

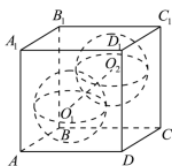
### Две сферы. Три сферы и более

Прежде чем приступить к решению задач на две, три сферы и более, полезно знать, что если прямая в точках  $A$  и  $B$  касается двух внешне образом касающихся окружностей радиусов  $R_1$  и  $R_2$ , то длина отрезка  $AB$  равна  $2\sqrt{R_1 \cdot R_2}$ .

При решении задачи, в которой даны две, три и более попарно касающиеся сферы, бывает удобно воспользоваться сечением этих сфер плоскостью, проходящей через их центры. Тогда данная задача сводится к планиметрической задаче на взаимное расположение двух, трех и более попарно касающихся окружностей.

Внутри куба расположены два равных шара, касающихся друга. При этом один шар касается трех граней куба, имеющих общую вершину, а другой касается трех оставшихся граней. а) докажите, что центры шаров принадлежат диагонали куба, исходящей из общей для граней вершины; б) Найдите радиусы этих шаров, если ребро куба равно 13

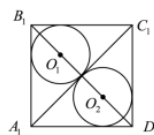
**Решение:** а) центр шара равноудален от трех плоскостей граней куба. Множество точек, равноудаленных от двух плоскостей есть биссекторная полуплоскость. Диагональные сечения куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , являясь биссекторами его двугранных углов, содержат центры всех сфер, вписанных в



Под биссекторной полуплоскостью двугранного (биссектором) угла понимается множество точек, равноудаленных от граней данного угла

- на биссекторе двугранного угла лежат центры всех сфер, вписанных в этот угол;

- на луче прямой пересечения биссекторных полуплоскостей двугранных углов данного трехгранного угла лежат центры всех сфер, вписанных в этот трехгранный угол»;



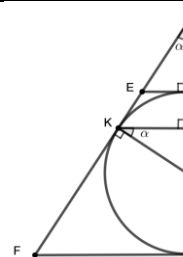
эти двугранные углы. Так как эти диагональные сечения имеют общую прямую – диагональ данного куба, то она, соответственно, содержит множество всех точек куба, равноудаленных от всех трех его граней с общей вершиной. Это означает, что диагональ куба является носителем

центров всех шаров, вписанных в данный трехгранный угол;

б) пусть центры шаров  $O_1, O_2$  лежат на диагонали  $BD_1$ , а радиусы шаров равны  $R$ . Тогда диагональ куба равна  $BD_1 = 13\sqrt{3}$ , с другой стороны –  $BD_1 = BO_1 + O_1O_2 + O_2D_1$ , откуда  $O_1O_2 = 2R$ , а  $BO_1 = O_2D_1 = \sqrt{3}R$  – как диагональ куба со стороной  $R$ . Получаем уравнение:  $13\sqrt{3} = 2R + 2\sqrt{3}R$ , откуда  $R = \frac{13\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}$ . Ответ:  $\frac{13\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}$ .

### Задачи для самостоятельного решения.

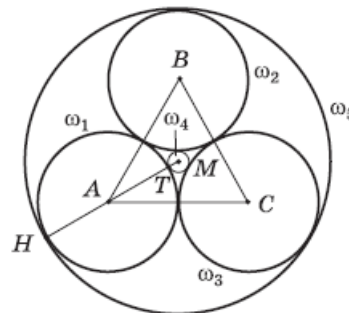
Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 4.



В куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  помещены две касающиеся друг друга внешне образом сферы, радиусы которых относятся как 3 : 5. Первая сфера касается всех граней куба, содержащих вершину  $A$ , вторая – всех граней куба, содержащих вершину  $C_1$ . Найти их радиусы, если ребро куба равно 16.

Три равные сферы радиуса 6 касаются друг друга. Найдите радиус сферы, касающейся всех трех этих сфер, если ее центр лежит в плоскости центров трех данных сфер.

Рассмотрим сечение данной комбинации сфер плоскостью  $ABC$ , проведенной через их центры. Возможны два случая.



В вершинах правильного тетраэдра с ребром 18 расположены центры четырех равных сфер, попарно касающихся друг друга. Найдите радиус сферы, касающейся всех этих сфер.

*Решение.* Пусть центрами данных сфер являются вершины правильного тетраэдра  $PABC$ , а центром сферы, касающейся всех этих сфер, служит некоторая точка  $F$ .

Известно, что точка касания двух сфер принадлежит линии их центров и расстояние между центрами данных сфер равно сумме длин их радиусов (сферы касаются внешним образом). Это

означает:  $FA = FB = FC = FP$  (данные четыре сферы равны), то есть точка  $F$  равноудалена от вершин данного правильного тетраэдра.

Известно, что в правильном тетраэдре  $PABC$  точкой, равноудаленной от всех его вершин, является точка  $M$  пересечения отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней,

причем  $PM = \frac{3}{4} OP$  где  $O$  — центроид правильного

треугольника  $ABC$ . Таким образом, центром сферы, касающейся всех четырех данных сфер, является точка  $M$ .

На рисунке 12 изображено сечение данной комбинации тел плоскостью  $APH$  ( $H$  — середина  $BC$ ), где  $(APH) \perp BC$ ,  $(APH) \perp (ABC)$ , так как высота тетраэдра  $PO$  расположена в плоскости  $APH$ . Сечением тетраэдра этой плоскостью является треугольник  $APH$ , а сечением двух данных сфер с

центрами  $A$  и  $P$  — две равные касающиеся окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с теми же центрами и радиусом 6. Так как центр  $M$  сферы, касающейся всех четырех данных сфер, принадлежит секущей плоскости  $APH$ , то ее сечением является окружность  $\omega_3$ , касающаяся окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а радиус окружности  $\omega_3$  равен радиусу этой сферы. Найдём радиус окружности  $\omega_3$ .

В правильном треугольнике  $ABC$  со стороной 18 имеем:

$$AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3};$$

$$AO = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} \cdot 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

Тогда в прямоугольном треугольнике  $AOP$  ( $OP \perp AO$ ):

$$OP = \sqrt{AP^2 - AO^2} = \sqrt{18^2 - (6\sqrt{3})^2} = 6\sqrt{6}.$$

$$PM = \frac{3}{4} OP = \frac{3}{4} \cdot 6\sqrt{6} = 4,5\sqrt{6}.$$

Теперь находим:

Обозначим через  $T$  и  $K$  точки пересечения прямой  $MP$  с окружностью  $\omega_2$ . Тогда отрезки  $MT$  и  $MK$  равны радиусам концентрических окружностей  $\omega_3$  и  $\omega_4$  с центром  $M$ , одна из которых касается окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  внутренним образом, другая — внешним. Так как

$$MT = PM - PT, MK = PM + PK, \text{ То } MT = 4,5\sqrt{6} - 9, MK = 4,5\sqrt{6} + 9.$$

Таким образом, существуют две концентрические окружности с центром  $M$ , касающиеся всех данных четырех сфер: радиус одной сферы равен  $4,5\sqrt{6} - 9$ , а радиус другой —  $4,5\sqrt{6} + 9$ .

Ответ:  $4,5\sqrt{6} - 9$ ;  $4,5\sqrt{6} + 9$ .

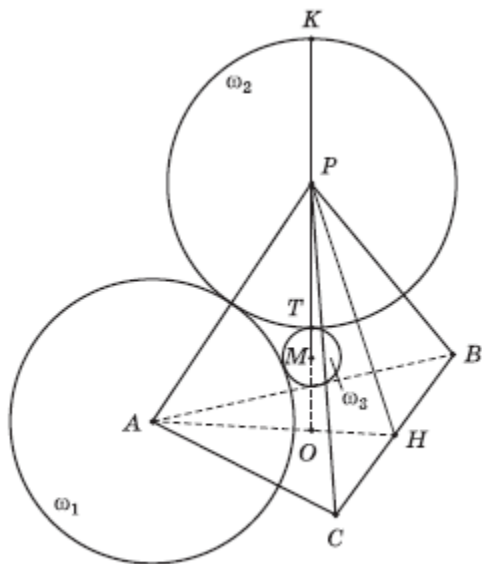


Рис. 12

[5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 4.

**Ответ:**  $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$ ,  $S = \frac{16}{9}$ .

**Решение.** Обозначим точки пересечения прямой  $SO$  со сферой через  $P$  и  $Q$  (точка  $P$  лежит на отрезке  $SO$ , а  $Q$  – вне него). Пусть радиус сферы равен  $r$ . Треугольники  $OKS$ ,  $OLS$  и  $OMS$  прямоугольные (углы при вершинах  $K, L, M$  прямые, так как касательные перпендикулярны радиусам, проведённым в точку касания). Эти треугольники равны по катету и гипотенузе ( $OK = OL = OM = R$ ,  $SO$  – общая), следовательно,  $\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$  (пусть  $\angle KSO = \alpha$ ,  $SO = x$ ). Высоты, опущенные из точек  $K, L, M$  на гипотенузу  $SO$ , равны, а их основания – одна и та же точка  $H$ , лежащая в плоскости  $KLM$  (назовём эту плоскость  $\tau$ ). Пусть  $\beta$  и  $\gamma$  касательные плоскости к сфере, проходящие через точки  $P$  и  $Q$ , а  $E$  и  $F$  – точки пересечения этих плоскостей с прямой  $SK$ . По условию площади сечений трёхгранного угла этими плоскостями равны соответственно  $S_1 = 1$  и  $S_2 = 4$ . Рассмотрим сечение трёхгранного угла и сферы плоскостью  $SKO$  (см. рис. и обозначения на нем). Так как  $SH \perp HK$  и  $SH \perp HL$ , то  $\tau \perp SH$ . Тогда сечения трёхгранного угла плоскостями  $\tau$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  – подобные треугольники, плоскости которых параллельны (все они перпендикулярны  $SO$ ).

Если  $\Sigma$  – площадь треугольника, получающегося в сечении трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , то из подобия  $\Sigma : S_1 : S_2 = KH^2 : EP^2 : FQ^2$ . Следовательно,  $EP : FQ = \sqrt{S_1} : \sqrt{S_2}$ . Тогда  $\sqrt{S_1} : \sqrt{S_2} = SP : SQ = (x - r) : (x + r)$ , откуда  $r = x \frac{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1}}$ , а  $\sin \alpha = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1}} = \frac{1}{3}$ . Отсюда  $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$ .

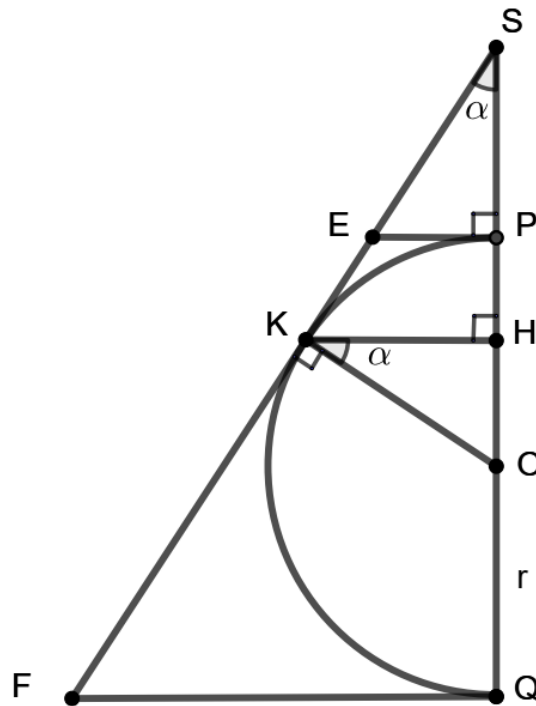


Рис. 1: вариант 5, задача 4

Далее,  $OH = r \sin \alpha$ ,  $SH = SO - OH = \frac{r}{\sin \alpha} - r \sin \alpha$ ,  $SP = SO - r = \frac{r}{\sin \alpha} - r$ . Значит,  $\Sigma : S_1 = KH^2 : EP^2 = SH^2 : SP^2 = \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha\right)^2 : \left(\frac{1}{\sin \alpha} - 1\right)^2 = (1 + \sin \alpha)^2 = \frac{16}{9}$ , откуда  $\Sigma = \frac{16}{9}$ .

**3.394.** В куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  помещены две касающиеся друг друга внешним образом сферы, радиусы которых относятся как 3 : 5. Первая сфера касается всех граней куба, содержащих вершину  $A$ , вторая — всех граней куба, содержащих вершину  $C_1$ . Найти их радиусы, если ребро куба равно 16.

Решение. Обозначим:  $K$  и  $H$  — центры сфер, касающихся всех граней куба, содержащих соответственно вершину  $A$  и вершину  $C_1$ . Если радиус первой сферы равен  $R$ , то радиус второй равен  $\frac{5}{3}R$ . Это означает, что  $KA = R\sqrt{3}$ ,  $HC_1 = \frac{5}{3}R\sqrt{3}$ ,

$KH = R + \frac{5}{3}R$ . Так как ребро куба равно 16, то его диагональ  $AC_1$  равна  $16\sqrt{3}$ . Но  $AK + KH + HC_1 = AC_1$ , поэтому получаем:  $R\sqrt{3} + R + \frac{5}{3}R + \frac{5}{3}R\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ , откуда  $R = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = 3(3 - \sqrt{3})$ . Тогда радиус второй сферы равен  $5(3 - \sqrt{3})$ .

**3.398.** Три равные сферы радиуса 6 касаются друг друга. Найдите радиус сферы, касающейся всех трех этих сфер, если ее центр лежит в плоскости центров трех данных сфер.

Решение. В сечении всех четырех сфер плоскостью, проходящей через их центры, получаем три попарно касающиеся окружности  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  радиуса 6 с центрами соответственно  $A, B, C$  и окружность  $\beta$  с центром  $O$ , касающаяся каждой из них. Причем точка  $O$  совпадает с центроидом правильного треугольника  $ABC$  со стороной 12, поэтому  $OA = OB = OC = 4\sqrt{3}$ .

Возможны два случая.

1. Окружность  $\beta$  касается окружностей  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  внешним образом. Если при этом  $K$  — точка внешнего касания окружностей  $\omega_1$  и  $\beta$ , то  $OK$  — радиус окружности  $\beta$  и  $OK = OA - AK = 4\sqrt{3} - 6$ .

2. Окружность  $\beta$  касается окружностей  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  внутренним образом. Если при этом  $M$  — точка внутреннего касания окружностей  $\omega_1$  и  $\beta$ , то  $OM$  — радиус окружности  $\beta$  и  $OM = OA + AM = 4\sqrt{3} + 6$ .