** а) Эти значения равны друг другу.

5.1.3. 1. *Ответ:* нет, не верно. Функция $y = 10x^2 - x$ убывает на промежутке $\left(-\infty; \frac{1}{20}\right]$, в частности, она убывает на промежутке $\left[0; \frac{1}{20}\right]$. Поэтому, если $0 < b < a \leqslant \frac{1}{20}$, то $10a^2 - a < 10b^2 - b$. **2.** а) Функция $y = -21x - x^2$ достигает наибольшего значения при $x = -\frac{21}{2}$; это значение равно $\frac{21^2}{4} = \frac{441}{4} = 110{,}25$. Следовательно, данная функция имеет 110 натуральных значений (все натуральные числа от 1 до 110). б) Положив $t = x - y$, получаем выражение $t(t-6) = t^2 - 6t$, наименьшим значением которого является число -9. **3.** а) Например, $y = x^2$ и $y = 4 - x^2$. Однако из этого примера не очень видны соотношения между коэффициентами. Полезно сместить параболы «вбок», чтобы абсцисса их вершин была равна, например, единице. Получим параболы $y = x^2 - 2x + 1$ и $y = 3 + 2x - x^2$. б) *Ответ:* $a_1 = -a_2$, $b_1 = -b_2$, $c_1 + c_2 = 4$. Действительно, точки $(x; y_1)$ и $(x; y_2)$ симметричны относительно прямой $y = 2$, если $y_1 + y_2 = 4$. Если y_1 — ордината точки графика данной функции, а y_2 — ордината точки графика искомой функции, то $y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $y_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$, поэтому $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 4 - a_1x^2 - b_1x - c_1$, откуда и следуют указанные соотношения. **4.** а) *Ответ:* $a = 0$. Можно просто решить уравнение $f(a) = f(a+2)$, а можно рассуждать следующим образом. Вершина параболы имеет абсциссу $x_0 = -\frac{6}{2\cdot(-3)} = 1$. Квадратичная функция принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно x_0. Таким образом, точка $x_0 = 1$ должна быть серединой отрезка $[a; a+2]$, откуда и следует, что $a = 0$. б) *Ответ:* $a \leqslant -1$. Данная функция возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$ и убывает на промежутке $[1; +\infty)$. Поэтому ее наибольшее значение на промежутке $[a; a+2]$ достигается на его правом конце, если на этом промежутке данная функция — возрастающая, что имеет место, если $a+2 \leqslant 1$. **5.** Напишем уравнение прямой, проходящей через данную точку, $y = 8 + k(x-4)$. Эта прямая касается параболы $y = \frac{1}{2}x^2$, если уравнение $\frac{1}{2}x^2 = kx + 8 - 4k$ имеет единственное решение. Дискриминант этого уравнения равен $k^2 - 8k + 16$, откуда следует, что $k = 4$. Следовательно, $y = 4x - 8$ — уравнение касательной. Точка B имеет координаты $(2; 0)$, точка C — координаты $(0; -8)$. Так как $2 = \frac{0+4}{2}$, то B — середина отрезка AC.

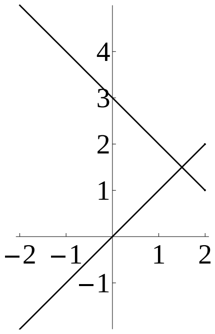
Заметим, что равенство $0 = \frac{8+(-8)}{2}$ проверять не обязательно, так как про точки A, B и C известно, что они лежат на одной прямой.

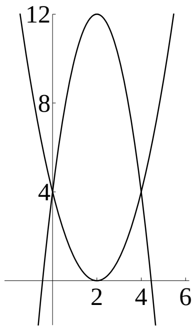
5.1.4. 1. Нет, не верно. **2.** а) 91. б) 16. **3.** Например, $y = x^2$ и $y = 6-x^2$. б) *Ответ:* $a_1 = -a_2$, $b_1 = -b_2$, $c_1 + c_2 = 6$. **4.** а) $a = 0$. б) $a \geqslant 1$. **5.** Уравнение касательной: $y = 8x - 8$.

5.2.1. 1. а) Любая прямая, параллельная оси ординат, всегда пересекается с графиком заданной на $\mathbb{R}$ функции в одной точке. б) Прямая, параллельная оси абсцисс, имеет с параболой одну, две общие точки либо не имеет их вовсе. **2.** а) $a \geqslant -3$. б) $a = -3$. **3.** $a < 0$, поскольку при $a > 0$ решением неравенства будет объединение лучей или же вся прямая. То, что при любом отрицательном значении a данное неравенство имеет решение, следует из того, что одним из его решений является $x = 0$. **4.** Решениями данного уравнения являются $x = a$ и $x = 2 - a$. Число $2 - a$ принадлежит отрезку $[-2; 2]$ при $0 \leqslant a \leqslant 4$. Поэтому данное уравнение имеет решение на данном отрезке при $-2 \leqslant a \leqslant 4$. **5.** а) Решив неравенство $f(a+2) \geqslant f(a)$, получим, что $a \geqslant 0$. б) Данная функция возрастает на промежутке $[1; +\infty)$, поэтому она возрастает на отрезке $[a; a + 2]$, если $a \geqslant 1$.

5.2.2. 2. а) При $a \geqslant 2$. б) $a = 2$. **3.** $a < 0$. **4.** $-5 \leqslant a \leqslant 2$. **5.** а) $a \leqslant 0$. б) $a \leqslant -1$.

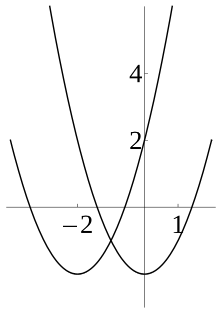
5.2.3. 1. *Ответ:* $-11 < a \leqslant 1$. Приравняв друг другу выражения, задающие функции, получим уравнение $(a-1)x^2 - (a-1)x - 3 = 0$. Если $a = 1$, то оно не имеет решений. При $a \neq 1$ это уравнение является квадратным с дискриминантом, равным $(a - 1)(a + 11)$. Поэтому оно не имеет решений, если $(a - 1)(a + 11) < 0$. **2.** *Ответ:* $a \leqslant \frac{9}{4}$. Данное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $9 - 4a \geqslant 0$, т. е. при $a \leqslant \frac{9}{4}$. Ответ следует из того, что произведение корней данного уравнения равно a. **3.** Так как знаменатель дроби положителен, мы можем перейти к неравенству $(a - 1)x^2 + 4x + 2 > 0$. Оно выполняется для всех чисел x, кроме одного, если $a-1 > 0$ и в его левой части стоит полный квадрат, т. е. когда $4-2(a-1) = 0$. *Ответ:* $a = 3$. **4.** а) Имеем $x^2-3x+1 = y^2-3y+1$, или $(x-y)(x+y-3) = 0$, значит, $y = x$ и $y = 3-x$. *Ответ:* объединение двух прямых. С другой стороны, ответ очевиден. Значения квадратичной функции в различных точках совпадают, если эти точки симметричны относительно абсциссы вершины параболы. В данном случае она равна $\frac{3}{2}$, откуда и появляется условие $x + y = 3$. б) *Ответ:* $a \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$. Первый способ рассуждения. Корнями уравнения $f(x) = f(a)$ являются числа a и $3 - a$. Второе из них лежит на отрезке $[-2;2]$, если $a \in [1;5]$. Объединяя отрезки $[-2;2]$ и $[1;5]$, получим отрезок $[-2;5]$. Следовательно, при $a \in [-2;5]$ и только при таких a хотя бы один из корней данного уравнения лежит на отрезке $[-2;2]$. Поэтому оно не имеет решений на данном отрезке, если $a < -2$ или $a > 5$.





Во втором решении используется множество, построенное при решении пункта а) задачи. На левом рисунке изображено множество всех пар $(x;a)$, такое что $f(x) = f(a)$ и $x \in [-2;2]$. Поэтому для того, чтобы данное уравнение не имело решений на отрезке $[-2;2]$, надо, чтобы $a > 5$ или же $a < -2$. **5.** На правом рисунке выше изображены параболы $y = x^2 - 4x + 4$ и $y = 4 + 8x - 2x^2$. а) Прямая, параллельная оси ординат, будет пересекать объединение этих парабол в одной точке, если она совпадает с этой осью или же проходит через точку 4 на оси абсцисс. Во всех остальных случаях она пересекается с данным объединением в двух точках. б) Прямая $y = a$ может иметь две, три или четыре точки пересечения с данным объединением. Две точки — при $a < 0$, $a > 12$, а также при $a = 4$, три точки — при $a = 0$ и $a = 12$. Во всех остальных случаях число точек пересечения равно четырем.

5.2.4. 1. $-15 < a \leqslant 1$. **2.** 8. **3.** $a = -1; 3$ **4.** а) Объединение прямых $y = x$ и $y = 1 - x$. б) $a < -2$ или $a > 3$. **5.** а) Прямая, параллельная оси ординат, будет пересекать объединение этих парабол в одной точке, если она проходит через точку -1 на оси абсцисс. Во всех остальных случаях она пересекается с данным объединением в двух точках. б) Прямая $y = a$ может не пересекать параболы или же иметь две, три или четыре точки пересечения с данным объединением. Если $a < -2$, то прямая не пересекается ни с одной из парабол (рисунок).



Она имеет с ними две общие точки при $a = -2$, три — при $a = -1$. Во всех остальных случаях число точек пересечения равно четырем.

О принципах отбора учебных математических задач

Ясно, что главный инструмент при изучении математики — это задачи. А как всякий инструмент, предлагаемые учащимся задачи должны быть выверенными. Выверенными в том смысле, чтобы при их решении, в процессе размышления над задачей прояснялся смысл изучаемых математических объектов и (или) понятий, становились понятными связи между ними. Степень достигнутой ясности зависит не столько от способностей обучающегося, сколько от того, насколько уместна задача, предложенная ему в данный момент. «Задачный материал» во многом определяется существующими учебниками, но зависит и от вкуса учителя. Перед каждым учебным днем он отбирает набор задач, который предложит на следующий день своим ученикам. Зачастую этот отбор хаотичен, а его результат непредсказуем. Конечно, у опытного учителя имеется накопленная за годы работы «задачная база». Однако если спросить, чем он (она) руководствуется, предлагая ту или иную задачу, то скорее всего вы услышите в ответ, что «эта задача хорошо иллюстрирует разобранную теорему, а та слишком сложна, поскольку требует для своего решения знания материала, которого я не хотел(а) бы касаться. Поэтому я выбираю третью задачу, удачно сочетающуюся с первой». Таким образом, имеющийся у учителя педагогический опыт чаще всего является тем, что в зарубежной литературе принято называть *невыраженным знанием* (*inarticulated knowledge*).

За многие годы (даже века) педагогической деятельности были разработаны многочисленные типологии учебных математических задач. Предлагается, к примеру, различать задачи:

1. *По характеру требований:* задача на доказательство; задача на построение; задача на вычисление.
2. *По методам решения:* задачи на составление уравнений; задачи на использование графической интерпретации; задачи на разложение на множители и т. д.
3. *По типу используемых в их формулировке величин:* задачи на движение, работу, стоимость, проценты и т. п.
4. *По компонентам учебной деятельности:* организационно-действенные, стимулирующие, контрольно-оценочные.

Получается, что если в задаче сказано: «доказать», то это задача на доказательство, если сказано: «найти процент» — задача на проценты. Если вы включили задачу в контрольную работу, значит, это контрольно-оценочная задача, если ее же дали для самостоятельной работы на уроке, то она организационно-действенная. Тем самым отнесение задачи к определенному типу связано с внешней стороной процесса обучения и никак не соотносится с ее обучающими характеристиками. При классификации по «методам решения» недостаточно говорить о том, что «это задача на теорему Виета». В учебниках и задачниках такое название имеют параграфы, в которых приводятся десятки различных задач, так что же должно служить критериями отбора некоторых из них?

В 1971 году К. И. Нешков и А. Д. Семушин[3] предложили классифицировать задачи по их функциональному назначению.

1. *Задачи с дидактическими функциями*: на прямое применение изученной теории или рассматриваемой зависимости, на закрепление основных фактов школьного курса математики.
2. *Задачи с познавательными функциями* ориентированы на усвоение основного содержания школьного курса математики; в процессе их решения учащиеся углубляют знание отдельных обязательных для усвоения сторон изученного ранее материала; знакомятся с важными в познавательном отношении теоретическими сведениями, с не изучавшимися ранее методами решения задач.
3. *Задачи с развивающими функциями*, содержание которых может отходить от основного школьного курса математики и для решения которых ученику недостаточно только применить известные факты и методы, а необходимо проявить выдумку, сообразительность.

С точки зрения практики обучения эта классификация более информативна, чем предыдущая, но все же недостаточна. Ее авторы сами пишут: «Естественно, что некоторые задачи несут на себе несколько функций. Подбирая задачи для решения в классе, учителю следует видеть *смысловую нагрузку*[4], которую несет каждая из предлагаемых для решения задач, обращать основное внимание на их основные функции и соответственно выбирать методику обучения их решению». Но остается вопрос: так в чем же заключается «смысловая нагрузка» задачи или ее «основная функция»?

Есть и другие подходы к классификациям задач, о которых здесь сказано не будет. Но все эти подходы объединяет представление о школьном обучении как о процессе, целью которого является приобретение учащимися определенных знаний и умений. Таких как,

[3] Функции задач в обучении// *Математика в школе.*— 1971.— Вып. 3.— С. 4–7.
[4] Выделено автором.

к примеру, знание основных тригонометрических формул и умение решать уравнения типа $2\cos^2 x + \sin x = 1$.

Когда учащимся предлагают набор методов решения задач определенных типов, то все, что они должны сделать, — это опознать конкретный тип и далее применить соответствующий метод. К примеру, если объявить темой урока задачи на движение и совместную работу, то хорошо обученные ученики будут бодро составлять уравнения, заполняя таблицу «скорость–время–расстояние». Отдельные продвинутые ученики поймут связь между задачами на совместную работу и задачами на движение путников навстречу друг другу, что может оказаться единственным содержательным итогом этого урока. Да, такие уроки необходимы, однако когда учащемуся указан метод решения задачи, то у него не возникает необходимости *рассуждать*.

Обучение математике не сводится к приобретению учащимися определенных знаний и умений. Говоря о целях обучения математике в школе, еще Д. Пойа писал[5], что «прежде всего — и это, бесспорно, самое главное — нужно научить молодежь ДУМАТЬ». К этому можно еще добавить, что «математика учит отличать правильное рассуждение от неправильного» (В. И. Арнольд). Таким образом, целью обучения математике должно быть развитие математического мышления учащихся, об основных характеристиках которого так точно было сказано В. А. Крутецким (см. с. 5 данной книги).

Следование определенной типологии является важным элементом построения методики обучения математике. Более определенно можно сказать даже следующим образом: цели обучения являются основанием для введения той или иной типологии учебных математических задач. Пример типологии, направленной на развитие мышления, можно найти в книгах Д. Пойа. Не пытаясь дать полную классификацию, он вводит несколько типов задач, методический смысл которых понятен из самих их названий: «догадаться и доказать», «испытать следствия», «вы можете сделать ошибочное предположение», «теория в малом масштабе». Продолжением исследований в этом направлении является опубликованная в 1997 году статья О. А. Иванова «Обучение поиску решения задач (фантазии в манере Пойа)»[6].

Какими же должны быть принципы построения классификаций задач, посредством которых мы сможем учить строить рассуждения,

[5]Математическое открытие. — М.: Наука, 1979.

[6]*Математика в школе.*— 1997.— Вып. 6.— С. 47–51. Эта работа приведена также в качестве заключения в книге «Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей». — М.: МЦНМО, 2009.

развивать исследовательские навыки, в общем, сможем «учить думать»? При использовании такой классификации должны проявляться свойства задач, которые способствовали бы развитию у учащихся логического и ассоциативного мышления. Некоторый шаг в построении подобной классификации был сделан в работе Т. Н. Ведерниковой и О. А. Иванова «Интеллектуальное развитие школьников на уроках математики»[7]. В данной работе предложенный там подход будет развит и обобщен.

Начнем со следующего примера (задача 8 диагностической работы по теме 1).

Объясните, что произойдет с величиной положительной рациональной дроби, если ее числитель увеличить на 1, а знаменатель — на 2.

На первый взгляд (не очень искушенного учащегося) ответ ясен: «Конечно, дробь уменьшится, поскольку ее знаменатель увеличился на большее число, чем ее числитель». Однако чтобы получить правильный ответ, задачу *надо начать решать*.

Обозначим через k числитель данной дроби, а через n — ее знаменатель. Увеличив числитель на 1, а знаменатель — на 2, мы получим дробь $\frac{k+1}{n+2}$. Для того, чтобы понять — какая из дробей больше, рассмотрим их разность. Имеем

$$\frac{k}{n} - \frac{k+1}{n+2} = \frac{2k-n}{n(n+2)} \ .$$

Следовательно, исходное число больше полученного, если $2k > n$, или $\frac{k}{n} > \frac{1}{2}$. Таким образом, если исходное число было больше $\frac{1}{2}$, то в результате указанных действий мы получим число, меньшее его. Если же данное число было меньше $\frac{1}{2}$, то в результате мы получим число, большее исходного.

Анализ приведенного решения этой задачи показывает, что оно состоит из трех естественных шагов. Прежде всего следует перевести формулировку задачи из текстовой формы в символьную: была дробь $\frac{k}{n}$, получили дробь $\frac{k+1}{n+2}$. Вторым шагом является замена неравенства $a > b$ неравенством $a - b > 0$ с последующим преобразованием разности дробей. Наконец, полученное условие на числа k и n надо еще естественным образом *проинтерпретировать*. Действительно, переписав неравенство $2k > n$ в виде $\frac{k}{n} > \frac{1}{2}$, мы получим условие на величину исходной дроби. Первый шаг решения можно назвать *кодированием* (в данном случае — условия задачи).

[7] *Математика в школе.*— 2002.— Вып. 3.— С. 41–45.

Конечно, эта задача связана с такими темами школьного курса, как свойства числовых неравенств и преобразование алгебраических дробей, однако ее учебное содержание определяется более указанными формами общематематической деятельности — кодированием и интерпретацией. Итак, первый тип классификации — классификация по видам деятельности, которые используются при решении задачи. Предлагается выделять такие виды, как:

использование стандартного метода;

математический эксперимент;

кодирование;

интерпретация;

реструктуризация;

выдвижение гипотез;

самоконтроль;

трансформация.

Поясним, что означает термин *реструктуризация*. Самый простой и стандартный пример — это разложение на множители при решении уравнений. Более содержательным примером являются преобразования, содержащиеся в решении задачи 10 темы 5. В пункте а) этой задачи реструктуризация приводила заданную систему уравнений к более простой системе, а в пункте б) с ее помощью было получено представление суммы пятых степеней. Термин *математический эксперимент* должен быть ясен. Кстати, эту форму деятельности можно активизировать при решении, опять-таки, приведенной выше задачи. Действительно, если во время ее решения учащимся предложить «немного посчитать», то, во-первых, есть большая вероятность, что они не сделают стандартной ошибки, и, во-вторых, осознают необходимость логического рассуждения. А далее они смогут *выдвинуть гипотезу* и доказать ее, *используя стандартный метод*, заключающийся в проведении алгебраических преобразований. Возможно, что *самоконтроль* не является отдельной формой деятельности, а является характеристикой критической формы мышления.

Теперь взглянем на задачу 4 диагностической работы темы 1. В ее решении нет никаких алгебраических преобразований; для того, чтобы понять, что из неравенства $a \leqslant 1$ не следует неравенство $a^2 \leqslant a$, достаточно заметить, что последнее неравенство справедливо только для неотрицательных значений a. Похожее соображение показывает, что неравенство $\frac{1}{a} \geqslant 1$ также не может быть верным для всех $a \leqslant 1$. Подобная схема рассуждения применяется также при решении многих уравнений (неравенств), как это ни покажется странным. Посмотрим на задачи 7а и 7б диагностической работы по теме 4. В решении задачи 7а не нужно было проводить ни одного преобразования, ведь все, что требовалось, так это понять, что x и $2x-1$ одновременно в нуль не обращаются. Такую схему рассуждения можно назвать *силлогистической*. По сути дела именно такой схеме следует и решение задачи 7б, основная идея которого состоит в том, что всякое решение данного уравнения должно лежать в промежутке $[4;+\infty)$, в котором это уравнение решений не имеет. Уравнения (неравенства), при решении которых почти не требуется преобразовывать, но необходимо рассуждать, должны появляться на каждом уроке и в (почти) каждой работе.

Таким образом, анализируя процесс решений задач, можно заметить, что в одном случае его основу составляют алгебраические преобразования, в другом — чисто логические — будем говорить, как и выше, — силлогистические рассуждения. Рассмотрим теперь пример решения задачи 6а диагностической работы по теме 5. Прямая $y=a$ пересекает параболу $y=x^2+2x$, если уравнение $x^2+2x-a=0$ имеет решение, что верно, если $4+4a\geqslant 0$, т. е. при $a\geqslant -1$. Эта же прямая пересекает параболу $y=4x-x^2-3$, если $16-4a-12\geqslant 0$, т. е. при $a\leqslant 1$. Таким образом, при любом a прямая будет пересекать хотя бы одну из этих парабол. Изложенное решение — алгебраическое. С другой стороны, решение, приведенное в тексте темы 5, основывается на анализе множества значений квадратичной функции и том соображении, что уравнение $f(x)=a$ имеет решение в случае, если число a входит в множество значений функции $f(x)$. Положительный ответ на вопрос задачи следует из того, что каждое действительное число входит в множество значений хотя бы одной из двух данных квадратичных функций.

Совокупность объектов, их свойств и используемых методов составляют то, что можно назвать *схемой рассуждения*. Формульно-алгебраической названа такая схема, при которой рассуждение основывается на преобразованиях, проводимых по алгебраическим правилам. Заметим, что и тригонометрические соотношения имеют алгебраическую природу, так же, как соотношения вида $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$ для показательных функций. Если речь в решении идет о графиках функций или просто о свойствах функций, таких, как монотонность, то такую схему естественно назвать функционально-аналитической. Подчеркнем, что подобная схема часто применяется при решении задач, сформулированных в алгебраическом контексте.

Тем самым предлагается классифицировать задачи также и по схемам рассуждений, используемых в их решениях:

формульно-алгебраические;

функционально-аналитические;

комбинаторно-алгоритмические;

силлогистические.

Рассмотрим еще один пример (задача 5.19).

а) Найдите все целые решения неравенства $x^2 - 3x - 1 \leqslant 0$.

б) Найдите число пар $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющих неравенству $|y| \leqslant 1 + 3x - x^2$.

Как видно из приведенных решений, естественная схема решения пункта а) этой задачи является функционально-аналитической. Схема решения пункта б) является, по сути, комбинаторно-алгоритмической.

К большому сожалению, решение подавляющего большинства задач из обычных учебников и задачников связано только с *формульно-алгебраической* схемой рассуждения. Если еще добавить, что практически все решения основаны на использовании одного из изученных методов, т. е. всего одного *вида математической деятельности*, то становится понятно, что нет ничего удивительного в том, что старшеклассники начисто *отучаются думать*.

Конечно, чем больше знает учащийся, тем большее число задач он в состоянии решить с использованием одного из стандартных для него методов, особенно — методов дифференциального исчисления. Возможно, что с этим связано известное высказывание прежнего министра образования, что «высшая математика в школе убивает креативность». Однако не высшая математика убивает креативность (а лучше сказать по-русски — гибкость мышления). Они гибнут тогда, когда учащимся (студентам) предлагают для решения только задачи на использование стандартных методов. При этом — искусственные задачи. Существуют и другие подходы к преподаванию основ высшей математики, с двумя из них вы можете познакомиться, прочитав книгу О. Иванова и С. Климчука «Математический анализ для первокурсников»[8].

Схемы рассуждений и виды деятельности, применяемые при решении конкретной задачи, являются взаимозависимыми. Рассмотрим задачу 8 диагностической работы по теме 4.

[8]Москва, Издательство МЦНМО, 2013. В действительности эта книга состоит из двух формально независимых текстов, дополняющих как друг друга, так и стандартный курс математического анализа для студентов нематематических специальностей вузов.

Определите в зависимости от значения a количество решений уравнения: а) $|x-1|-x=a$; б) $|2x-1|-x=a$; в) $\left|\frac{x}{2}-1\right|-x=a$.

Были показаны три различных способа решения подобных задач. Решения заданий пунктов а) и в) следовали функционально-аналитической схеме рассуждения, решение задания пункта б) — формульно-алгебраической. В первых двух случаях надо было еще «считать ответ с графика», т. е. провести *интерпретацию*. В последнем случае речь идет об *использовании стандартного метода*. Однако для того, чтобы довести такое решение до верного ответа, необходимы навыки использования комбинаторно-алгоритмической схемы рассуждения.

В заключение приведем задачу, которую естественно предложить учащимся, уже знакомым с использованием производной для исследования функций. Так сказать, «парной» к ней является задача «про величину дроби», с которой начиналось обсуждение.
Исследуйте поведение функции $f(x)=\frac{x+a}{2x+b}$ (здесь a и b — положительные числа) на промежутке $[0;+\infty)$.
Ее решения вполне стандартны, например, можно вычислить производную. Так как

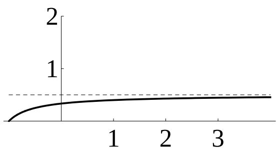
$$f'(x)=\frac{2x+b-2(x+a)}{(2x+b)^2}=\frac{b-2a}{(2x+b)^2}\ ,$$

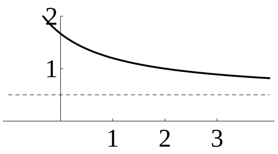
то $f'(x)>0$, если $b>2a$, и $f'(x)<0$, если $b<2a$. Полезно заметить, что условие $b>2a$ равносильно условию $f(0)=\frac{a}{b}<\frac{1}{2}$.

Решение вполне шаблонно, да и сама задача, если в этом месте прекратить обсуждение, не очень интересна. «*Всегда остается что-нибудь, над чем можно размышлять; обладая достаточным упорством и проницательностью, мы можем усовершенствовать любое решение или, во-всяком случае, мы всегда можем глубже осмыслить решение*» (Д. Пойа).

Поэтому давайте теперь поставим перед учащимися два следующих вопроса. Первый вопрос: «Из каких соображений очевидно (безо всяких вычислений), что если $f(0)>\frac{1}{2}$, то на промежутке $[0;+\infty)$ данная функция является убывающей?» Второй вопрос: «Не видите ли вы связи между этой задачей и одной из предыдущих?»

Дело в том, что график функции $f(x)$ — гипербола, асимптотами которой являются прямые $y=\frac{1}{2}$ и $x=-\frac{b}{2}$. Поэтому из условия положительности числа b следует, что эта функция монотонна на промежутке $[0;+\infty)$. Характер монотонности определяется соотношением между значением этой функции в нуле и значением ее предела на бесконечности. Заметим, что $f(0) = \frac{a}{b}$ и $f(x) \to \frac{1}{2}$ при $x \to \infty$. Поэтому, если $\frac{a}{b} < \frac{1}{2}$, то рассматриваемая функция на этом промежутке является возрастающей, если же $\frac{a}{b} > \frac{1}{2}$, то она на нем убывает. На следующих рисунках приведены части графиков $y = \frac{x+1}{2x+3}$ и $y = \frac{x+5}{2x+3}$.





Конечно, из решения этой задачи сразу следует решение самой первой из рассмотренных в этом разделе задач, так как ее вопрос состоит в нахождении соотношения между значениями $f(0)$ и $f(1)$ данной функции.

Хочется надеяться, что знакомство с приведенными типологиями задач даст учителю возможность взглянуть на процесс обучения с иной, нестандартной точки зрения. Основной принцип «правильного» процесса обучения математике состоит в том, чтобы создавать такие условия, при которых для ученика самым естественным путем решения задачи будет построение *рассуждения*. Для того, чтобы они (рассуждения) были более разнообразными, полезно анализировать предлагаемые учащимся задачи с точки зрения введенных типологий. Тогда самостоятельно проведенные учеником рассуждения, основанные на экспериментах, догадках, и сделанные им обобщения, использование адекватной задаче схемы рассуждения в результате станут для него естественными.

«*Наилучшие правила мышления нельзя получить как-то извне, но нужно выработать их так, чтобы они вошли в плоть и кровь и действовали с силой инстинкта.*» [9]

[9] Д. Пойа и Г. Сёге, из предисловия к книге «Задачи и теоремы из анализа». М.: Наука, 1978.

О содержании и стиле изложения курса алгебры в 9 классе

Едва ли не первый вопрос, который каждый учитель задает себе, размышляя о содержании того или иного курса: «А что же в обучении главное? Научить решать квадратные уравнения, “работать с модулем”? Добиться того, чтобы учащиеся легко производили преобразования алгебраических и тригонометрических выражений, строили графики, решали задачи с параметрами?»

Конечно, все перечисленное важно, и если речь идет о курсе алгебры в 8–9 классах, без умения решать квадратные уравнения «далеко не уедешь». Однако автор принадлежит к сторонникам той точки зрения, что одной из главных задач в школе является «учить думать». Дело в том, что, хотя содержание курса алгебры в 8–9 классах хорошо проработано и существует масса учебников, задачников и дидактических материалов, учителям часто остается неясным — как же на основе этих материалов можно «научить думать».

В этой статье автор попробует высказать свою точку зрения на то, что значит и как можно «научить думать и рассуждать». Собственно говоря, тому же самому была посвящена и предыдущая статья (написанная Т. Ю. Ивановой). В отличие от нее, здесь автор не будет вводить новые педагогические понятия, а постарается выделить основные составляющие «обучения умению думать и рассуждать», подкрепив их примерами задач (большинство из которых взяты из этой книги).

1) Развитие критического мышления. Предлагайте задачи на поиск ошибок в неправильных решениях, задачи на построение контрпримеров, в процессе решения и обсуждения которых происходит обучение самопроверке и самоконтролю.

2) Развитие логического мышления. В процессе обучения должны постоянно появляться задачи, требующие для своего решения именно рассуждений, а не только следования предписанному алгоритму.

3) Развитие творческого мышления. Переформулировки задач, рассмотрение частных случаев, выдвижение гипотез, рассуждения по индукции. Перевод алгебраической задачи на геометрический язык и наоборот. Перебор вариантов и обоснование полноты проведенного перебора как необходимая составляющая решения задачи.

4) Развитие «хорошего вкуса». Как писал Г. Фройденталь, «однако <математическим> воспитанием называется именно привитие хорошего вкуса». По мнению автора, это достигается при решении красивых задач, применении изящных рассуждений, появлении неожиданных и простых идей и формулировок. Поэтому школьникам должны время от времени предлагаться и сложные задачи (пусть и слишком трудные для самостоятельного решения большинством учащихся).

Указанные составляющие должны появляться при изложении каждой темы курса, будь то: неравенства, алгебраические преобразования, модуль, линейная и квадратичная функции. Безусловно, сделать это существенно сложнее, чем просто научить школьников решать линейные неравенства или строить график квадратичной функции. Ведь вполне бессмысленно в течение пары недель предлагать учащимся задачи на «метод перебора» или отвести специальное время для «развития критического мышления».

Однако, как говорил Исаак Ньютон, «примеры полезнее правил», а потому приведем примеры задач, выбранных из разных тем курса, которые проиллюстрируют подход автора к стилю изложения курса алгебры.

Развитие критического мышления

Ошибочное решение следующей задачи автор часто предлагал своим ученикам — как в виде рассказа на уроке, так и в заранее подготовленных и раздававшихся им листках.

Пример 1. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = (5 - 2x + x^2)^2 - 4(5 - 2x + x^2).$$

«Решение». Замена $t = 5 - 2x + x^2$ сводит задачу к поиску наименьшего значения функции $g(t) = t^2 - 4t$, равного -4.

Ясно, что полученный ответ неверен в силу того, что наименьшее значение функции $g(t)$ достигается при $t = 2$, тогда как $5 - 2x + x^2 \geqslant 4$. Поэтому после проведенной замены следует искать наименьшее значение функции $g(t)$ на промежутке $[4; +\infty)$, на котором оно равно нулю.

Конечно, в будущем подобные рассуждения станут для учащихся стандартными, более того, их нетрудно формализовать, введя соответствующее «правило», однако «чем меньше правил, тем лучше».

При решении следующих двух задач учащиеся учатся находить примеры и контрпримеры.

Пример 2 (задача 1 проверочной работы 5.1.2). а) Докажите, что если $a > b > 0$, то $2a^2 + 51a > 2b^2 + 51b$. б) Выясните, верно ли, что для любых чисел a и b из того, что $a > b$, следует, что $2a^2 + 51a > 2b^2 + 51b$.

Пример 3 (дополнительная задача 5.5). Известно, что значения функции $f(x) = ax^2+bx+c$ в точках 1, 2 и 3 являются целыми числами. Верно ли, что тогда коэффициенты a, b и c обязаны быть целыми числами?

Развитие логического мышления

Начнем со следующей задачи.

Пример 4. Известно, что уравнение $f(x) = 0$ имеет два решения, а уравнение $g(x) = 0$ имеет три решения. Определите число решений уравнения $f(x)g(x) = 0$.

Правильный ответ: от 0 до 5 решений. Дело в том, что решения этих уравнений, во-первых, могут совпадать, во-вторых, решение одного уравнения может не принадлежать области определения другого уравнения. Предложите учащимся «пофантазировать», построив набор разнообразных примеров.

Как развитие этой идеи, можно предложить учащимся следующую задачу (или, наоборот, начать с нее).

Пример 5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-a} = 0$ имеет единственное решение.

Ясно, что $x = a$ является решением данного уравнения. Если $a < 1$, то это уравнение имеет три решения: $a; 1; 2$, если $a = 1$, то решений два. Столько же решений оно имеет и тогда, когда $1 < a < 2$, поскольку в этом случае число 1 не входит в его область определения. Если же $a \geqslant 2$, то данное уравнение имеет единственное решение.

Другие примеры.

Пример 6 (задача 3 диагностической работы по теме 3). Найдите все значения a, при которых неравенство $ax + 2 \geqslant 0$ справедливо: а) при всех $x \in \mathbb{R}$; б) при всех $x \geqslant -1$; в) при всех $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

Пример 7 (дополнительная задача 4.11). Найдите все значения параметра a, при которых при любом значении b имеет решение уравнение $ax + b = |x|$.

Пример 8 (дополнительная задача 5.12). Известно, что парабола проходит через две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, при этом $y_1y_2 < 0$. Докажите, что эта парабола пересекает ось абсцисс.

Подобные задачи должны появляться постоянно. Возможно, что их лучше включать в домашние задания, поскольку даже просто для оформления их решений может потребоваться достаточно много времени.

Развитие творческого мышления

Порой для того, чтобы найти решение задачи, бывает достаточно рассмотреть простые частные случаи.

Пример 9. Выясните, существует ли натуральное n, при котором справедливо неравенство

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}>1.$$

Все, что надо сделать, так это посчитать:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}. \quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}.$$

Теперь нетрудно догадаться, что

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1},$$

после чего доказать эту формулу, например, по индукции. Так как $\frac{n}{n+1}<1$ при любом натуральном n, то приведенное в условии неравенство ни при каком n не выполняется.

Иногда решение основано на индукции по числу переменных, а потому вначале надо уменьшить их число.

Пример 10. Докажите, что если числа a, b, c и d лежат между 0 и 1, то $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)>1-a-b-c-d$.

Ясно, что $(1-a)(1-b)=1-a-b+ab>1-a-b$. Домножив обе части полученного неравенства на положительное число $1-c$, получим, что

$$(1-a)(1-b)(1-c)>(1-a-b)(1-c)=1-a-b-c+ab+bc>1-a-b-c.$$

Для завершения доказательства достаточно умножить на $1-d$ обе части доказанного неравенства и провести аналогичные преобразования. Кроме того, очевидно и обобщение неравенства задачи на случай произвольного числа переменных.

Аналогичный пример был разобран в книге.

Пример 11 (задача 15 темы 2). Докажите, что:
а) если $a\geqslant b\geqslant c$, то $a^2-b^2+c^2\geqslant(a-b+c)^2$;
б) если $a\geqslant b\geqslant c\geqslant d\geqslant e$, то $a^2-b^2+c^2-d^2+e^2\geqslant(a-b+c-d+e)^2$.

Следующая задача интересна тем, что ее затруднительно решить «в лоб» (чем будут заниматься большинство учащихся), тогда как решение легко найти посредством прямого перебора.

Пример 12. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства $\sqrt{2-x} \leqslant \frac{1}{x} - x$.

Действительно, при $x = -1$ получаем неверное неравенство $\sqrt{3} \leqslant 0$. Неравенство $\sqrt{4} \leqslant \frac{3}{2}$, полученное при $x = -2$, также неверно. Наконец, при $x = -3$ получаем неравенство $\sqrt{5} \leqslant \frac{8}{3}$, которое верно. Поэтому ответ в задаче: $x = -3$.

Для того, чтобы найти решения следующих задач, полезно провести математический эксперимент (подробнее об этом говорится в предыдущей статье).

Пример 13 (задача 3 проверочной работы 5.1.3). а) Приведите пример двух квадратичных функций, графики которых симметричны относительно прямой $y = 2$. б) Предположим, что графики функций $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ симметричны относительно прямой $y = 2$. Найдите соотношения между коэффициентами: a_1 и a_2; b_1 и b_2; c_1 и c_2. Ответ обоснуйте.

Пример 14 (дополнительная задача 2.1). Докажите, что число, которое на единицу больше произведения четырех последовательных целых чисел, является точным квадратом.

Многим учащимся 8–9 классов непривычно рассуждение «от противного».

Пример 15. Докажите, что если число $2^n - 1$ является простым, то и n — простое число.

Предположим, что число n не является простым. Таким образом, $n = km$, где k и m — натуральные числа, бóльшие 1. Тогда в силу известного тождества

$$x^m - 1 = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + 1)$$

мы можем записать, что

$$2^{km} - 1 = (2^k - 1)(2^{k(m-1)} + 2^{k(m-2)} + \ldots + 1).$$

Значит, число $2^n - 1$ делится на отличное от него и от 1 число $2^k - 1$ и, следовательно, не является простым числом.

Порою все, что надо сделать, — это перебрать варианты.

Пример 16. Докажите, что неравенство $x^{10} - x^7 + x^6 - x + 1 > 0$ справедливо при всех действительных x.

Если $x < 0$, то неравенство верно, поскольку в его левой части все слагаемые являются положительными числами. Если $0 \leqslant x < 1$, то $x^{10} \geqslant 0$, $x^6 - x^7 \geqslant 0$, а $1 - x > 0$, поэтому левая часть неравенства также поожительна. Наконец, при $x \geqslant 1$ верны неравенства $x^{10} - x^7 \geqslant 0$ и $x^6 - x \geqslant 0$, поэтому левая часть данного неравенства не меньше 1.

Развитие хорошего вкуса

Старайтесь, чтобы ваши ученики ценили изящество в решениях, которое тесно связано с их краткостью и точностью, имейте «в запасе» задачи, которыми вы можете удивить их. Таких задач достаточно много в тексте нашей книги, приведем еще несколько подобных примеров.

Пример 17. Известно, что $f(x+1) = f(x) + 2x + 1$ при любом x, а $f(0) = 0$. Найдите $f(2013)$.

Конечно, можно начать вычислять сумму последовательных нечетных чисел. Но можно заметить, что для любого натурального n значение $f(n)$ определяется однозначно и при этом функция $f(x) = x^2$ удовлетворяет указанному соотношению. Поэтому $f(2013) = 2013^2$.

Пример 18. Решите систему

$$\begin{cases} \frac{x}{1+y^2} = z\,, \\ \frac{z}{1+x^2} = y\,, \\ \frac{y}{1+z^2} = x\,. \end{cases}$$

Перемножив данные уравнения, получим, что

$$\frac{xyz}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} = xyz,$$

откуда следует, что $xyz = 0$ или $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) = 1$. Последнее равенство имеет место только если $x = y = z = 0$. Если же $xyz = 0$, то одно из чисел равно нулю, а тогда из данных уравнений следует, что и остальные числа равны нулю. Ответ: $(x; y; z) = (0; 0; 0)$.

В заключение приведу пример задачи, которую автор время от времени предлагает своим ученикам — в конце утомительного урока или просто для поднятия настроения. Как писал Блез Паскаль: «Предмет математики настолько серьезен, что никогда не нужно упускать случая сделать его занимательным».

Пример 19. В записи многочлена $(x-a)(x-b)\ldots(x-z)$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Найдите коэффициент при x^2 у полученного многочлена.

Ответ: Этот коэффициент равен нулю. Действительно, в третьей скобке с конца в данном произведении находится разность $x-x$, поэтому полученный многочлен — нулевой.