

(с прошлого занятия) **Неравенство Иенсена.**

Среди известных классических неравенств особое место занимает неравенство, которое принято называть Иенсена, оно было получено О.Гельдером в 1889 г, а датский математик Иоганн Людовиг Иенсен доказал его интегральный аналог в 1906 г.

Сначала дадим одно важное определение. Функция  $f$ , заданная на некотором промежутке вещественной оси, называется выпуклой, если для любых чисел  $x_1, x_2$  из этого

промежутка и любого числа  $\alpha \in [0;1]$  выполняется неравенство

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

Графически это означает, что всякая хорда, соединяющая две точки на графике, лежит выше соответствующей части графика.

Для применения неравенства Иенсена необходимо определить, является ли функция выпуклой. Мы это умеем делать с помощью второй производной: если функция дважды дифференцируема, и вторая производная этой функции неотрицательна, то функция – выпукла (выпукла вниз).

Итак, сформулируем неравенство Иенсена.

Пусть  $f$  - выпуклая функция, тогда

$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$ , где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - числа из области определения функции  $f$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  - положительные числа, сумма которых равна 1.

Часто используемая запись неравенства для выпуклой функции  $f$ :

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq n \cdot f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

Если в определении выпуклой функции знак неравенства изменить на противоположный, то соответствующая функция называется вогнутой (вогнутой вверх). Ясно, что функция  $f$  вогнута тогда и только тогда, когда функция  $(-f)$  выпукла. Критерием вогнутости для дважды дифференцируемой функции является не положительность ее второй производной. Неравенство Иенсена для вогнутой функции  $f$  выглядит так:

$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$  где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - числа из области определения функции  $f$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  - положительные числа, сумма которых равна 1.

Часто используемая запись неравенства для вогнутой функции  $f$ :

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq n \cdot f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

Покажем теперь, как из неравенства Иенсена можно получить неравенство между средними степенными:

Пусть  $M_t$  - среднее степенное порядка  $t$  для  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ :

$$M_t = \begin{cases} \left( \frac{a_1^t + a_2^t + \dots + a_n^t}{n} \right)^{\frac{1}{t}}, & t \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}, & t = 0 \end{cases}$$

Тогда  $M_{t_1} \leq M_{t_2}$  при  $0 < t_1 < t_2$

Используя обозначения  $b_i = a_i^{t_1}$ ,  $t = \frac{t_1}{t_2} > 1$ , запишем неравенство  $M_{t_1} \leq M_{t_2}$  в виде:

$$\left( \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n} \right)^t \leq \frac{\sum_{i=1}^n b_i^t}{n}, \text{ а это неравенство Йенсена для выпуклой функции}$$

$$f(x) = x^t, (x > 0), \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}.$$

В частности, тем самым доказаны и классические неравенства между средними:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \leq \left( \prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \leq \left( \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}, (a_1, a_2, \dots, a_n > 0)$$

*Пример.* Сумма положительных чисел  $a, b, c$  в семь раз меньше их произведения. Найдите наименьшее значение выражения  $ab + bc + ac$ .

*Решение:*

По условию  $a + b + c = \frac{1}{7} abc$ . Разделим на  $abc$ :  $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{7}$ .

Пусть  $x = \frac{1}{bc}$ ,  $y = \frac{1}{ac}$ ,  $z = \frac{1}{ab}$ , тогда  $x + y + z = \frac{1}{7}$ . Надо найти значение выражения

$ab + bc + ac = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ . Рассмотрим функцию  $f(t) = \frac{1}{t}$ , для  $t > 0$  она вогнута, тогда

запишем неравенство Йенсена для вогнутой функции:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = f(x) + f(y) + f(z) \leq 3 \cdot f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{\frac{x+y+z}{3}} = 3 \cdot \frac{3}{\frac{1}{7}} = 63.$$

*Ответ:* 63

*Пример.*

Пусть числа  $a, b \geq \frac{1}{2}$ . Доказать, что  $\left( \frac{a^2 + b^2}{2} \right)^2 + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \frac{a^4 + a + b^4 + b}{2}$

*Решение:*

Рассмотрим выпуклую функцию  $f$ , заданную на промежутке  $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$  по правилу

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad f''(x) = 2 - \frac{1}{4\sqrt{x^3}} = \frac{8\sqrt{x^3} - 1}{4\sqrt{x^3}} \geq 0$$

Знаменатель положительный, а числитель неотрицательный, так как  $\sqrt{x^3}$  возрастает как композиция двух возрастающих, и наименьшее значение принимает при  $x = \frac{1}{4}$

$$\frac{f(a^2) + f(b^2)}{2} = \frac{a^4 + a + b^4 + b}{2};$$

$$f\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right) = \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Тогда по неравенству Иенсена 
$$\frac{f(a^2) + f(b^2)}{2} \geq f\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)$$

*Пример.*

Пусть  $a, b, c$  - стороны треугольника. Доказать, что  $\left(1 + \frac{b-c}{a}\right)^a \left(1 + \frac{c-a}{b}\right)^b \left(1 + \frac{a-b}{c}\right)^c \leq 1$

*Решение:*

Функция  $f(x) = \ln x$ ,  $x > 0$  вогнутая, поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{a}{a+b+c} \ln \frac{a+b-c}{a} + \frac{b}{a+b+c} \ln \frac{b+c-a}{b} + \frac{c}{a+b+c} \ln \frac{c+a-b}{c} \leq \\ & \leq \ln \frac{1}{a+b+c} (a+b-c + b+c-a + c+a-b) = 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует искомое неравенство.

$$\frac{1}{a+b+c} \left( \ln \left( \frac{a+b-c}{a} \right)^a + \ln \left( \frac{b+c-a}{b} \right)^b + \ln \left( \frac{c+a-b}{c} \right)^c \right) \leq 0$$

$$\ln \left( \frac{a+b-c}{a} \right)^a + \ln \left( \frac{b+c-a}{b} \right)^b + \ln \left( \frac{c+a-b}{c} \right)^c \leq 0$$

$$\ln \left( \left( \frac{a+b-c}{a} \right)^a \left( \frac{b+c-a}{b} \right)^b \left( \frac{c+a-b}{c} \right)^c \right) \leq \ln 1$$

$$\left( 1 + \frac{b-c}{a} \right)^a \left( 1 + \frac{c-a}{b} \right)^b \left( 1 + \frac{a-b}{c} \right)^c \leq 1$$

### Вспомогательный многочлен.

Для решения задачи бывает полезно построить многочлен, корнями которого являются данные, известные, числа.

*Пример.* Вещественные числа  $a < b < c$  таковы, что  $a + b + c = 2$ ,  $ab + bc + ca = 1$ .

Доказать, что  $1 < c < \frac{4}{3}$ .

*Решение:*

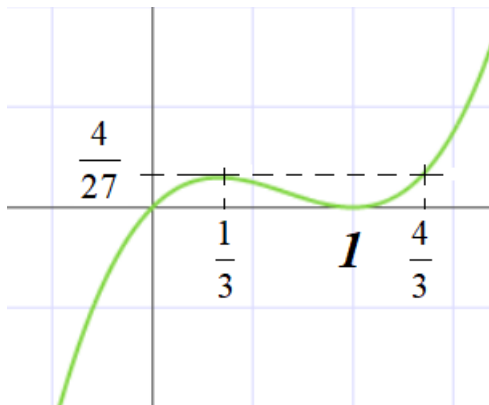
Рассмотрим многочлен с корнями  $a, b, c$ :

$$\begin{aligned} P(t) &= (t-a)(t-b)(t-c) = \\ &= t^3 - t^2(a+b+c) + t(ab+bc+ca) - abc = \\ &= t^3 - 2t^2 + t - A \end{aligned}$$

где  $A = abc$ .

Поэтому числа  $a, b, c$  являются корнями уравнения  $t^3 - 2t^2 + t = A$ . Интерпретируем графически корни уравнения как точки пересечения графиков функций в левой и правой части уравнения.

Построим график функции  $f(t) = t^3 - 2t^2 + t$



По графику понятно, что уравнение имеет три различных корня только при  $0 < A < \frac{4}{27}$ , и при этом максимальный корень (наибольшая абсцисса точки пересечения графика функции  $f(t)$  с прямой  $y = A$ ) попадает в промежуток  $\left(1; \frac{4}{3}\right)$

### Геометрические интерпретации.

Иногда бывает полезно при решении неравенства использовать геометрические интерпретации. Наиболее часто используемые формулы для геометрической интерпретации – это расстояние между точками и расстояние от точки до прямой.

Напомним, что расстояние между точками в трехмерном пространстве вычисляется по формуле  $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$ .

Сфера с центром  $D(a, b, c)$  и радиусом  $R \geq 0$  задается уравнением

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Уравнение плоскости  $\alpha$  имеет вид  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $\vec{n}(A; B; C)$  - вектор нормали к плоскости  $\alpha$ .

Расстояние от точки  $M(x_0; y_0; z_0)$  до плоскости  $\alpha$  вычисляется по формуле

$$|A; \alpha| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Так же полезно использовать векторы. Наиболее часто используется неравенство

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|,$$

которое справедливо в декартовой системе координат любой размерности. Помимо этого, используется тот факт, что модуль суммы  $n$  векторов не превосходит суммы их модулей, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда вектора сонаправлены.

Напомним, что для треугольника выполняется неравенство треугольника: Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

*Пример.* Докажите, что если  $|a + b + c| = 1$ , то  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$

*Решение:*

Рассмотрим два способа решения одной задачи.

Первый способ. Заменим данные переменные на  $x, y, z$ . Заметим, что уравнение  $x + y + z = \pm 1$  задает в трехмерной декартовой системе координат две плоскости, симметричные относительно начала координат, т.е. расстояние от начала координат до этих плоскостей равны. Найдем, например, расстояние от начала координат до плоскости, заданной уравнением  $x + y + z = 1$ :

$$d = |O; \alpha| = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Расстояние от начала координат  $O(0; 0; 0)$  до любой точки  $M(x; y; z)$ , принадлежащей рассматриваемым плоскостям, не меньше  $d$ , тогда

$$OM = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ т.е. } x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$$

Второй способ. Рассмотрим векторы  $\vec{x}(a; b; c)$  и  $\vec{y}(1; 1; 1)$  в декартовой системе координат.

Заметим, что  $|\vec{x}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  и  $|\vec{y}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ . Рассмотрим скалярное произведение

$$\text{этих векторов } |\vec{x} \cdot \vec{y}| = |a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1| = |a + b + c| = 1 \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{3}.$$

Следовательно,  $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  и  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ .

*Пример.* Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения

$$(a-d)^2 + (b+p)^2 + (c-q)^2 \text{ если числа } a, b, c, d, p, q \text{ таковы, что } \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 9 \\ d^2 + p^2 + q^2 = 16 \end{cases}$$

*Решение:* Вспомним формулу расстояния между точками в координатах. Пусть даны точки  $A(a, b, c)$  и  $B(d, -p, q)$ . Тогда данное выражение  $(a-d)^2 + (b+p)^2 + (c-q)^2$  задает квадрат расстояния между точками  $AB$ , первая из которых лежит на сфере с центром в начале координат и радиусом 3, вторая на сфере с центром в начале координат и радиусом 4. Наибольшее расстояние между точками этих сфер равно сумме радиусов, т.е. 7, а наименьшее расстояние равно разности радиусов, т.е. 1. Тогда расстояния в квадрате – это 1 и 49. Значение 49 достигается, например, при  $a = c = d = q = 0, b = 3, p = 4$ . Значение 1 достигается, например, при  $a = c = d = q = 0, b = 3, p = -4$ .

*Ответ:* 1 и 49

*Пример.* Пусть  $x, y, z, t$  - неотрицательные числа, такие что  $x + y + z + t = 5$ . Докажите, что  $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{z^2 + y^2} + \sqrt{z^2 + t^2} + \sqrt{t^2 + 9} \geq 10$

*Решение:*

Рассмотрим на плоскости следующие точки:

$$A(0;0); \quad B(x;1); \quad C(x+y;1+x); \quad D(x+y+z;1+x+y)$$

$$E(x+y+z+t;1+x+y+z); \quad F(x+y+z+t+3;1+x+y+z+t)$$

$$AB = \sqrt{x^2 + 1}; \quad BC = \sqrt{(x-x-y)^2 + (1-1-x)^2} = \sqrt{y^2 + x^2};$$

$$CD = \sqrt{(x+y-x-y-z)^2 + (1+x-1-x-y)^2} = \sqrt{z^2 + y^2};$$

$$DE = \sqrt{(x+y+z-x-y-z-t)^2 + (1+x+y-1-x-y-z)^2} = \sqrt{z^2 + t^2}$$

$$EF = \sqrt{(x+y+z+t-x-y-z-t-3)^2 + (1+x+y+z-1-x-y-z+t)^2} = \sqrt{3^2 + t^2}$$

Тогда длина ломанной  $ABCDEF$  совпадает с выражением, которое требуется оценить.

По неравенству треугольника длина ломанной  $ABCDEF$  не меньше длины отрезка  $AF$ .

С учетом условия  $x + y + z + t = 5$  получаем координаты точки  $F(8;6)$ , а длина отрезка

$$AF = \sqrt{(8-0)^2 + (6-0)^2} = 10.$$

Равенство достигается, когда все точки лежат на одной прямой  $(AF): y = \frac{3}{4}x$ ? (если получится подобрать такие  $x + y + z + t = 5$ ).

$x, y, z, t$  - неотрицательные числа. Пусть  $x = 0, y = 0, z = 0, t = 4$ , тогда

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{z^2 + y^2} + \sqrt{z^2 + t^2} + \sqrt{t^2 + 9} \geq 10$$

$$0 + 1 + 0 + 4 + 5 = 10$$

### Задачи для самостоятельного решения.

1. Положительные числа  $a, b, c$  таковы, что  $abc > 1$ ,  $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ . Доказать, что ровно одно из этих чисел  $a, b, c$  меньше единицы.
2. Для углов  $\alpha, \beta, \gamma$  справедливо неравенство  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq 2$ . Докажите, что  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{5}$ .
3. Известно, что  $a^2 + b^2 = 1$  и  $c^2 + d^2 = 1$ . Докажите, что  $ac + bd \leq 1$ .
4. Про пять положительных чисел известно, что если из суммы любых трех из них вычесть сумму двух оставшихся, то разность будет положительной. Доказать, что произведение всех десяти таких разностей не превосходит квадрата произведения данных пяти чисел.
5. Найдите наибольшее значение объема треугольной пирамиды, у которой противоположные ребра равны, а сумма длин всех сторон  $36\sqrt{2}$ .

### Решение задач.

#### Задача 1.

Положительные числа  $a, b, c$  таковы, что  $abc > 1$ ,  $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ . Доказать, что ровно одно из этих чисел  $a, b, c$  меньше единицы.

Решение:

Рассмотрим многочлен с корнями  $a, b, c$ :

$$\begin{aligned} P(t) &= (t-a)(t-b)(t-c) = \\ &= t^3 - t^2(a+b+c) + t(ab+bc+ca) - abc = \\ &= t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma \end{aligned}$$

где  $\alpha = a + b + c$ ,  $\beta = ab + bc + ca$ ,  $\gamma = abc$

По условию  $\gamma > 1$ ;  $\beta > \alpha$ .

Для доказательства утверждения, что ровно один корень многочлена меньше единицы, достаточно доказать, что значение многочлена  $P(1) > 0$ . Действительно, из условия

$P(1) = (1-a)(1-b)(1-c) > 0$  следует, что либо все три числа меньше единицы, либо ровно одно. Но так как  $abc > 1$ , то первый случай невозможен.

Итак, докажем, что  $P(1) > 0$ .

Отметим, что  $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ , что по условию больше  $\alpha = a + b + c$ , тогда

$\frac{\beta}{\gamma} > \alpha$  и  $\beta > \alpha\gamma$ , тогда

$$P(t) = (t-a)(t-b)(t-c) = t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma$$

$$P(1) = (1-a)(1-b)(1-c) = 1 - \alpha + \beta - \gamma > 1 - \alpha + \alpha\gamma - \gamma = (1-\alpha)(1-\gamma)$$

По условию  $\gamma = abc > 1$ , остается отметить, что  $\alpha > 1$ .

Действительно, если сумма трех положительных чисел  $\alpha = a + b + c$  меньше единицы, то каждое из слагаемых меньше единицы, значит их произведение меньше единицы (противоречие).

*Задача 2.*

Для углов  $\alpha, \beta, \gamma$  справедливо неравенство  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq 2$ . Докажите, что  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{5}$ .

*Решение:*

Рассмотрим три вектора  $\vec{a}(\cos \alpha; \sin \alpha)$ ;  $\vec{b}(\cos \beta; \sin \beta)$ ;  $\vec{c}(\cos \gamma; \sin \gamma)$ .

Отметим, что длины этих векторов равны по 1.

Тогда

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2} \geq \sqrt{(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 + 4}$$

С другой стороны  $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| = 3$ .

Тогда

$$\sqrt{(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 + 4} \leq 3$$

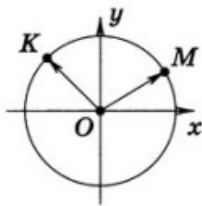
$$(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 \leq 9 - 4 = 5$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{5}$$

Что и требовалось доказать.

*Задача 3.*

Известно, что  $a^2 + b^2 = 1$  и  $c^2 + d^2 = 1$ . Докажите, что  $ac + bd \leq 1$ .



*Решение:*

Рассмотрим окружность с центром в  $O(0;0)$  и радиусом 1. Уравнение этой окружности  $x^2 + y^2 = 1$ . Рассмотрим точки  $M(a;b)$  и  $K(c;d)$ . Их координаты удовлетворяют уравнению окружности, значит они лежат на окружности. Рассмотрим вектора  $\vec{OM}(a;b)$  и  $\vec{OK}(c;d)$ . Они оба единичные.

Рассмотрим скалярное произведение этих векторов  $\vec{OM} \cdot \vec{OK} = ac + bd$ . Отметим, что  $\vec{OM} \cdot \vec{OK} \leq |\vec{OM}| \cdot |\vec{OK}| = 1$ , тогда  $ac + bd \leq 1$



#### Задача 4.

Про пять положительных чисел известно, что если из суммы любых трех из них вычесть сумму двух оставшихся, то разность будет положительной. Доказать, что произведение всех десяти таких разностей не превосходит квадрата произведения данных пяти чисел.

*Решение:*

Пусть  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  – данные числа. Тогда разобьем произведение десяти таких разностей на пары и воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5)(-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5) = \\ = a_2^2 - (a_1 + a_3 - a_4 - a_5)^2 \leq a_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5)(-a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = \\ = a_4^2 - (a_1 + a_2 - a_3 - a_5)^2 \leq a_4^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5)(a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5) = \\ = a_1^2 - (a_2 - a_3 - a_4 + a_5)^2 \leq a_1^2 \end{aligned}$$

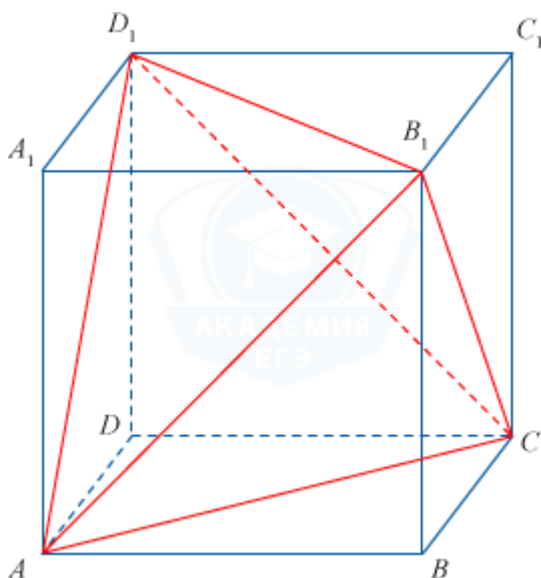
$$\begin{aligned} (-a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5)(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5) = \\ = a_3^2 - (a_1 - a_2 - a_4 + a_5)^2 \leq a_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5)(a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5) = \\ = a_5^2 - (a_1 - a_2 - a_3 + a_4)^2 \leq a_5^2 \end{aligned}$$

Перемножив эти неравенства, получим требуемое.

**Задача 5.** Найдите наибольшее значение объема треугольной пирамиды, у которой противоположные ребра равны, а сумма длин всех сторон  $36\sqrt{2}$ .

*Решение:*



Если провести через каждое ребро пирамиды плоскость, параллельную противоположному ребру, то получится три пары плоскостей, при пересечении которых образуется параллелепипед, называемый описанным. Так как противоположные ребра равны, то в каждой грани диагонали равны между собой, т.е. грани – прямоугольники, а значит этот параллелепипед прямоугольный.

Пусть ребра описанного параллелепипеда  $a, b, c$ , тогда его объем равен  $V = a \cdot b \cdot c$ . Объем пирамиды составляет третью часть объема этого параллелепипеда, т.е.  $V_{\text{пирамиды}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{3}$ .

Так как  $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ ,  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  и  $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$  (по неравенству о средних, равенство достигается при  $x = y = z$ ), то сделать оценку для суммы длин сторон пирамиды.

$$\begin{aligned} 18\sqrt{2} &= \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2ab} + \sqrt{2bc} + \sqrt{2ca} \geq \\ &\geq \sqrt{2} \cdot 3\sqrt[3]{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ca}} = \sqrt{2} \cdot 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3V_{\text{пирамиды}}} \end{aligned}$$

Тогда

$$\sqrt[3]{3V_{\text{пирамиды}}} \leq \frac{18\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$

$$V_{\text{пирамиды}} \leq \frac{6^3}{3} = 72$$

Равенство возникает при  $a = b = c$