

---

*Сравнение остатков при делении левой и правой частей уравнения.*

---

*Пример 1.* Решить в натуральных числах уравнение  $3^m + 7 = 2^n$ .

*Решение:*

Левая часть исходного уравнения при делении на 3 дает остаток, равный 1.

В правой части исходного уравнения стоят степени числа 2. Степени числа 2 оканчиваются цифрами 2, 4, 8, 6, а при делении на 3 остаток, равный 1, дают только четные степени, т. е.  $n = 2k$ .

Перепишем исходное уравнение в виде  $3^m = 2^{2k} - 7$ . Выражение  $2^{2k} - 7$ , стоящее в правой части этого уравнения, при делении на 4 дает остаток, равный 1. Остаток, равный 1, дают только четные степени числа 3. Значит,  $m$  тоже четное число ( $m = 2p$ ).

Таким образом,  $3^{2p} = 2^{2k} - 7$ ;  $7 = (2^k - 3^p)(2^k + 3^p)$ . Учитывая, что оба множители положительны, получим  $2^k + 3^p = 7$ ;  $2^k - 3^p = 1$ , откуда  $m = 2$ ;  $n = 2$  (при  $m = 0$ ;  $n = 3$  не подходит).

*Ответ:*  $m = 2$ ;  $n = 2$

*Пример 2.* Решить в натуральных числах уравнение  $n! + 4n - 9 = k^2$ .

*Решение:*

Перепишем исходное уравнение в виде  $n! + 4n = k^2 + 9$ .

Правая часть этого уравнения при делении на 4 дает остатки равные 1 или 2.

Действительно, всякое целое число можно с учетом делимости на 4 записать в виде  $k = 4t + r$ ,  $r = 0, 1, 2, 3$ , тогда  $k^2 = (4t + r)^2 = 16t^2 + 8tr + r^2$ . Числа  $k^2$  и  $r^2$  дают один и тот же остаток при делении на 4. Поскольку  $r^2 = 0, 1, 4, 9$  остатки при делении числа  $k^2$  на 4 будут равны 0 или 1. Остаток при делении 9 на 4 равен 1.

Левая часть уравнения делится на 4 при  $n \geq 4$ .

Следовательно, исходное уравнение при  $n \geq 4$  решений не имеет.

Рассматривая натуральные числа  $n < 4$ , получим решения:  $n = 2, k = 1$  и  $n = 3, k = 3$

*Ответ:*  $n = 2, k = 1$  и  $n = 3, k = 3$

---

### Метод оценки

Основной принцип этого метода состоит в преобразовании уравнения в целых числах в уравнение с очевидной оценкой. В большинстве случаев уравнение сводится к неотрицательному выражению.

---

Пример 3. Решить в целых числах уравнение  $5x^4 - 40x^2 + 2y^2 - 32y^3 = -208$

Решение: преобразуем исходное уравнение к виду

$$5(x^4 - 8x^2 + 16) + 2(y^6 - 16y^3 + 64) = 0$$

$$5(x^2 - 4)^2 + 2(y^3 - 8)^2 = 0$$

Сумма двух неотрицательных слагаемых равна нулю, когда оба слагаемые одновременно равны нулю.

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ y^3 - 8 = 0 \end{cases}$$

Откуда  $x = \pm 2$ ;  $y = 2$ .

Ответ:  $x = \pm 2$ ;  $y = 2$

Пример 4. Найдите все натуральные решения уравнения  $n^2 + 2n - n! = 0$ .

Решение: Преобразуем исходное уравнение к виду

$$n(n+2) = n!$$

$$(n-1)! = n+2$$

При  $n > 4$  решений уравнения нет, так как  $(n-1)! > 2(n-1) > n+2$

Подставляя  $n = 1, 2, 3, 4$  в уравнение, получаем, что решением исходного уравнения будет  $n = 4$ .

Ответ:  $n = 4$

---

*Подберем решение и докажем, что других решений нет.*

---

*Пример 5.* Какое наименьшее натуральное значение может принимать частное трехзначного числа и суммы его цифр?

*Решение:* частное 198 и 18 равно 11. Покажем, что меньше 11 искомая величина быть не может.

Пусть  $100x + 10y + z = A(x + y + z)$ , где  $A \in [1; 10]$ . Тогда  $(100 - A)x + (10 - A)y = (A - 1)z$ .

При  $A \in [1; 10]$  левая часть принимает наименьшее значение при  $x = 1, y = 0$ , левая часть не меньше 90. Правая часть принимает наибольшее значение при  $z = 9$ , правая часть не больше 81.

*Ответ:* 11

---

*«Окончание частей уравнения» на одну и ту же цифру*  
*Основной принцип решения уравнения в целых числах заключается в следующем: значения левой и правой части должны оканчиваться на одну и ту же цифру.*

---

*Пример 6.* Решить в целых числах уравнение  $x^2 = 5y^2 + 3$

*Решение:* Очевидно, что число  $5y^2$  оканчивается на 0 либо на 5, а число  $5y^2 + 3$  оканчивается на 3 либо на 8. Нетрудно убедиться, что  $x^2$  может оканчиваться только на 0, 1, 4, 5, 6, 9. Значит, левая и правая части исходного уравнения оканчиваются на разные цифры.

Следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

*Ответ:* решений нет.

---

### Применение свойств функций.

---

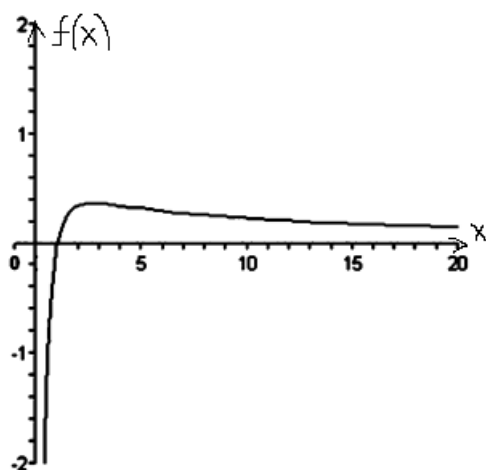
**Пример 7.** Найдите все пары натуральных чисел  $k$  и  $n$ , таких что  $k < n$  и  $(n)^k = (k)^n$ .

**Решение:** прологарифмируем исходное уравнение, тогда

$$\ln(n)^k = \ln(k)^n; \quad k \ln(n) = n \ln(k).$$

Тогда  $\frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(k)}{k}$ . Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ , где  $x > 0$ . Исследуем промежутки монотонности функции.

Производная этой функции равна  $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$ , производная неотрицательна при  $0 < x < e$  и неположительна при  $x > e$ , т.е.  $f(x)$  возрастает при  $0 < x < e$  и убывает при  $x > e$ .



В силу монотонности функции  $f(x)$ , равенство  $f(n) = f(k)$  при  $k < n$  возможно только при условии  $k < e < n$ . Отсюда следует, что  $k = 1$  или  $k = 2$ , причем для каждого  $k$  может найтись не более одного  $n$ .

Пара  $k = 1; n = 1$  не подходит, так как  $k < n$ .

**Ответ:**  $k = 2; n = 4$

*Задачи для самостоятельного решения.*

1. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых среди значений функции

$$y = \frac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$$
 есть ровно одно целое число.

2. Найдите все натуральные числа  $n$ , для которых выполняется равенство  $n^3 - n = n!$
3. Найдите все целые числа  $a$  и  $b$ , такие, что корни уравнения  $x^2 + (2a + 9)x + 3b + 5 = 0$  являются различными целыми числами, а коэффициенты  $2a + 9$  и  $3b + 5$  - простыми числами.
4. Найдите максимальное натуральное число  $n$ , при котором число  $13n^2 + 14n + 13$  делится на  $n - 15$  без остатка.

Решение задач для самостоятельного решения.

Задача 1. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых среди значений функции  $y = \frac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$  есть ровно одно целое число.

Решение: Исходная функция определена и непрерывна для всех действительных  $x$ .

Выделим целую часть функции  $y = 1 - \frac{2x + 6 - a}{6 + x^2}$ . Заметим, что для любого значения  $a$  в множество значений функции входит единица. Чтобы единица была ровно одним целым числом, необходимо условие  $y \in (0; 2)$ . Тогда решим неравенство:  $0 < \frac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2} < 2$

Тогда  $\begin{cases} x^2 - 2x + a > 0 \\ -x^2 - 2x + a - 12 < 0 \end{cases}$ . Поскольку эти неравенства должны выполняться при всех

значениях  $x$ , то свернем до полного квадрата

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - 1 + a > 0 \\ x^2 + 2x + 1 - a + 11 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)^2 + a - 1 > 0 \\ (x+1)^2 - a + 11 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a - 1 > 0 \\ 11 - a > 0 \end{cases}$$

Откуда  $1 < a < 11$

Ответ:  $1 < a < 11$

Задача 2. Найдите все натуральные числа  $n$ , для которых выполняется равенство  $n^3 - n = n!$

Решение: перепишем исходное уравнение в виде

$$n(n-1)(n+1) = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots \cdot 2 \cdot 1$$

Так как  $n=1$  не является решением этого уравнения, то поделим обе части на  $n(n-1)$ .

$$(n+1) = (n-2)(n-3)\dots \cdot 2 \cdot 1$$

Подставляя последовательно числа от  $n=2$ , находим, что решением является  $n=5$ .

Покажем, что для  $n > 5$  решений нет.

Заметим, что для всех  $n > 5$  выполняется неравенство  $(n+1) < 2n - 4 = 2(n-2)$ .

$$\text{С другой стороны } (n+1) = (n-2)(n-3)\dots \cdot 2 \cdot 1 > 2(n-2)$$

Получили противоречие, значит других решений при  $n > 5$  нет.

Ответ:  $n=5$

**Задача 3.** Найдите все целые числа  $a$  и  $b$ , такие, что корни уравнения  $x^2 + (2a+9)x + 3b+5 = 0$  являются различными целыми числами, а коэффициенты  $2a+9$  и  $3b+5$  - простыми числами.

*Решение:*

Обозначим корни уравнения за  $x_1$  и  $x_2$ . По теореме Виета  $x_1 \cdot x_2 = 3b+5$  - простое число, тогда один из корней должен быть равен  $(\pm 1)$ . Пусть  $x_1 = (\pm 1)$ , тогда  $x_2 = \pm(3b+5)$ . По теореме Виета сумма корней  $x_1 + x_2 = \pm(3b+6) = \pm 3(b+2) = 2a+9$ . Так как по условию  $2a+9$  - простое число, то  $2a+9=3$  и  $b+2=1$ , откуда  $a=-3$ ;  $b=-1$ .

*Ответ:*  $a=-3$ ;  $b=-1$

**Задача 4.** Найдите максимальное натуральное число  $n$ , при котором число  $13n^2 + 14n + 13$  делится на  $n-15$  без остатка.

*Решение:* преобразуем выражение  $13n^2 + 14n + 13 = 13n + 209 + \frac{3148}{n-15}$ . Тогда

$$n-15 = 3148; \quad n = 3163$$

*Ответ:*  $n = 3163$

*Домашнее задание.*

1. Найдите все пары  $(x; y)$  целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166 \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271 \end{cases}$$

2. Решить в целых числах уравнение  $3^n + 8 = x^2$ .

3. Решить в целых числах уравнение  $12 \cdot n! + 11^n + 2 = k^2$ .

*Решение задач домашнего задания:*

3. Решить в целых числах уравнение  $12 \cdot n! + 11^n + 2 = k^2$ .

При  $n \geq 5$  факториал  $n!$  оканчивается на 0, а любая степень числа 11 оканчивается на 1. Таким образом, получим, что левая часть исходного уравнения оканчивается на 3, а это невозможно, так как в правой его части стоит квадрат целого числа.

Рассмотрим случай  $n < 5$ :

при  $n=1$  левая часть исходного уравнения равна 25, при  $n=2$  равна 147,

при  $n=3$  равна 1405; при  $n=4$  равна 14931.

Отсюда следует, что  $n=1, k=\pm 5$

2. Решить в целых числах уравнение  $3^n + 8 = x^2$ .

Подберем решение  $n=0$ ;  $x=\pm 3$  и докажем, что других решений нет.

Перепишем исходное уравнение в виде  $x^2 = 3^n + 6 + 2 = 3q + 2$ . Докажем, что квадрат целого числа не может равняться числу  $3q + 2$ .

Всякое целое число можно с учетом делимости на 3 записать в виде  $k = 3t + r$ ,  $r = 0, 1, 2$ ,

тогда  $k^2 = (3t + r)^2 = 9t^2 + 6t + r^2$ . Числа  $k^2$  и  $r^2$  дают один и тот же остаток. Поскольку

$r^2 = 0, 1, 4$ , остатки при делении числа  $k^2$  на 3 будут равны 0 или 1. Следовательно,

$k^2 = 3t$  или  $k^2 = 3t + 1$ , и

квадрат целого числа не может равняться  $3q + 2$ .

Таким образом,  $x=3$ ;  $n=0$  или  $x=-3$ ;  $n=0$

**Пример П1.17.** (ЕГЭ, 2010) Найти все пары  $(x; y)$  целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166; \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$$

Выделив полные квадраты, получим систему неравенств

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y+10)^2 < 15; \\ (x-16)^2 + (y+6)^2 < 21, \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

Из первого неравенства этой системы следует, что  $(x-9)^2 < 15$ .

Поэтому значения  $x$ , удовлетворяющие последнему неравенству, могут быть равны 8, 9, 10, 11, 7, 6, 12, т. е.  $6 \leq x \leq 12$ . Аналогично

из второго неравенства системы найдем  $(x-16)^2 < 21$  ( $x=15, 16, 17, 18, 14, 13, 19, 12, 20$ ), т. е.  $12 \leq x \leq 20$ , откуда  $x=12$ . Подставив значение  $x=12$  в систему неравенств, получим

$$\begin{cases} (y+10)^2 < 6; \\ (y+6)^2 < 5, \end{cases} \quad y \in \mathbb{Z}.$$

Из первого неравенства полученной системы следует, что значение  $y$ , удовлетворяющее этому неравенству, может быть равно  $-7$  и  $-8$ . Из второго неравенства системы определим возможные значения  $y$ , равные  $-5, -8$ , откуда  $y=-8$ .

Таким образом,  $x=12, y=-8$ .