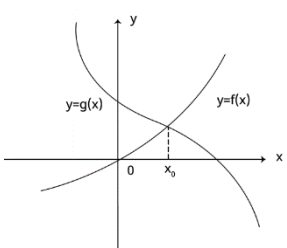
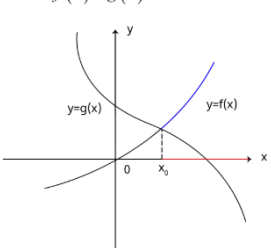
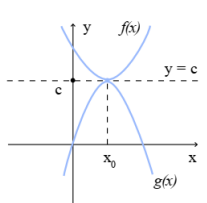
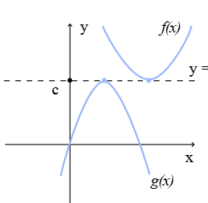
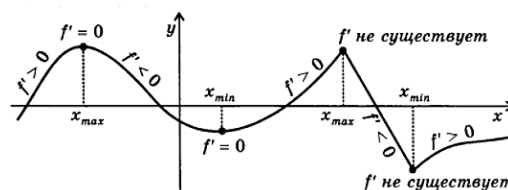


Несколько идей применения монотонности функций.

| Идея | Пояснения |
|---|---|
| <p>Если на некотором множестве функция $f(x)$ строго возрастает, а функция $g(x)$ строго убывает, то уравнение вида $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня (утверждение выполняется и в случае нестрогой монотонности одной из функций).</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> $f(x) = g(x)$  </div> <div style="text-align: center;"> $f(x) \geq g(x)$  </div> </div> | <p>Утверждение позволяют обосновывать <i>единственность решения</i> уравнения в тех случаях, когда свести его к простейшему не удастся, но удастся подобрать корень.</p> <p><i>Доказательство:</i> Если $g(x)$ строго убывает, то $-g(x)$ строго возрастает, тогда $u(x) = f(x) - g(x)$ монотонно возрастает как сумма двух возрастающих. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ свелось к уравнению $u(x) = 0$. Предположим, что последнее уравнение имеет более одного корня, например x_1 и x_2. Пусть $x_1 < x_2$. В силу монотонности $u(x)$ тогда $u(x_1) < u(x_2)$, что противоречит условию $u(x_1) = 0 = u(x_2)$.</p> |
| <p>Если функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает), то уравнение вида $f(x) = x$ и $f(f(x)) = x$ и $f(f(\dots f(x) \dots)) = x$ имеют одно и тоже множество корней.</p> | <p><i>Доказательство:</i> Пусть x_0 является корнем уравнения $f(x) = x$, т.е. $f(x_0) = x_0$. Тогда $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$. Обратно, пусть число x_0 является корнем уравнения $f(f(x)) = x$, т.е. $f(f(x_0)) = x_0$. Докажем, что $f(x_0) = x_0$. Пусть это не так, тогда либо $f(x_0) > x_0$, либо $f(x_0) < x_0$. В силу монотонного возрастания функции $f(x)$ из неравенства $f(x_0) > x_0$ следует, что $f(f(x_0)) > f(x_0)$, что противоречит $f(f(x_0)) = x_0$. Аналогично из неравенства $f(x_0) < x_0$ в силу монотонности $f(x)$ следует, что $f(f(x_0)) < f(x_0)$, что противоречит $f(f(x_0)) = x_0$. Значит, наше предположение неверное, и $f(x_0) = x_0$.</p> |
| <p>Если функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает), то $f(a) = f(b)$ тогда и только тогда, когда $a = b$</p> | |
| <p>Если $\max f(x) = c$ и $\min g(x) = c$, то уравнение $f(x) = g(x)$ (как и неравенство $f(x) \leq g(x)$) имеет то же множество решений, что и система</p> $\begin{cases} f(x) = c \\ g(x) = c \end{cases}$ <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  </div> <div style="text-align: center;">  </div> </div> <p style="text-align: center;">$f(x) = g(x)$</p> | <p><i>Ограниченность функций:</i></p> $ \sin x \leq 1; \quad \cos x \leq 1;$ $ a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2};$ $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \arccos x \leq \pi;$ $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \operatorname{arcctg} x \leq \pi$ |

Применение производной для исследования функции.

МОНОТОННОСТЬ ЭКСТРЕМУМЫ



Замечание. Приведенные условия являются только достаточными условиями монотонности, но не являются необходимыми. Например, функция $y = x^3$ возрастает во всей области определения, хотя ее производная $y' = 3x^2$ обращается в нуль при $x = 0$.

Применение монотонности функций для решения задач. Выбери подходящую идею и реши задачу.

Задача 1. Решите уравнение $x^3 + 7\sqrt[3]{6x-7} + 6 = 0$

Задача 2. Решите уравнение $x^3 - 7\sqrt[3]{7x-6} + 6 = 0$

Задача 3. Решите уравнение $x^9 - (2x+1)^3 - 16\sqrt[3]{2x+1} + 16x = 0$

Задача 4. Решите уравнение $2^{x^3-1} + 2^{1-x^3} = 2 - \arccos(\sqrt[3]{x})$

Задача 5. Решите уравнение $x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{1 + \sqrt{x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1}} = 4x$

Домашнее задание:

1. Решите уравнение $1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^8}}}} = \frac{1}{x^{16}}$

2. Решите уравнение $4 \sin 3x + 3 \cos 4x = 7$

3. Найдите все интервалы вида $(k; k+1)$, где k – целое число, содержащее нули функции $f(x) = ((x^3 - 1) - 1)^3 - 1$

4. В течение одной рабочей недели цена на нефть менялась каждый день на одно и то же число процентов a ($1 \leq a \leq 50$) по сравнению с предыдущей ценой, причем в понедельник и среду она уменьшалась, а во вторник, четверг и пятницу — увеличивалась. Могла ли к субботе цена на нефть увеличиться на 11% по сравнению с первоначальной ценой?