

Зачётная работа.

1. При каких значениях параметра a прямая $y = ax - a - 1$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Найдите координаты такой общей точки.
2. Найдите все пары целых чисел $(m; n)$, удовлетворяющих уравнению $m = \frac{n+1}{n-1}$.
3. Вершины некоторого выпуклого четырехугольника $ABCD$ имеют целочисленные координаты и принадлежат графику функции $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность и напишите уравнение этой окружности.
4. Найдите при каком значении x выражение $\frac{1 + \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 1}$ принимает наибольшее значение.
5. Пусть a, b – положительные числа. Найдите наибольшее значение выражения $\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}$.
6. Решите неравенство $\sqrt[7]{\frac{x+1}{x-1}} + 1 + \sqrt[7]{\frac{x+1}{2}} - 1 + \frac{(x+1)^2}{2(x-1)} \geq 0$

Задание 1.

Прямая $y = ax - a - 1$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции $y = \frac{x+1}{x-1}$. Найдите координаты общей точки.

Решение:

Уравнение прямой $y = a(x-1) - 1$ задает пучок прямых, проходящих через точку $(1; -1)$, так как не зависимо от значения параметра a , если $x = 1$, то $y = -1$.

Тот факт, что прямая имеет с гиперболой одну общую точку, означает, что уравнение $\frac{x+1}{x-1} = a(x-1) - 1$ имеет единственное решение. Данное уравнение сведется к квадратному.

$$1 + \frac{2}{x-1} = a(x-1) - 1$$

$$t = x - 1$$

$$1 + \frac{2}{t} = at - 1$$

$$at^2 - 2t - 2 = 0$$

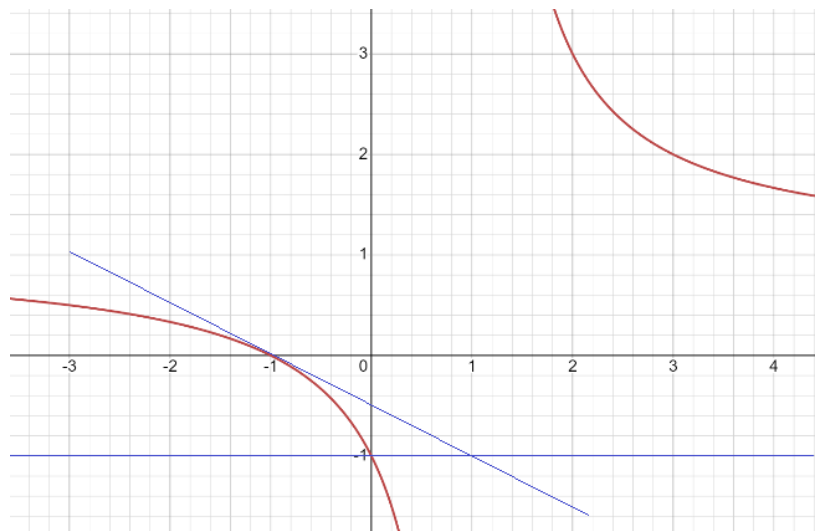
Уравнение может иметь единственное решение в двух случаях, когда оно линейное, т.е. $a = 0$, и когда дискриминант равен нулю, т.е.

$$D = 4 + 8a = 0; \quad a = -\frac{1}{2}.$$

Такой результат можно было предвидеть из наглядных соображений. Первая прямая – горизонтальная $y = -1$, вторая – касательная к гиперболе. Прямая $y = -1$ с гиперболой пересекается в точке $(0; -1)$. Найдем точку касания, для этого приравняем

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{ и } y = \frac{x+1}{x-1}, \text{ получим точку } (-1; 0).$$

Ответ: $a = -\frac{1}{2}; (-1; 0)$.



Задание 2.

Найдите все пары целых чисел $(m; n)$, удовлетворяющих уравнению $m = \frac{n+1}{n-1}$.

Решение:

$$m = \frac{n+1}{n-1} = \frac{n-1+2}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1}.$$

Чтобы дробь принимала целые значения, в знаменателе должны стоять делители двойки, тогда возможны следующие варианты:

$$n-1=1; \quad n=2; \quad m=3$$

$$n-1=-1; \quad n=0; \quad m=-1$$

$$n-1=2; \quad n=3; \quad m=2$$

$$n-1=-2; \quad n=-1; \quad m=0$$

Ответ: **$(3; 2); (-1; 0); (2; 3); (0; -1)$.**

Задание 3.

Вершины выпуклого четырехугольника $ABCD$ имеют целочисленные координаты и принадлежат графику функции $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность и напишите уравнение этой окружности.

Решение:

В предыдущем пункте нашли все пары целых чисел, удовлетворяющих уравнению $y = \frac{x+1}{x-1}$, тогда пусть $A(0; -1); B(-1; 0); C(2; 3); D(3; 2)$ – вершины четырехугольника, принадлежащие графику функции $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

$$AC_{\text{середина}} = \left(\frac{0+2}{2}; \frac{-1+3}{2} \right) = (1; 1)$$

$$BD_{\text{середина}} = \left(\frac{-1+3}{2}; \frac{0+2}{2} \right) = (1; 1)$$

$$|AC| = \sqrt{(0-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{20}$$

$$|BD| = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{20}$$

Диагонали этого четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, поэтому это параллелограмм. При этом диагонали равны, значит этот параллелограмм – прямоугольник. Около прямоугольника можно описать окружность, так как сумма противоположных углов 180° . Центр окружности – точка пересечения диагоналей, а радиус окружности – половина диагонали. Тогда уравнение окружности $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$

Ответ: **$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$.**

Задание 4.

Найдите при каком значении x выражение $\frac{1 + \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 1}$ принимает наибольшее значение.

Решение:

Так как $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то перепишем выражение $\frac{1 + \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2}{\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 - 1}$.

Надо найти наибольшее значение функции $f(t) = \frac{t+1}{t-1}$ при $t = \frac{1}{4} \sin^2 2x$, где $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$. По графику $f(t)$, построенном при решении пункта 1, видно, что наибольшее значение функции $f(0) = -1$.

Решая уравнение $\frac{1}{4} \sin^2(2x) = 0$, получим $2x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, откуда $x = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$

Задание 5.

Пусть a, b – положительные числа. Найдите наибольшее значение выражения $\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}$.

Решение:

Обозначим $\frac{a^2 + b^2}{ab} = x$. Заметим, что $x \geq 2$, так как по неравенству Коши $a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 b^2} = 2ab$,

тогда $\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq \frac{2ab}{ab} = 2$. Равенство достигается при $a = b$.

Тогда $\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2} = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$. Так как $x \geq 2$, то $1 + \frac{2}{x-1} \leq 3$.

Равенство достигается при $a = b$.

Задание 6.

Решите неравенство $\sqrt[7]{\frac{x+1}{x-1}} + 1 + \sqrt[7]{\frac{x+1}{2} - 1} + \frac{(x+1)^2}{2(x-1)} \geq 0$

Решение:

Перепишем неравенство в виде $\sqrt[7]{\frac{x+1}{x-1}} + 1 + \sqrt[7]{\frac{x+1}{2} - 1} + \frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{x-1} \geq 0$

$$\sqrt[7]{\frac{x+1}{x-1}} + 1 + \frac{x+1}{x-1} \geq \sqrt[7]{-\frac{x+1}{2} + 1} + \left(-\frac{x+1}{2}\right)$$

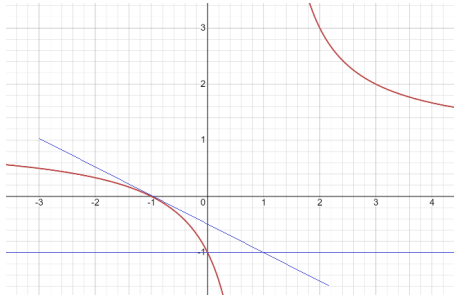
Обратим внимание на похожесть левой и правой частей неравенства.

Рассмотрим функцию $f(t) = \sqrt[7]{t+1} + t$ возрастающую на своей области определения (как сумма двух возрастающих).

Тогда неравенство можно представить как $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq f\left(-\frac{x+1}{2}\right)$.

В силу монотонного возрастания $f(t)$ неравенство будет выполняться при допустимых значениях в том и только том случае, когда $\frac{x+1}{x-1} \geq -\frac{x+1}{2}$.

Интерпретируем графически неравенство: при каких значениях x график функции $y = \frac{x+1}{x-1}$ расположен не ниже графика $y = -\frac{x+1}{2}$.



При решении первого пункта мы выяснили, что прямая $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ является касательной к левой ветке гиперболы, причем точка касания $(-1; 0)$.

Ответ: $\{-1\} \cup (1; +\infty)$