

Неравенство Иенсена.

Критерием выпуклости для дважды дифференцируемой функции является не отрицательность ее второй производной.

Пусть f - выпуклая функция, тогда

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n), \text{ где } x_1, x_2, \dots, x_n$$

- числа из области определения функции f ,

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - положительные числа, сумма которых равна 1.

Часто используемая запись неравенства для выпуклой функции f :

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq n \cdot f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

Критерием вогнутости для дважды дифференцируемой функции является не положительность ее второй производной.

Неравенство Иенсена для вогнутой функции f

выглядит так:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n - числа из области определения функции f , $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - положительные числа, сумма которых равна 1.

Часто используемая запись неравенства для вогнутой функции f :

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq n \cdot f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

Сумма положительных чисел a, b, c в семь раз меньше их произведения. Найдите наименьшее значение выражения $ab + bc + ac$.

Пусть числа $a, b \geq \frac{1}{2}$. Доказать, что

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \frac{a^4 + a + b^4 + b}{2}$$

Пусть a, b, c - стороны треугольника. Доказать, что

$$\left(1 + \frac{b-c}{a}\right)^a \left(1 + \frac{c-a}{b}\right)^b \left(1 + \frac{a-b}{c}\right)^c \leq 1$$

Вспомогательный многочлен.

Для решения задачи бывает полезно построить многочлен, корнями которого являются данные, известные, числа.

Вещественные числа $a < b < c$ таковы, что $a + b + c = 2$, $ab + bc + ca = 1$. Доказать, что

$$1 < c < \frac{4}{3}.$$

Геометрические интерпретации.

Иногда бывает полезно при решении неравенства использовать геометрические интерпретации. Наиболее часто используемые формулы для геометрической интерпретации – это расстояние между точками и расстояние от точки до прямой.

Напомним, что расстояние между точками в трехмерном пространстве вычисляется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

Докажите, что если $|a + b + c| = 1$, то $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$

Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $(a-d)^2 + (b+p)^2 + (c-q)^2$ если числа

a, b, c, d, p, q таковы, что

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 9 \\ d^2 + p^2 + q^2 = 16 \end{cases}$$

<p>Сфера с центром $D(a, b, c)$ и радиусом $R \geq 0$ задается уравнением</p> $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ <p>Уравнение плоскости α имеет вид</p> $Ax + By + Cz + D = 0, \text{ где } \vec{n}(A; B; C) - \text{вектор нормали к плоскости } \alpha.$ <p>Расстояние от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости α вычисляется по формуле</p> $ A; \alpha = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$ <p>Так же полезно использовать векторы. Наиболее часто используется неравенство</p> $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq \vec{a} \cdot \vec{b} , \text{ которое справедливо в}$ <p>декартовой системе координат любой размерности. Помимо этого, используется тот факт, что модуль суммы n векторов не превосходит суммы их модулей, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда вектора сонаправлены.</p> <p>Напомним, что для треугольника выполняется неравенство треугольника: Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.</p>	<p>Пусть x, y, z, t - неотрицательные числа, такие что $x + y + z + t = 5$. Докажите, что</p> $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{z^2 + y^2} + \sqrt{z^2 + t^2} + \sqrt{t^2 + 9} \geq 10$
---	--

Задачи для самостоятельного решения.

- (Вспомогательный многочлен) Положительные числа a, b, c таковы, что $abc > 1$, $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Доказать, что ровно одно из этих чисел a, b, c меньше единицы.
- (Геометрические интерпретации) Для углов α, β, γ справедливо неравенство $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq 2$. Докажите, что $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{5}$.
- (Геометрические интерпретации) Известно, что $a^2 + b^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 1$. Докажите, что $ac + bd \leq 1$.
- (Разбейте множители на пары и оцените каждую пару) Про пять положительных чисел известно, что если из суммы любых трех из них вычесть сумму двух оставшихся, то разность будет положительной. Доказать, что произведение всех десяти таких разностей не превосходит квадрата произведения данных пяти чисел.
- (Неравенства между средними) Найдите наибольшее значение объема треугольной пирамиды, у которой противоположные ребра равны, а сумма длин всех сторон $36\sqrt{2}$.
Указание: Если провести через каждое ребро пирамиды плоскость, параллельную противоположному ребру, то получится три пары плоскостей, при пересечении которых образуется параллелепипед, называемый описанным. Так как противоположные ребра равны, то в каждой грани диагонали равны между собой, т.е. грани – прямоугольники, а значит этот параллелепипед прямоугольный. Объем пирамиды составляет третью часть объема этого параллелепипеда. Пусть ребра описанного параллелепипеда a, b, c .