

Домашнее задание.

1. (Геометрические интерпретации) Известно, что $x + 2y + 3z = 1$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $x^2 + y^2 + z^2$?
2. (Геометрические интерпретации) Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $(a - c)^2 + (b - d)^2$, если $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 4$.
3. (Тригонометрическая подстановка). Доказать, что из любых семи различных вещественных чисел можно выбрать два числа x, y , такие, что $0 < \frac{x - y}{1 + xy} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

Решение домашнего задания.

Задача 1. Известно, что $x + 2y + 3z = 1$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $x^2 + y^2 + z^2$?

Решение:

В декартовой системе координат уравнение $x + 2y + 3z = 1$ задает плоскость α .

Выражение $x^2 + y^2 + z^2$ равно квадрату расстояния от начала координат до точки $M(x; y; z)$. Расстояние от начала координат до точки $M(x; y; z)$, лежащей в плоскости α , не превосходит расстояния от начала координат до плоскости α , т.е. наименьшее расстояние достигается, когда точка $M(x; y; z)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость α . Расстояние от начала координат до плоскости найдем по формуле: $d = |O; \alpha| = \frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$, тогда

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2 = \frac{1}{14}.$$

Отметим, проводя аналогии, что радиус сферы с центром в начале координат, которая касается заданной плоскости, равен $\frac{1}{\sqrt{14}}$.

Задача 2. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $(a - c)^2 + (b - d)^2$, если $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 4$.

Решение:

Рассмотрим две окружности с центром в начале координат и радиусами 1 и 2 соответственно.

Рассмотрим точку $M(a; b)$ и $N(c; d)$. По условию точка $M(a; b)$ принадлежит первой окружности, а точка $N(c; d)$ принадлежит второй окружности. Так как

$(a-c)^2 + (b-d)^2 = MN^2$, то задача сводится к тому, чтобы найти наибольшее и наименьшее расстояние между точками окружностей.

По неравенству треугольника

$$MN \leq MO + ON = 1 + 2 = 3$$

$$MN \geq NO - OM = 2 - 1 = 1$$

Причем равенства достигаются в случаях, когда точки O, M, N лежат на одной прямой, т.е. треугольник вырожденный. Например, $a = 1, b = 0, c = 2, d = 0$ значение выражения равно 1, а при $a = 1, b = 0, c = -2, d = 0$ получаем $MN^2 = 9$.

Т.О. наибольшее значение 9, наименьшее значение 1.

Задача 3. Доказать, что из любых семи различных вещественных чисел можно выбрать

два числа x, y , такие, что $0 < \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

Решение:

Обозначим данные числа $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$. Для любого числа a найдется число

$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, такое, что $a = \operatorname{tg} \alpha$. Пусть

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, a_2 = \operatorname{tg} \alpha_2, a_3 = \operatorname{tg} \alpha_3, a_4 = \operatorname{tg} \alpha_4, a_5 = \operatorname{tg} \alpha_5, a_6 = \operatorname{tg} \alpha_6, a_7 = \operatorname{tg} \alpha_7$$

Среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ найдутся два, разность между

которыми меньше, чем $\frac{\pi}{6}$. Пусть это числа α и β , причем $\alpha > \beta$.

$$\text{Тогда } 0 < \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Значит, числа $x = \operatorname{tg} \alpha; y = \operatorname{tg} \beta$ – искомые.