

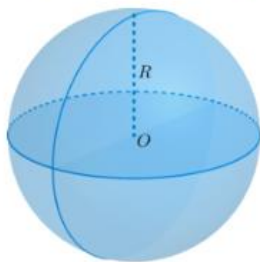
• Сфера – это множество точек пространства, находящихся на одинаковом расстоянии от заданной точки  $O$  (называемой центром сферы).

• Шар – это сфера вместе со своей внутренностью.

$R$  – радиус сферы или шара.

• Объем шара  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

• Площадь сферы  $S = 4\pi R^2$



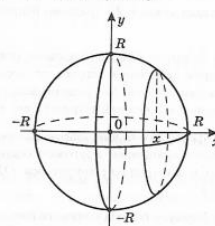
объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$ , вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

$y^2 + x^2 = R^2$  – формула окружности с центром в начале координат.

Так как формула  $x^2 + y^2 \leq R^2$  определяет круг, то полукруг определяет формула

$0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ ;  $D(x) = [-R; R]$ .



Шар будем рассматривать как тело вращения полукруга вокруг диаметра. Тогда, используя формулу объема тел

вращения  $V(x) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ , получим

$$V_{\text{ш}} = \pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left( R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ куб. ед.}$$

## Взаимное расположение шара и плоскости. Вписанные и описанные сферы.

Сформулируйте аналогичное определение или свойство в планиметрии. (Взаимное расположение прямой и окружности. Вписанные и описанные окружности).

<p><b>Определение 1.</b> Плоскость касается шара (сферы), если она имеет с шаром (сферой) единственную общую точку.</p>	<p><b>Определение 2.</b> Шар называется вписанным в многогранник, если он касается всех граней многогранника.</p> <p><b>Замечание 1.</b> Центр шара, вписанного в пирамиду, лежит внутри пирамиды. Расстояние от центра шара до каждой из граней пирамиды равно радиусу шара.</p>
<p><b>Замечание 2.</b> Объем пирамиды <math>V = \frac{1}{3} S_{\text{нов}} \cdot R</math>, где <math>S_{\text{нов}}</math> – площадь полной поверхности пирамиды, <math>R</math> – радиус вписанного шара.</p>	<p><b>Определение 3.</b> Биссекторной плоскостью двугранного угла с ребром <math>l</math> называется плоскость, проходящая через прямую <math>l</math> и биссектрису линейного угла.</p> <p><b>Замечание 3.</b> Биссекторная плоскость – множество точек пространства, равноудаленных от граней двугранного угла.</p>
<p><b>Определение 4.</b> Плоскость, проходящая через середину отрезка <math>AB</math>, перпендикулярно этому отрезку, называется серединной перпендикулярной плоскостью отрезка <math>AB</math>.</p> <p><b>Замечание 4.</b> Геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от концов отрезка, является серединной перпендикулярной плоскостью этого отрезка.</p> <p><b>Замечание 5.</b> Если точки <math>A</math> и <math>B</math> лежат на сфере, то центр сферы лежит на серединной перпендикулярной плоскости отрезка <math>AB</math>.</p>	<p><b>Определение 5.</b> Сфера называется описанной около многогранника, если все вершины многогранника лежат на сфере.</p> <p><b>Замечание 6.</b> Если около многогранника можно описать сферу, то ее центр лежит на пересечении серединных перпендикулярных плоскостей всех ребер многогранника.</p>
<p><b>Признак касания сферы и плоскости.</b></p> <p>Плоскость касается сферы тогда и только тогда, когда плоскость проходит через точку на сфере и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку.</p>	<p><b>Теорема 1. (О существовании описанной сферы)</b></p> <p>В произвольной треугольной пирамиде серединные перпендикулярные плоскости всех ребер имеют единственную общую точку, равноудаленную от всех вершин пирамиды. Общая точка является центром сферы, описанной около треугольной пирамиды.</p>
<p><b>Утверждение 2.</b> Пусть <math>SA_1 \dots A_n</math> – произвольная пирамида с вершиной <math>S</math> и основанием <math>A_1 \dots A_n</math>. Вокруг пирамиды можно описать шар тогда и только тогда, когда вокруг многоугольника <math>A_1 \dots A_n</math> можно описать окружность.</p> <p><b>Доказательство.</b> Если около пирамиды можно описать шар, то в сечении шара плоскостью основания получится многоугольник, вписанный в окружность. Обратно, пусть точка <math>O</math> – центр окружности радиуса <math>R</math>, описанной около основания. Проведем перпендикуляр к плоскости основания через точку <math>O</math>. Тогда точка пересечения этого перпендикуляра и серединной перпендикулярной плоскости ребра <math>SA_m</math> равноудалена от всех вершин пирамиды.</p>	<p><b>Замечание 2.1.</b> Центр сферы, описанной около произвольной пирамиды, лежит на перпендикуляре к основанию пирамиды, проведенном через центр описанной около основания окружности.</p> <p><b>Утверждение 3.</b> Центр сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, лежит на высоте пирамиды.</p> <p><b>Следствие 3.1.</b> Радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра с ребром <math>a</math>, равен <math>\frac{a\sqrt{6}}{4}</math>.</p> <p><b>Утверждение 4.</b> Центр сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, лежит на высоте пирамиды.</p>
<p><b>Замечание 2.2.</b> Если известны координаты четырех точек <math>(x_k, y_k, z_k)</math> <math>k = 1, 2, 3, 4</math>, лежащих на сфере, то радиус сферы <math>R</math> и координаты центра сферы <math>O(x_0, y_0, z_0)</math> можно найти, решив систему уравнений <math>(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2 + (z_k - z_0)^2 = R^2</math> (<math>k = 1, 2, 3, 4</math>)</p>	<p><b>Утверждение 5.</b> Около призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда призма прямая и около ее основания можно описать окружность.</p>
<p><b>Утверждение 6.</b> Если сфера касается двух пересекающихся плоскостей, то ее центр лежит на биссекторной плоскости двугранного угла, образованного этими плоскостями.</p>	<p><b>Утверждение 7.</b> Если сфера вписана в многогранник, то ее центр лежит на пересечении всех биссекторных плоскостей многогранника.</p>

**Утверждение 8.** (О существовании вписанной сферы)

В произвольную треугольную пирамиду можно вписать сферу.

для шара (сферы) выполняются следующие метрические соотношения:

— диаметр шара (сферы), делящий его хорду пополам, перпендикулярен этой хорде;

— отрезки всех касательных прямых, проведенных к шару из одной расположенной вне шара точки, равны между собой (они образуют поверхность конуса с вершиной в данной точке, а точки касания этих прямых — окружность основания этого конуса);

— произведение длин отрезков хорд шара, проходящих через одну и ту же внутреннюю точку шара, есть величина постоянная (равная  $R^2 - a^2$ , где  $R$  — радиус шара,  $a$  — расстояние от центра шара до данной точки);

— если из одной и той же точки вне шара проведены к нему секущая и касательная, то произведение длины отрезка всей секущей на длину отрезка ее внешней части равно квадрату длины отрезка касательной (и равно  $a^2 - R^2$ , где  $R$  — радиус шара,  $a$  — расстояние от центра шара до данной точки).

**Утверждение 9.** Центр сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, лежит на высоте пирамиды.

**Следствие 4.2.** Радиус шара, вписанного в правильный

тетраэдр с ребром  $a$ , равен  $\frac{a\sqrt{6}}{12}$ .

**Утверждение 10.** Центр сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, лежит на высоте пирамиды.

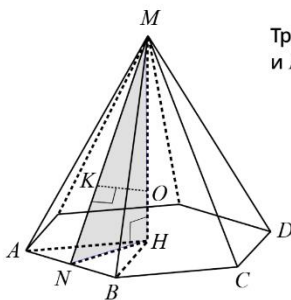
При решении задач на взаимное расположение сферы (шара) и плоскости удобно рассмотреть сечение данных плоскости и сферы (шара) той диаметральной плоскостью сферы (шара), которая перпендикулярна данной плоскости. Тогда в сечении получается окружность (круг) и прямая, поэтому решение данной задачи сводится к решению планиметрической задачи на взаимное расположение окружности (круга) и прямой.

При решении задачи на комбинацию сферы и двугранного угла (сферы и двух пересекающихся плоскостей) достаточно рассмотреть сечение двугранного угла и сферы (двух плоскостей и сферы) той диаметральной плоскостью сферы, которая перпендикулярна ребру двугранного угла (прямой пересечения данных плоскостей). Тогда в сечении получается окружность и плоский угол (окружность и две пересекающиеся прямые), поэтому решение данной задачи сводится к решению планиметрической задачи на комбинацию окружности и плоского угла (окружности и двух пересекающихся прямых).

$$S = \frac{1}{2} \cdot h_a \cdot a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot h_1 \cdot S_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_1 \cdot S_2}{a} \cdot \sin \gamma = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{полн}} \cdot r$$

В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.



Треугольники  $OKM$  и  $NHM$  подобны.

$$S_{\text{осн}} = 96\sqrt{3}$$

$$S_{\text{бок}} = 6 \cdot S_{\text{AMB}} = 6 \cdot 8\sqrt{21}$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 96\sqrt{3} + 48\sqrt{21}$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 96\sqrt{3} + 48\sqrt{21}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot h_1 \cdot S_1 = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 96\sqrt{3} = 192\sqrt{3}$$

$$r = \frac{3V}{S_{\text{полн}}} = \frac{3 \cdot 192\sqrt{3}}{96\sqrt{3} + 48\sqrt{21}} =$$

$$= \frac{12\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + \sqrt{21}} = 4\sqrt{7} - 8$$

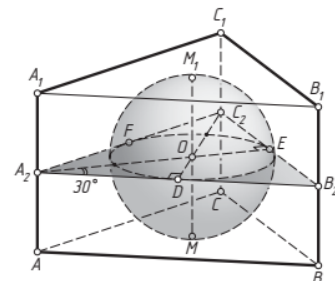
$$S_{\text{сф}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (4\sqrt{7} - 8)^2 = 64 \cdot (11 - 4\sqrt{7}) \cdot \pi$$

Ответ:  $S_{\text{сф}} = 64 \cdot (11 - 4\sqrt{7}) \cdot \pi$

Шар касается всех граней правильной треугольной призмы. Найдите отношение объемов шара и призмы.

Ответ:  $2\pi : 9\sqrt{3}$ .

Решение. Пусть  $O$  — центр шара радиуса  $R$ , вписанного в правильную треугольную призму  $ABC A_1 B_1 C_1$ ,  $M$  и  $M_1$  — точки касания шара с основаниями  $ABC$  и  $A_1 B_1 C_1$  соответственно, а  $D, E$  и  $F$  — с боковыми гранями. Тогда  $M$  и  $M_1$  — центры равносторонних треугольников  $ABC$  и  $A_1 B_1 C_1$ , а  $D, E$  и  $F$  — центры прямоугольников  $AA_1 B_1 B$ ,  $BB_1 C_1 C$  и  $AA_1 C_1 C$  соответственно.



В сечении призмы плоскостью, проходящей через центр шара параллельно основаниям, получится равносторонний треугольник  $A_2 B_2 C_2$ , равный треугольникам  $ABC$  и  $A_1 B_1 C_1$ , и вписанный в него круг радиуса  $R$ , касающийся сторон  $A_2 B_2$ ,  $B_2 C_2$  и  $A_2 C_2$  в точках  $D, E$  и  $F$  соответственно. Центр  $O$  шара лежит на отрезке  $MM_1$  и делит его пополам, значит,  $AA_1 = MM_1 = 2R$ . Точка  $O$  лежит на высоте треугольника  $A_2 B_2 C_2$  и делит её в отношении  $2 : 1$ , считая от  $C_2$ , значит,  $C_2 D = 3OD = 3R$ .

Из прямоугольного треугольника  $OA_2 D$  находим, что

$$A_2 D = OD \operatorname{ctg} 30^\circ = R\sqrt{3}.$$

Значит,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A_2 B_2 C_2} = \frac{1}{2} A_2 B_2 \cdot C_2 D = R\sqrt{3} \cdot 3R = 3R^2 \sqrt{3}.$$

Пусть  $V_1$  и  $V_2$  — объёмы шара и призмы соответственно. Тогда

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad V_2 = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = 3R^2 \sqrt{3} \cdot 2R = 6R^3 \sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{6R^3 \sqrt{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

◁