

Факт 1. В треугольнике ABC проведен отрезок B_1C_1 , антипараллельный стороне BC , с концами на прямых AB и AC соответственно. Прямая AS содержит симедиану треугольника ABC тогда и только тогда, когда она делит B_1C_1 пополам.

Доказательство. Рассмотрим симметрию относительно биссектрисы угла A . Тогда отрезок B_1C_1 перейдет в отрезок B_2C_2 , который параллелен BC , а его середина K_1 – в середину K_2 отрезка B_2C_2 (например, рис. 4). Тогда K_2 лежит на прямой AM , значит, K_1 лежит на прямой AS . Комментарий. И наоборот, медиана AM треугольника ABC – симедиана треугольника AB_1C_1 .

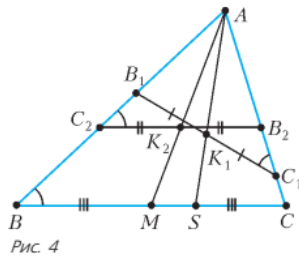


Рис. 4

Используем стандартные обозначения для сторон треугольника $AB = c$, $AC = b$. Расстояние от точки X до прямой l будем обозначать $d(X, l)$.

Факт 2. Пусть точка S лежит на стороне BC треугольника ABC . Тогда эквивалентны следующие условия: (1) AS – симедиана, (2) $\frac{d(S; AB)}{d(S; AC)} = \frac{c}{b}$ (т.е. расстояния от точки S до сторон треугольника прямо пропорциональны этим сторонам), (3) $\frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{c^2}{b^2}$, (4) $\frac{d(B; AS)}{d(C; AS)} = \frac{c^2}{b^2}$, (5) $\frac{BS}{CS} = \frac{c^2}{b^2}$.

Доказательство. Пусть AS – симедиана. Проведем к прямым AB и AC перпендикуляры d_c и d_b из середины M отрезка BC и перпендикуляры d'_c и d'_b из точки S (рис. 5). Так как площади треугольников ABM и ACM равны, то $c \cdot d_c = b \cdot d_b$, значит, $\frac{d_b}{d_c} = \frac{c}{b}$.

Среди прямоугольных треугольников с вершиной A есть две пары подобных: с катетами d_c и d'_c а также с катетами d'_c и d_b . Отсюда

следует, что $\frac{d'_b}{d'_c} = \frac{AS}{AM} = \frac{d'_c}{d_b}$, откуда $\frac{d'_c}{d'_b} = \frac{d_b}{d_c} = \frac{c}{b}$, и мы получили условие (2). Далее, треугольники ABS и ACS имеют общую высоту из вершины A , поэтому $\frac{BS}{CS} = \frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{c \cdot d'_c}{b \cdot d'_b} = \frac{c^2}{b^2}$, и мы вывели условия (3) и (5).

Предлагаем читателю разобраться с условием (4) самостоятельно.

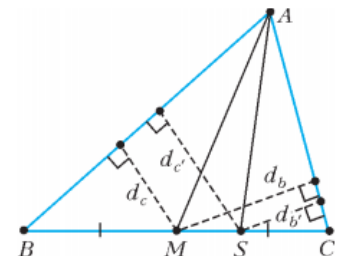


Рис. 5

Симедиана как геометрическое место точек

Пусть через вершину A треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону BC в некоторой точке R . Заметим, что при движении точки S по прямой AR отношение площадей треугольников ABS и ACS сохраняется и равно отношению перпендикуляров, проведенных к прямой AR из точек B и C (рис. 6). В частности

$\frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{S_{ABR}}{S_{ACR}}$. Отсюда несложно получить следующую характеристику точек, лежащих на симедиане.

Факт 3. Пусть точка S лежит внутри угла BAC . Тогда эквивалентны следующие условия: (1) прямая AS содержит симедиану, (2) $\frac{d(S; AB)}{d(S; AC)} = \frac{c}{b}$, (3) $\frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{c^2}{b^2}$, (4) $\frac{d(B; AS)}{d(C; AS)} = \frac{c^2}{b^2}$.

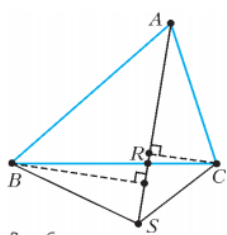


Рис. 6

Симедиана и подобие

В геометрических задачах очень часто возникает следующая конструкция.

Дан остроугольный треугольник ABC и точка X внутри него так, что $\angle BAX = \angle ACX$, $\angle CAH = \angle ABX$ (рис. 7).

Факт 4. В конструкции на рисунке 7 точка X лежит на симедиане.

Доказательство. Заметим, что треугольники ABX и CAX подобны. Следовательно, отношение высот этих треугольников, проведенных из точки X , равно отношению сторон AB и AC . Теперь остается воспользоваться условием (2) факта 3.

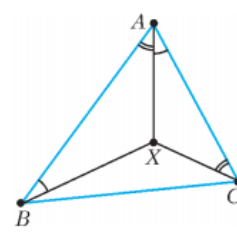


Рис. 7

Добавим в нашу старую конструкцию окружность, описанную около треугольника ABC , и точку D , лежащую на дуге BC , не содержащей точку A (рис. 8).

Факт 5. Прямая AD содержит симедиану треугольника ABC тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABDC$ гармонический.

Доказательство. Пусть прямая AD содержит симедиану. Из условия (3) факта 3 $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB^2}{AC^2}$. С другой стороны, поскольку четырехугольник $ABDC$ вписанный, получим $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB \cdot DB \cdot \sin \angle ABD}{AC \cdot DC \cdot \sin \angle ACD} = \frac{AB \cdot DB}{AC \cdot DC}$. Следовательно, $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, т.е. четырехугольник $ABDC$ гармонический.

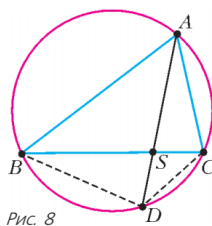


Рис. 8

Основная задача: симедиана и касательные

Продлим симедиану еще дальше. Оказывается, на ней лежит еще одна знакомая точка.

Факт 6. Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть касательные к окружности, проведенные в точках B и C , пересекаются в точке P . Тогда прямая AP содержит симедиану треугольника ABC (рис. 9).

Доказательство. Запишем отношение площадей и используем угол между касательной и хордой, равенство касательных и теорему синусов для треугольника ABC :

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{AB \cdot PB \cdot \sin \angle ABP}{AC \cdot PC \cdot \sin \angle ACP} = \frac{AB \cdot PB \cdot \sin \angle C}{AC \cdot PC \cdot \sin \angle B} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Мы приходим к условию (3) факта 3.

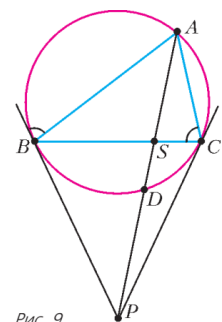


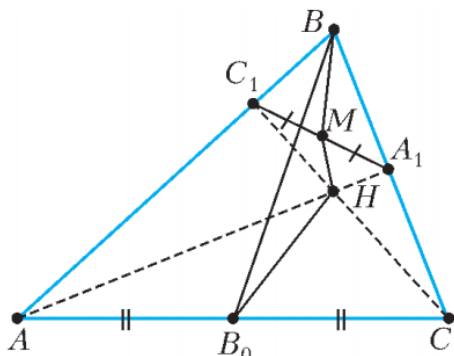
Рис. 9

Задача 1. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка B_0 – середина стороны AC . Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A_1C_1 .

Решение. Заметим, что A_1C_1 – отрезок, антипараллельный AC

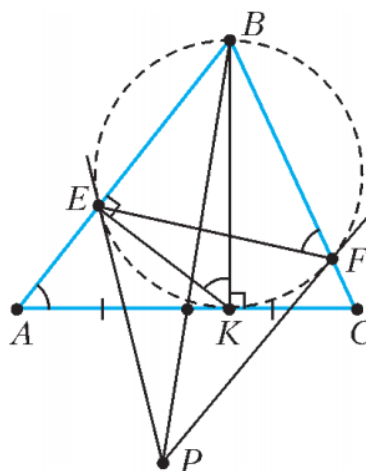
Из факта 1 следует, что прямая, симметричная BB_0 относительно биссектрисы угла ABC , проходит через середину A_1C_1 (точку M).

Аналогично, прямая, симметричная HB_0 относительно биссектрисы угла AHC , проходит через точку M .



Задача 2 (Всероссийская олимпиада по математике, 1995 год). В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность S , пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности S в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения P лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC , проведенную из вершины B .

Решение. Из основной задачи следует, что BP – симедиана в треугольнике BEF . Тогда достаточно доказать, что EF антипараллельна AC (см. факт 1). Действительно, $\angle BAK = \angle EKB = \angle EFB$, что и требовалось.



Задача 3 (Всероссийская олимпиада по геометрии, 2012). Дан треугольник ABC . Касательная в точке C к его описанной окружности пересекает прямую AB в точке D . Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K . Докажите, что прямая DK делит отрезок BC пополам.

Решение. Так как $\angle DCB = \angle BAC$, то BC – антипараллель к AC . Далее используем факт 1 и основную задачу.

