

Домашнее задание:

1. Пусть $a, b, c > 0$. Доказать, что $\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$.
2. Пусть α, β, γ - углы остроугольного треугольника. Доказать, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4}$.
3. Пусть a, b, c - стороны треугольника. Доказать, что $\left(1 + \frac{b-c}{a}\right)^a \left(1 + \frac{c-a}{b}\right)^b \left(1 + \frac{a-b}{c}\right)^c \leq 1$

Решение задач домашнего задания:

1. Пусть $a, b, c > 0$. Доказать, что $\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} &= \frac{1}{\frac{a+b}{2}} + \frac{1}{\frac{b+c}{2}} + \frac{1}{\frac{c+a}{2}} \geq \frac{3^2}{\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}} = \\ &= \frac{3^2}{\frac{2(a+b+c)}{2}} = \frac{9}{a+b+c} \end{aligned}$$

(неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим)

2. Пусть α, β, γ - углы остроугольного треугольника. Доказать, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4}.$$

Решение:

Так как треугольник остроугольный, то $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Можно сделать следующую замену переменных: $x = \pi - 2\alpha$; $y = \pi - 2\beta$; $z = \pi - 2\gamma$. Заметим, что $x + y + z = \pi$ и $x, y, z \in (0; \pi)$, т.е. x, y, z - это углы треугольника. Тогда $\alpha = \frac{\pi - x}{2}$; $\beta = \frac{\pi - y}{2}$; $\gamma = \frac{\pi - z}{2}$.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \cos^2 \left(\frac{\pi - x}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi - y}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi - z}{2} \right) =$$

По формуле косинуса двойного угла:

$$\cos(\pi - x) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi - x}{2} \right) - 1$$

$$= \frac{1}{2} (3 + \cos(\pi - x) + \cos(\pi - y) + \cos(\pi - z)) =$$

Косинусы смежных углов отличаются знаком

$$= \frac{1}{2} \left(3 - (\cos(x) + \cos(y) + \cos(z)) \right) \geq \frac{1}{2} \left(3 - \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

3. Пусть a, b, c - стороны треугольника. Доказать, что $\left(1 + \frac{b-c}{a}\right)^a \left(1 + \frac{c-a}{b}\right)^b \left(1 + \frac{a-b}{c}\right)^c \leq 1$

Решение:

Функция $f(x) = \ln x$, $x > 0$ вогнутая, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+b+c} \ln \frac{a+b-c}{a} + \frac{b}{a+b+c} \ln \frac{b+c-a}{b} + \frac{c}{a+b+c} \ln \frac{c+a-b}{c} &\leq \\ \leq \ln \frac{1}{a+b+c} (a+b-c+b+c-a+c+a-b) &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует искомое неравенство.

$$\frac{1}{a+b+c} \left(\ln \left(\frac{a+b-c}{a} \right)^a + \ln \left(\frac{b+c-a}{b} \right)^b + \ln \left(\frac{c+a-b}{c} \right)^c \right) \leq 0$$

$$\ln \left(\frac{a+b-c}{a} \right)^a + \ln \left(\frac{b+c-a}{b} \right)^b + \ln \left(\frac{c+a-b}{c} \right)^c \leq 0$$

$$\ln \left(\left(\frac{a+b-c}{a} \right)^a \left(\frac{b+c-a}{b} \right)^b \left(\frac{c+a-b}{c} \right)^c \right) \leq \ln 1$$

$$\left(1 + \frac{b-c}{a} \right)^a \left(1 + \frac{c-a}{b} \right)^b \left(1 + \frac{a-b}{c} \right)^c \leq 1$$