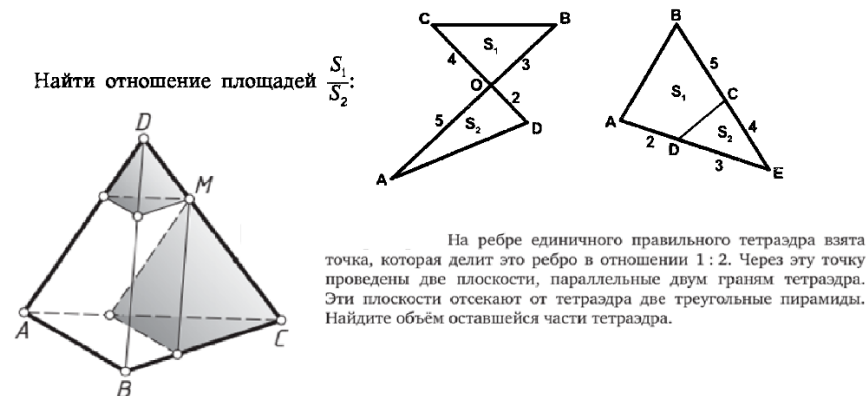


Разминка:

<p>1. Объемы тетраэдров с равными основаниями относятся как длины их высот, опущенных на эти основания.</p> <p>2. Объемы тетраэдров с равными высотами относятся как площади их оснований.</p> <p>3. Объемы тетраэдров, имеющих равные трехгранные углы, относятся как произведения длин ребер, образующих эти углы.</p>	<p>Площади треугольников $PA'B'$ и PAB с общим углом</p> $\frac{S_{\Delta PA'B'}}{S_{\Delta PAB}} = \frac{ PA' \cdot PB' }{ PA \cdot PB }$ <p>Площади треугольников с равными высотами относятся как основания. Площади треугольников с равными основаниями относятся как высоты. Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия.</p>
<p>Объемы подобных многогранников относятся как куб коэффициента подобия</p>	



Решаем вместе:

В правильной пирамиде $SABC$ с вершиной S на стороне основания AC и боковом ребре SB отметили соответственно точки E и N такие, что $AE:EC = SN:NB = 1:2$. Через точки E и N параллельно прямой AB провели плоскость α .

- Докажите, что сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α является равнобедренная трапеция.
- Плоскость α разделила пирамиду $SABC$ на два многогранника. Найдите объем того из них, в котором одной из вершин является точка A , если $AB = 6$, $AS = 3\sqrt{3}$.

Теория	Шаги решения.
<p>Если две плоскости пересекаются и одна из них содержит прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения плоскостей параллельна этой прямой</p>	<ol style="list-style-type: none"> Постройте сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α Покажите, что в сечении получится четырехугольник, у которого две стороны одновременно параллельны и не равны, а две другие стороны равны.
<p>Главная идея: найдем объем многогранника, в котором одной из вершин является точка C, а затем вычтем его из объема пирамиды $SABC$.</p>	
$V = \frac{1}{3} h_1 \cdot S_1 = \frac{1}{3} h_2 \cdot S_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2S_1 S_2}{a} \cdot \sin \varphi = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$ <p> $\alpha = \angle(AB, AC)$ $\beta = \angle(AD, (ABC))$ $\varphi = \angle((ABD), (ABC))$ </p>	<ol style="list-style-type: none"> Найдите объем пирамиды $SABC$.
<p>Объемы тетраэдров, имеющих равные трехгранные углы, относятся как произведения длин ребер, образующих эти углы.</p>	<ol style="list-style-type: none"> Достройте многогранник, в котором одной из вершин является точка C, до пирамиды. Для этого продлите боковые стороны полученной в сечении трапеции до пересечения с продолжением ребра CS. По теореме Менелая найдите, в каком отношении делятся ребра построенной и исходной пирамиды. Исходная и построенная пирамиды имеют общий трехгранный угол C. Найдите отношения объемов построенной и исходной пирамиды, а затем найдите объем построенной пирамиды. Искомый объем многогранника, можно найти как разность объемов двух пирамид, которые так же имеют общий трехгранный угол.

Смотрим решение задачи.

Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$, точки M и N — середины рёбер SD и BC . Найдите объём большей из частей, на которые плоскость AMN разбивает пирамиду $SABCD$, если объём пирамиды $SABCD$ равен V .

Решение. Пусть прямые AN и CD , лежащие в плоскости ABC , пересекаются в точке P , а прямые MP и SC , лежащие в плоскости CSD , — в точке K . Тогда K — точка пересечения плоскости AMN с ребром SC .

Из равенства треугольников PCN и ABN следует, что $CP = AB = CD$, значит, C — середина отрезка DP . Тогда K — точка пересечения медиан SC и PM треугольника DSP , следовательно, $CK : KS = 1 : 2$.

Рассмотрим треугольную пирамиду $MADP$. Площадь её основания ADP равна площади основания $ABCD$ данной пирамиды, а высота, опущенная из вершины M , вдвое меньше высоты данной пирамиды, значит, $V_{MADP} = \frac{1}{2}V$.

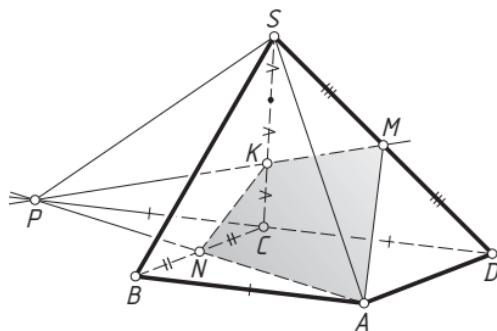
Площадь основания CPN треугольной пирамиды $KCPN$ в четыре раза меньше площади $ABCD$, а высота, опущенная на плоскость основания CPN , втрое меньше высоты пирамиды $SABCD$, значит,

$$V_{KCPN} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}V = \frac{1}{12}V.$$

Тогда объём части пирамиды $SABCD$, содержащей точку D , равен

$$V_{MADP} - V_{KCPN} = \frac{1}{2}V - \frac{1}{12}V = \frac{5}{12}V < \frac{1}{2}V.$$

Следовательно, объём большей части равен $\frac{7}{12}V$. \triangleleft



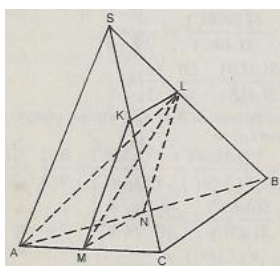
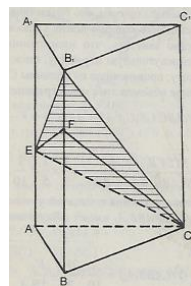
Задачи для самостоятельного решения (сдаем на листочках):

Простые (1 балл)

1. В правильном тетраэдре $PABC$ $M \in [PA]$; $|AM| : |MP| = 4 : 1$. В каком отношении делит объём тетраэдра плоскость, проходящая через точку M перпендикулярно ребру PA ?
2. На продолжении ребра AC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ с вершиной D взята точка K так, что $KA : KC = 3 : 4$, а на ребре DC взята точка L так, что $DL : LC = 2 : 1$. В каком отношении делит объём пирамиды плоскость, проходящая через точки B, L, K ?

Сложнее (2 балла)

3. Объём треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен V . Точка E — середина ребра AA_1 , точка F лежит на ребре BB_1 , причём $\frac{B_1F}{FB} = \frac{1}{4}$. Проведем две плоскости: одна проходит через точки C, F, B_1 , а другая через точки C_1, E, F . Найдите объём части призмы, заключенной между этими плоскостями.



4. В треугольной пирамиде $SABC$ проведена плоскость, параллельная ребрам SA и BC . Эта плоскость пересекает ребро AC в точке M так, что $AM : MC = 1 : 2$. В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды $SABC$?