

<p><b>Функция</b> <math>y=f(x)</math> называется периодической, если существует такое число <math>T</math>, не равное нулю, что для любого <math>x</math> из ее области определения <math>f(x+T)=f(x)</math>.</p> <p>Другими словами, это функция, значения которой не изменяются при добавлении к значениям её аргумента некоторого фиксированного ненулевого числа <math>T</math>. Число <math>T</math> называется <b>периодом</b> функции. Различных периодов у периодической функции <math>y=f(x)</math> бесконечное множество. Как правило, говоря о периоде, мы имеем в виду наименьший положительный период функции.</p>	<p>1. Периодическая функция <math>y = f(x)</math> определена для всех действительных чисел. Ее период равен двум и <math>f(1) = 5</math>. Найдите значение выражения <math>3f(7) - 4f(-3)</math>.</p>
	<p>2. График четной периодической функции <math>y = f(x)</math> совпадает с графиком функции <math>z(x) = 2(x - 1)^2</math> на отрезке от 0 до 1; период функции <math>y = f(x)</math> равен 2. Постройте график функции <math>y = f(x)</math> и найдите <math>f(4)</math>.</p>
	<p>3. Найдите наименьший положительный период функции <math>f(x) = \sin 3x + \cos 5x</math>.</p>
	<p>4. Период функции <math>f(x)</math> равен 12, а период функции <math>g(x)</math> равен 8. Найдите наименьший положительный период функции <math>z(x) = f(x) + g(x)</math>.</p>

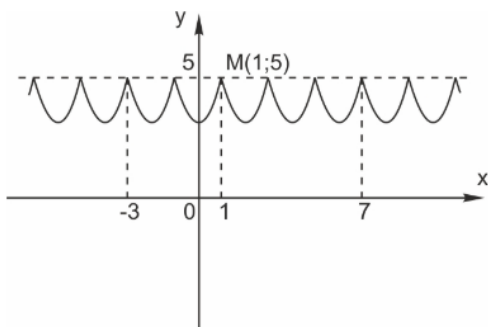
Задачи для самостоятельного решения.

1	<p>При каких целых отрицательных <math>n</math> функция <math>f</math>, заданная равенством</p> $f(x) = \cos 7x \cdot \sin \frac{25x}{n^2}$ <p>является периодической функцией с периодом <math>T = 7\pi</math>.</p>
2	<p>Функция <math>f(x)</math>, заданная на всей числовой оси, при всех действительных <math>x</math> и <math>y</math> удовлетворяет равенству <math>f(x)f(y) = f(x - y)</math>. Известно, что <math>f\left(\frac{1}{2}\right) = 1</math>. Чему равно <math>f(2020)</math>?</p>
3	<p>Про функцию <math>y = f(x)</math> известно, что она определена и непрерывно на всей числовой прямой, нечетна и периодична с периодом 5, а также, что <math>f(-1) = f(2) = -1</math>. Какое наименьшее число корней может иметь уравнение <math>f(x) = 0</math> на отрезке <math>[1755; 2017]</math>?</p>

1. Периодическая функция  $y = f(x)$  определена для всех действительных чисел. Ее период равен двум и  $f(1) = 5$ . Найдите значение выражения  $3f(7) - 4f(-3)$ .

Решение:

График функции  $y = f(x)$  может выглядеть, например, вот так:



Отметим точку  $M(1; 5)$ , принадлежащую графику функции  $y = f(x)$ . Поскольку период функции равен 2, значения функции в точках  $3, 5, 7, \dots, 1 + 2k$  будут также равны пяти. Здесь  $k$  — целое число.

Как ведет себя функция  $y = f(x)$  в других точках — мы не знаем. Но знаем, что ее график состоит из повторяющихся элементов длиной 2, что и нарисовано.

Значения функции  $y = f(x)$  в точках  $-3$  и  $7$  равны пяти. Мы получим:  $3f(7) - 4f(-3) = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 5 = -5$ .

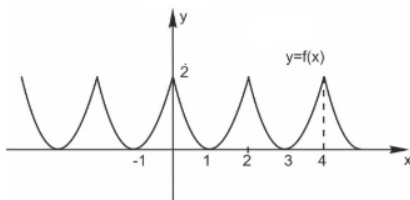
2. График четной периодической функции  $y = f(x)$  совпадает с графиком функции  $z(x) = 2(x - 1)^2$  на отрезке от 0 до 1; период функции  $y = f(x)$  равен 2. Постройте график функции  $y = f(x)$  и найдите  $f(4)$ .

Решение:

Построим график функции  $z(x) = 2(x - 1)^2$  при  $x \in [0; 1]$ .

Поскольку функция  $y = f(x)$  четная, ее график симметричен относительно оси ординат. Построим часть графика при  $x \in [-1; 0]$ , симметричную части графика от 0 до 1.

Период функции  $y = f(x)$  равен 2. Повторим периодически участок длины 2, который уже построен.



Найдем  $f(4)$ :

$$f(4) = f(0 + 2 \cdot 2) = f(0) = 2.$$

3. Найдите наименьший положительный период функции  $f(x) = \sin 3x + \cos 5x$ .

Решение:

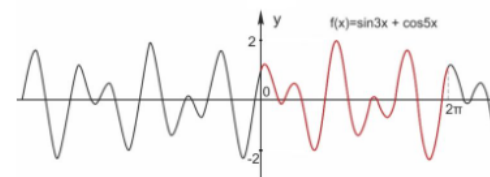
Наименьший положительный период функции  $y = \sin x$  равен  $2\pi$ .

График функции  $y = \sin 3x$  получается из графика функции  $y = \sin x$  сжатием в 3 раза по оси  $X$

Значит, у функции  $y = \sin 3x$  частота в 3 раза больше, чем у функции  $y = \sin x$ , а наименьший положительный период в 3 раза меньше и равен  $\frac{2\pi}{3}$ . Значит, на отрезке  $2\pi$  укладывается ровно 3 полных волны функции  $y = \sin 3x$ .

Рассуждая аналогично, получим, что для функции  $y = \cos 5x$  наименьший положительный период равен  $\frac{2\pi}{5}$ . На отрезке  $2\pi$  укладывается ровно 5 полных волн функции  $y = \cos 5x$ .

Числа 3 и 5 — взаимно простые. Поэтому наименьший положительный период функции  $f(x) = \sin 3x + \cos 5x$  равен  $2\pi$ .



4. Период функции  $f(x)$  равен 12, а период функции  $g(x)$  равен 8. Найдите наименьший положительный период функции  $z(x) = f(x) + g(x)$ .

Решение:

По условию, период функции  $f(x)$  равен 12. Это значит, что все значения  $f(x)$  повторяются через 12, через 24, 36, 48, ...,  $12n$ . Если мы выберем любую точку  $x_0$  на графике функции  $f(x)$ , то через 12, 36, 48, ...,  $12n$  значение функции будет такое же, как и в точке  $x_0$ .

Аналогично, все значения функции  $g(x)$  повторяются через 8, 16, 24, 32, ...,  $8k$ . В этих точках значения  $g(x)$  будут такие же, как и в точке  $x_0$ .

На каком же расстоянии от точки  $x_0$  расположена точка, в которой значение функции  $z(x) = f(x) + g(x)$  такое же, что и в точке  $x_0$ ? Очевидно, на расстоянии  $T = 12n = 8k$ . Это значит, что число  $T$  делится и на 12, и на 8, то есть является их наименьшим общим кратным. Значит,  $T = 24$ .

Наименьший положительный период суммы функций равен наименьшему общему кратному периодов слагаемых.

При каких целых отрицательных  $n$  функция  $f$ , заданная равенством

$$f(x) = \cos 7x \cdot \sin \frac{25x}{n^2}$$

является периодической функцией с периодом  $T = 7\pi$ .

**Решение.**

По определению периода при любом значении  $x$  должно выполняться равенство

$$\cos 7(x + 7\pi) \cdot \sin \frac{25}{n^2}(x + 7\pi) = \cos 7x \cdot \sin \frac{25x}{n^2}. \quad (1)$$

Значит, оно должно выполняться и при  $x = 0$ . В этом случае приходим к уравнению

$$\cos 49\pi \cdot \sin \frac{175\pi}{n^2} = 0.$$

Учитывая, что  $\cos 49\pi \neq 0$  при целых отрицательных  $n$ , приходим к выводу, что выполняется равенство

$$\sin \frac{175\pi}{n^2} = 0,$$

что выполняется только при  $\frac{175}{n^2} = k$ , где  $k$  — целое число. Заметим, что  $175 = 5^2 \cdot 7$ , а, следовательно, среди делителей числа 175 есть только два квадрата целых чисел: квадраты чисел 1 и 5. Но нас интересуют только целые отрицательные значения  $n$ . Значит,  $n \in \{-1, -5\}$ .

Подставляя эти значения в уравнение (1), убеждаемся, что в обоих случаях получаете тождество.

Ответ:  $n = -1$ ,  $n = -5$ .

Функция  $f(x)$ , заданная на всей числовой оси, при всех действительных  $x$  и  $y$  удовлетворяет равенству  $f(x)f(y) = f(x - y)$ . Известно, что  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ . Чему равно  $f(2020)$ ?

**Решение.**

Подставив в равенство  $x = 1$  и  $y = \frac{1}{2}$ , получим  $f(1) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ , откуда  $f(1) = 1$ . Теперь возьмём  $y = 1$ , тогда  $f(x) \cdot f(1) = f(x - 1)$ , и, значит,  $f(x) = f(x - 1)$ . Полученное равенство означает, что  $f$  — периодическая функция с периодом 1. Поэтому

$$1 = f(1) = f(2) = \dots = f(2020).$$

Ответ: 1.

Про функцию  $y = f(x)$  известно, что она определена и непрерывно на всей числовой прямой, нечетна и периодична с периодом 5, а также, что  $f(-1) = f(2) = -1$ . Какое наименьшее число корней может иметь уравнение  $f(x) = 0$  на отрезке  $[1755; 2017]$ ?

**Решение.**

Поскольку функция  $f$  нечётна и определена в нуле, получаем

$$f(0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

В силу 5-периодичности тогда имеем  $f(5) = f(0) = 0$ . Используем ещё раз нечётность:  $f(1) = -f(-1) = 1$ , и опять в силу 5-периодичности  $f(3) = f(-2) = 1$  и  $f(4) = f(-1) = -1$ . Итак, в точках 1, 2, 3 и 4 значения функции равны соответственно 1, -1, 1 и -1. Значит, на каждом из трёх интервалов между этими точками есть не менее одного нуля функции  $f$ . Итого на периоде  $[0; 5)$  у функции не менее 4 нулей (ясно, что эта оценка достижима: можно взять, например, кусочно-линейную функцию, у неё будет ровно 4 нуля). На промежутке  $[1755; 2015)$  период помещается 52 раза (на нём не менее  $52 \cdot 4 = 208$  нулей), плюс ноль в точке 2015 и хотя бы один на интервале  $(2016; 2017)$ . Итого не менее 210 нулей.

Ответ: 210.