

*Задачи для самостоятельного решения.*

1. (Всесибирской олимпиады школьников 2016-2017, 10 класс) Шестнадцать рыбаков, разбитых на три группы, вместе поймали 113 рыб. Каждый рыбак первой группы поймал по 13 рыб, второй — по 5 рыб, третьей — по 4 рыбы. Сколько рыбаков в каждой группе?
2. (Всесибирской олимпиады школьников 2016-2017, 11 класс) Найти все целые положительные решения уравнения  $(n+2)! - (n+1)! - n! = n^2 + n^4$ .
3. (Турнир городов 2015-2016, 10 класс) Пусть  $p$  – простое число. Сколько существует таких натуральных  $n$ , что  $pn$  делится на  $p + n$ ?
4. Найдите все простые числа  $p$ , такие, что  $14p^2 + 1$  – также простые.
5. Восьмая часть персонала некоторой фабрики работает в отделе управления, еще 230 сотрудников в отделе упаковки, а остальные в нескольких цехах, численность каждого из которых составляет девятую часть от персонала фабрики. Чему равна наибольшая возможная численность персонала фабрики?

*Решение задач:*

(Всесибирской олимпиады школьников 2016-2017, 10 класс) Шестнадцать рыбаков, разбитых на три группы, вместе поймали 113 рыб. Каждый рыбак первой группы поймал по 13 рыб, второй — по 5 рыб, третьей — по 4 рыбы. Сколько рыбаков в каждой группе?

*Решение.* Обозначим количество рыбаков в группах через  $x, y, z$  соответственно.

По условию,  $x + y + z = 16$ ,  $13x + 5y + 4z = 113$ . Вычитаем учетверённое первое уравнение из второго, получаем  $9x + y = 49$ , откуда  $49 - 9x \geq 0$ ,  $x \leq 5$ . С другой стороны,

$x + y = 49 - 8x \leq x + y + z = 16$ ,  $x \geq \frac{33}{8} = 4,125$ . Следовательно, подходить может

единственный вариант:  $x = 5$ ,  $y = 4$ ,  $z = 7$ . Проверяем его подстановкой во второе уравнение и убеждаемся, что это решение.

*Ответ.* В первой группе 5 рыбаков, во второй группе 4 рыбака, в третьей группе 7 рыбаков.

(Всесибирской олимпиады школьников 2016-2017, 11 класс) Найти все целые положительные решения уравнения  $(n+2)! - (n+1)! - n! = n^2 + n^4$ .

*Решение.* Перепишем уравнение в виде

$$n! \cdot (n^2 + 2n) = n^2 + n^4$$

$$n! = \frac{n(n^2 + 1)}{n + 2} = n^2 - 2n + 5 - \frac{10}{n + 2}$$

Последняя дробь будет целым числом при  $n=3$  и  $n=8$ , но  $n=8$  не является решением (подставьте!)

*Ответ.*  $n = 3$ .

(Турнир городов 2015-2016, 10 класс) Пусть  $p$  – простое число. Сколько существует таких натуральных  $n$ , что  $pn$  делится на  $p + n$ ?

*Решение.* Пусть  $pn = (p + n)k$ , тогда  $p^2 = p^2 + pn - (p + n)k = (p + n)(p - k)$ .

Так как  $p - k < p$ , то оно на  $p$  не делится. Поэтому  $p + n = p^2$ , то есть  $n = p^2 - p$ , оно подходит.

*Ответ.* Одно.

Найдите все простые числа  $p$ , такие, что  $14p^2 + 1$  – также простые.

*Решение:* Докажем, что если  $p \neq 3$ , то  $14p^2 + 1$  делится на 3.

Так как  $p$  – простое число и  $p \neq 3$ , то  $p = 3k + 1$  либо  $p = 3k - 1$ , тогда  $p^2 = 9k^2 + 6k + 1$  либо  $p^2 = 9k^2 - 6k + 1$ . Это означает, что остаток от деления  $p^2$  на 3 равен 1, следовательно  $14p^2 + 1$  делится на 3 при любом  $p$ , т.е. не является простым.

Если  $p = 3$   $14p^2 + 1 = 127$  – простое число.

*Ответ:* 127

Восьмая часть персонала некоторой фабрики работает в отделе управления, еще 230 сотрудников в отделе упаковки, а остальные в нескольких цехах, численность каждого из которых составляет девятую часть от персонала фабрики. Чему равна наибольшая возможная численность персонала фабрики?

*Решение:*

Пусть  $x$  — численность персонала фабрики,  $y$  — количество цехов.

Заметим, что  $x \div 8$ ;  $x \div 9$ ;  $x > 230$ ;  $y > 0$

$$\frac{x}{8} + 230 + y \cdot \frac{x}{9} = x$$

$$9x + 230 \cdot 72 + 8xy = 72x$$

$$63x - 8xy - 16560 = 0$$

$$x \cdot (63 - 8y) = 23 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$63 - 8y > 0$$

$$0 < y < 7,875$$

$$y = 7 \Rightarrow 63 - 8 \cdot 7 = 7$$

$$y = 6 \Rightarrow 63 - 8 \cdot 6 = 15 = 3 \cdot 5$$

$$x \cdot 15 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 23$$

$$x = 2^4 \cdot 3 \cdot 23 = 1104$$

$$1104 \neq 9k$$

$$y = 5 \Rightarrow 63 - 8 \cdot 5 = 23$$

$$x \cdot 23 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 23$$

$$x = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$$

*Ответ:* 720