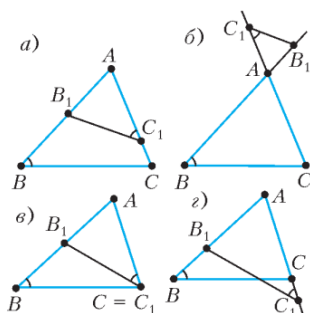


Антипараллельность

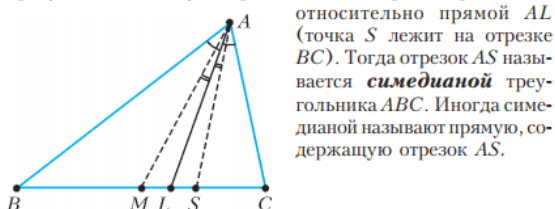
Для дальнейшего знакомства с симедианой нам потребуется одно важное понятие.

Пусть точки B_1 и C_1 лежат на прямых AB и AC . Говорят, что отрезки B_1C_1 и BC антипараллельны (относительно пары прямых AB и AC , или относительно угла BAC), если $\angle AC_1B_1 = \angle ABC$. Возможны различные случаи расположения антипараллельных отрезков.



- Отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда треугольники ABC и AC_1B_1 подобны (иначе говоря, один из этих треугольников можно перевести в другой, выполнив симметрию относительно биссектрисы угла A и затем гомотеию с центром в точке A).
- Пусть B_1, C_1, B, C - различные точки. Отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда B_1, C_1, B, C лежат на одной окружности.
- Пусть BB_1, CC_1 - высоты треугольника ABC . Отрезки B_1C_1 и BC антипараллельны.
- Пусть B_2 и C_2 - точки на прямых AB и AC такие, что отрезки BC и B_2C_2 . Отрезки B_2C_2 и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны.

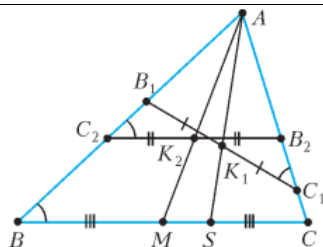
Рассмотрим треугольник ABC , его медиану AM и биссектрису AL .



Пусть прямая AS симметрична прямой AL (точка S лежит на отрезке BC). Тогда отрезок AS называется **симедианой** треугольника ABC . Иногда симедианой называют прямую, содержащую отрезок AS .

- Симедианы треугольника также пересекаются в одной точке. Точка пересечения симедиан называется точкой Лемуана.
- Через точку X , лежащую внутри треугольника ABC , проведены три отрезка, антипараллельные сторонам треугольника. Эти отрезки равны т. и т. т., когда X - точка Лемуана этого треугольника.
- В прямоугольном треугольнике точка Лемуана совпадает с серединой высоты, проведенной к гипотенузе.

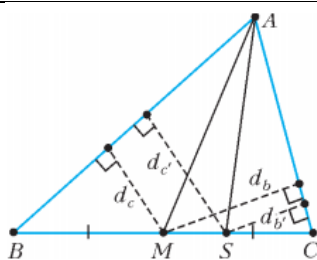
Оказывается, симедиана явно или неявно присутствует в огромном числе задач. Она связана с глубокими геометрическими идеями и преобразованиями (инверсия, поляр, двойные отношения). Однако мы постараемся выбирать наиболее доступные, «школьные» подходы. Итак,...



Как известно, медиана треугольника ABC делит пополам не только сторону, к которой она проведена, но и любой отрезок, параллельный этой стороне, с концами на двух других сторонах.

Оказывается, аналогичное утверждение с заменой параллельности на антипараллельность будет верно для симедианы.

Факт 1. В треугольнике ABC проведен отрезок B_1C_1 , антипараллельный стороне BC , с концами на прямых AB и AC соответственно. Прямая AS содержит симедиану треугольника ABC тогда и только тогда, когда она делит B_1C_1 пополам.



Известно, что медиана делит сторону и, соответственно, площадь треугольника пополам (или, что то же самое, расстояния от точки M до сторон треугольника обратно пропорциональны этим сторонам).

А в каком отношении делит сторону и площадь треугольника симедиана?

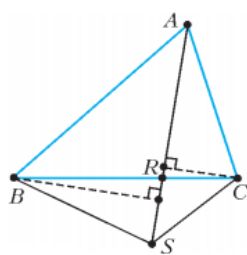
Используем стандартные обозначения для сторон треугольника $AB = c$, $AC = b$. Расстояние от точки X до прямой l будем обозначать $d(X, l)$.

Факт 2. Пусть точка S лежит на стороне BC треугольника ABC . Тогда эквивалентны следующие условия: (1) AS - симедиана, (2) $\frac{d(S; AB)}{d(S; AC)} = \frac{c}{b}$ (т.е. расстояния от точки S до сторон треугольника прямо пропорциональны этим сторонам), (3) $\frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{c^2}{b^2}$, (4) $\frac{d(B; AS)}{d(C; AS)} = \frac{c^2}{b^2}$, (5) $\frac{BS}{CS} = \frac{c^2}{b^2}$.

Комментарий. Иногда условие 5 используют в качестве определения симедианы.

Симедиана как геометрическое место точек

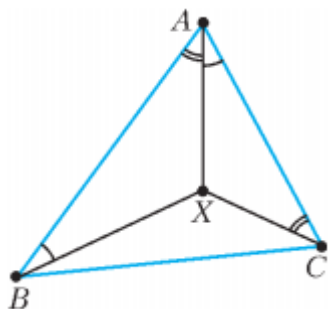
Пусть через вершину A треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону BC в некоторой точке R .



Заметим, что при движении точки S по прямой AR отношение площадей треугольников ABS и ACS сохраняется и равно отношению перпендикуляров, проведенных к прямой AR из точек B и C .

В частности $\frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{S_{ABR}}{S_{ACR}}$. Отсюда несложно получить следующую характеристику точек, лежащих на симедиане.

Факт 3. Пусть точка S лежит внутри угла BAC . Тогда эквивалентны следующие условия: (1) прямая AS содержит симедиану, (2) $\frac{d(S; AB)}{d(S; AC)} = \frac{c}{b}$, (3) $\frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{c^2}{b^2}$, (4) $\frac{d(B; AS)}{d(C; AS)} = \frac{c^2}{b^2}$.



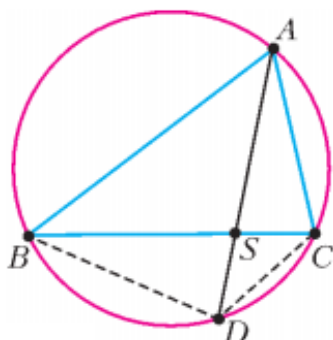
Симедиана и подобие

В геометрических задачах очень часто возникает следующая конструкция.

Дан остроугольный треугольник ABC и точка X внутри него так, что $\angle BAX = \angle ACX$, $\angle CAH = \angle ABX$.

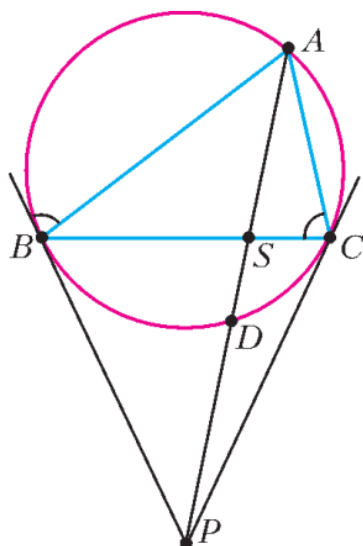
Факт 4. В конструкции на рисунке точка X лежит на симедиане.

Пусть симедиана AS треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D . Докажите, что точка X из факта 4 – середина отрезка AD .



Гармоническим называют вписанный четырехугольник, у которого произведения противоположных сторон равны.

Факт 5. Прямая AD содержит симедиану треугольника ABC тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABDC$ гармонический.



Основная задача: симедиана и касательные

Продлим симедиану еще дальше. Оказывается, на ней лежит еще одна знакомая точка.

Факт 6. Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть касательные к окружности, проведенные в точках B и C , пересекаются в точке P . Тогда прямая AP содержит симедиану треугольника ABC .