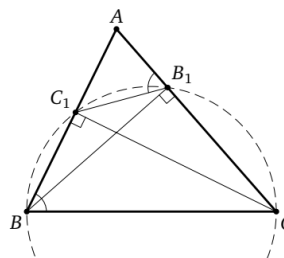


а) Если BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC , то треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC , причём коэффициент подобия равен $|\cos \angle A|$.

Противоположные углы CBC_1 и CB_1C_1 вписанного четырёхугольника BC_1B_1C в сумме составляют 180° , поэтому
 $\angle ABC = \angle C_1BC = 180^\circ - \angle CB_1C_1 = \angle AB_1C_1$.

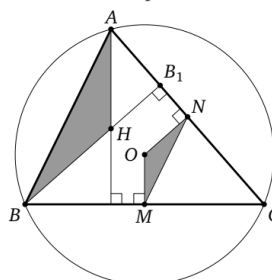


Треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC по двум углам. Пусть k — коэффициент подобия. Тогда

$$k = \frac{AC_1}{AC} = \cos \angle BAB_1 = \cos \angle BAC$$

б) Если H — точка пересечения высот треугольника ABC , а O — центр его описанной окружности, то отрезок AH вдвое больше расстояния от точки O до стороны BC .

Перпендикуляры OM и ON , опущенные из центра O описанной окружности на стороны соответственно BC и AC , проходят через середины этих сторон. Тогда MN — средняя линия треугольника ABC .



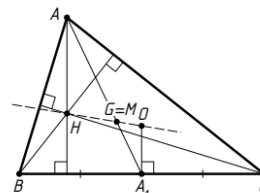
Значит, $MN \parallel AB$ и $MN = \frac{1}{2}AB$, а т.к. $OM \perp BC$ и $AH \perp BC$, то $OM \parallel AH$. Аналогично, $ON \parallel BH$. Треугольник AHB подобен треугольнику MON по двум углам, причём коэффициент подобия $\frac{AB}{MN}$ равен 2. Следовательно, $AH = 2OM$.

в) Точки O , H и точка M пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причём точка M лежит на отрезке OH и $OM : MH = 1 : 2$.

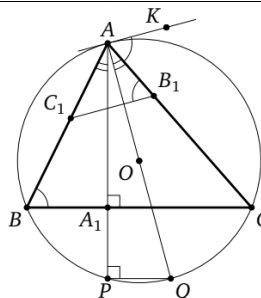
в) Пусть A_1 — середина стороны BC треугольника ABC , G — точка пересечения прямых AA_1 и OH . По доказанному в предыдущем пункте, $AH = 2OA_1$.
 Из подобия треугольников A_1GO и AGH следует, что

$$\frac{AG}{GA_1} = \frac{HG}{GO} = \frac{AH}{OA_1} = 2.$$

Следовательно, G — точка пересечения медиан треугольника ABC , т.е. G совпадает с M и $MH = 2MO$.



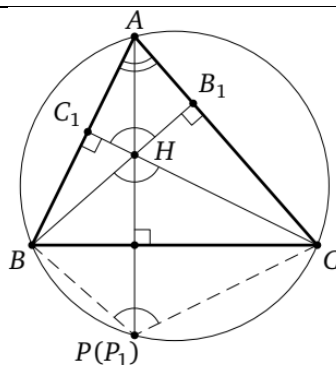
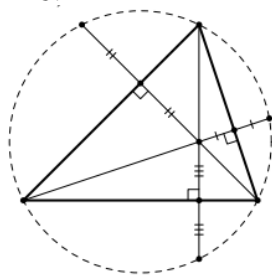
г) Если BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC , а O — центр описанной окружности, то $OA \perp B_1C_1$.



Пусть лучи AA_1 и AO пересекают описанную окружность в точках P и Q соответственно. Тогда $\angle APQ = 90^\circ$, поскольку точка P лежит на окружности с диаметром AQ . Хорды PQ и BC параллельны, т.к. они перпендикулярны одной и той же прямой AP , значит, заключённые между ними дуги CQ и BP равны. Тогда равны и опирающиеся на эти дуги вписанные углы CAQ и BAP . Следовательно, $\angle BAN = \angle CAO$.

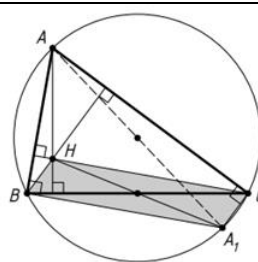
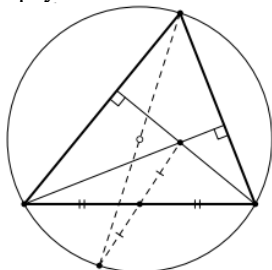
На касательной к описанной окружности треугольника ABC , проведённой через точку A , отметим такую точку K , что точки K и B лежат по разные стороны от прямой AC . Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle KAC = \angle ABC$. По ранее доказанному $\angle ABC = \angle AB_1C_1$, значит, $\angle KAC = \angle AB_1C_1$. Следовательно, $AK \parallel B_1C_1$, а поскольку $OA \perp AK$, получаем $OA \perp B_1C_1$.

д) Точки, симметричные точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника ABC относительно прямых AB , AC и BC , лежат на описанной окружности треугольника ABC .



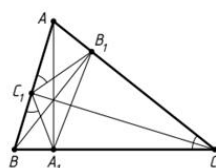
Заметим, что $\angle BHC = \angle B_1HC_1 = 180^\circ - \angle BAC$. Пусть P_1 — точка, симметричная ортоцентру H относительно прямой BC . Тогда $\angle BP_1C = \angle BHC$, поэтому $\angle BP_1C = \angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$. Значит, четырёхугольник ABP_1C — вписанный. Тогда точка P_1 лежит на описанной окружности треугольника ABC , а значит, совпадает с точкой P . Что и требовалось доказать. \square

е) Точки, симметричные точке пересечения высот треугольника ABC относительно середин его сторон, лежат на описанной окружности треугольника ABC



е) Пусть AA_1 — диаметр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Тогда $A_1C \perp AC$ и $BH \perp AC$, значит, $A_1C \parallel BH$. Аналогично, $A_1B \parallel CH$, поэтому четырёхугольник HBA_1C — параллелограмм. Следовательно, его вершина A_1 симметрична вершине H относительно середины диагонали BC .

ж) Если AA_1 , BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC , то биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ (ортоцентра треугольника ABC) лежат на прямых AA_1 , BB_1 и CC_1 . Если же треугольник ABC тупоугольный, то на этих прямых лежат биссектрисы двух внешних и третьего внутреннего углов треугольника $A_1B_1C_1$.



ж) Пусть A_1 , B_1 и C_1 — основания высот остроугольного треугольника ABC , проведённых из вершин A , B и C соответственно. Тогда

$$\angle AC_1B_1 = \angle ACB, \quad \angle BC_1A_1 = \angle ACB.$$

Поэтому

$$\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1.$$

Следовательно,

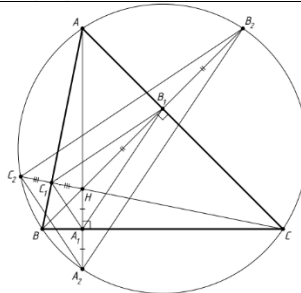
$$\angle B_1C_1C = 90^\circ - \angle AC_1B_1 = 90^\circ - \angle BC_1A_1 = \angle A_1C_1C.$$

Точно так же получаем

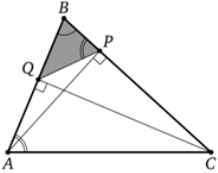
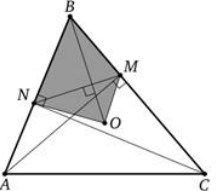
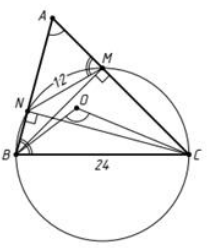
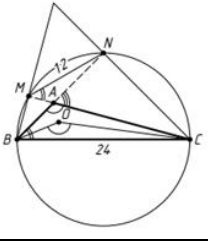
$$\angle A_1B_1B = \angle C_1B_1B, \quad \angle B_1A_1A = \angle C_1A_1A.$$

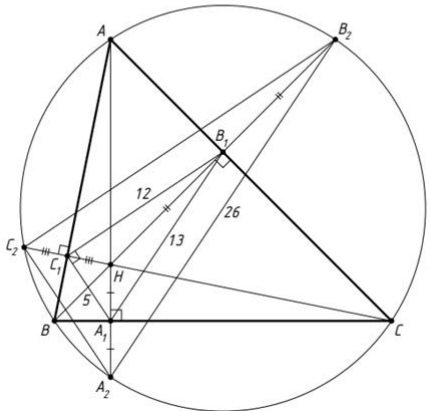
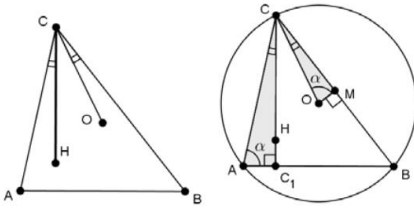
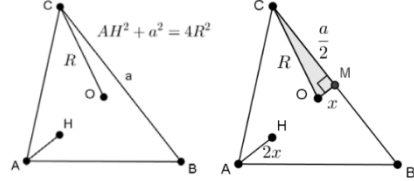
Аналогично можно доказать соответствующее утверждение для тупоугольного треугольника.

з) Пусть продолжения высот AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_2 , B_2 и C_2 соответственно, а H — точка пересечения высот. Тогда треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом 2.



A_1 , B_1 и C_1 — середины отрезков HA_2 , HB_2 и HC_2 , поэтому A_1B_1 , A_1C_1 и B_1C_1 — средние линии треугольников A_2HB_2 , A_2HC_2 и B_2HC_2 . Значит, треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом 2

1	<p>В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а $PQ = 2\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.</p> <p>Ответ: $\frac{9}{2}$.</p> <p>Решение. Треугольники BPQ и BAC подобны по двум углам. Поскольку отношение их площадей равно $\frac{2}{18} = \frac{1}{9}$, то коэффициент подобия равен $\frac{1}{3}$. Значит, $AC = 3PQ = 6\sqrt{2}$.</p>  <p>С другой стороны, коэффициент подобия равен $\frac{BP}{AB} = \cos \angle B$. Поэтому $\cos \angle B = \frac{1}{3}$. Тогда $\sin \angle B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Если R — радиус описанной окружности треугольника ABC, то по теореме синусов</p> $R = \frac{AC}{2 \sin \angle B} = 6\sqrt{2} : \left(2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{9}{2}. \quad \triangleleft$
2	<p>В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN, O — центр описанной около треугольника ABC окружности. Известно, что $\angle ABC = \beta$, а площадь четырёхугольника $NOMB$ равна S. Найдите AC.</p> <p>Ответ: $2\sqrt{S \operatorname{tg} \beta}$.</p> <p>Решение. Пусть $OB = R$ — радиус описанной окружности треугольника ABC. Тогда $OB \perp MN$ и $OB = R = \frac{AC}{2 \sin \beta}$.</p>  <p>Следовательно,</p> $S = \frac{1}{2} MN \cdot OB = \frac{1}{2} AC \cos \beta \cdot \frac{AC}{2 \sin \beta} = \frac{1}{4} AC^2 \operatorname{ctg} \beta.$ <p>Отсюда находим, что $AC = 2\sqrt{S \operatorname{tg} \beta}$. \triangleleft</p>
3	<p>В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O — центр вписанной окружности. Известно, что $BC = 24$, $MN = 12$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.</p> <p>Ответ: $8\sqrt{3}$ или 24.</p> <p>Решение. Из точек M и N сторона BC видна под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром BC.</p> <p>Пусть угол BAC — острый. Четырёхугольник $BNMC$ — вписанный, поэтому $\angle NBC = 180^\circ - \angle NMC = \angle AMN$.</p> <p>Треугольник AMN подобен треугольнику ABC по двум углам (угол A — общий), причём коэффициент подобия равен $\frac{AN}{AC} = \cos \angle BAC$. В то же время коэффициент подобия равен $\frac{MN}{BC} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$, поэтому $\cos \angle BAC = \frac{1}{2}$. Тогда $\angle BAC = 60^\circ$.</p> <p>Центр O окружности, вписанной в треугольник ABC, — точка пересечения биссектрис треугольника. Сумма углов при вершинах B и C треугольника ABC равна 120°, а сумма их половин (т.е. сумма углов при вершинах B и C треугольника BOC) равна 60°, значит, $\angle BOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.</p> <p>Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника BOC. По теореме синусов</p> $R = \frac{BC}{2 \sin \angle BOC} = \frac{24}{2 \sin 120^\circ} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}.$ <p>Пусть теперь угол BAC — тупой. Тогда вписанные углы CMN и CBN опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle AMN = \angle CMN = \angle CBN = \angle ABC$, значит, треугольник AMN подобен треугольнику ABC, причём коэффициент подобия равен $\frac{AN}{AC} = \cos \angle CAN$. В то же время коэффициент подобия равен $\frac{MN}{BC} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$, поэтому $\cos \angle CAN = \frac{1}{2}$. Значит, $\angle CAN = 60^\circ$. Следовательно,</p> $\angle BAC = 180^\circ - \angle CAN = 120^\circ,$ $\angle BOC = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 150^\circ.$  

4	<p>В треугольнике ABC известно, что $AB = 2$, $AC = 5$, $BC = 6$. Найдите расстояние от вершины B до точки пересечения высот.</p> <p>Ответ: $\frac{25}{\sqrt{39}}$.</p> <p>Решение. По теореме косинусов находим, что</p> $\cos \angle B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{4 + 36 - 25}{2 \cdot 2 \cdot 6} = \frac{5}{8}.$ <p>Тогда</p> $\sin \angle B = \sqrt{1 - \cos^2 \angle B} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{39}}{8}.$ <p>Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, R — её радиус, M — проекция центра на сторону AC, H — точка пересечения высот. Тогда $BH = 2OM$. По теореме синусов</p> $AO = R = \frac{AC}{2 \sin \angle B} = \frac{5}{2 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8}} = \frac{20}{\sqrt{39}}.$ <p>Следовательно,</p> $BH = 2OM = 2\sqrt{AO^2 - AM^2} = 2\sqrt{AO^2 - \frac{AC^2}{4}} = 2\sqrt{\frac{400}{39} - \frac{25}{4}} = \frac{25}{\sqrt{39}}.$
5	<p>Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.</p> <p>Ответ: 13.</p>  <p>Решение. Пусть продолжения высот AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно, $A_1B_1 = 13$, $B_1C_1 = 12$, $A_1C_1 = 5$, а H — точка пересечения высот. Тогда A_1, B_1 и C_1 — середины отрезков HA_2, HB_2 и HC_2 (см. [2], с. 154), поэтому A_1B_1, A_1C_1 и B_1C_1 — средние линии треугольников A_2HB_2, A_2HC_2 и B_2HC_2. Значит, треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом 2, а т. к. треугольник $A_1B_1C_1$ прямоугольный ($5^2 + 12^2 = 13^2$), то треугольник $A_2B_2C_2$ — также прямоугольный, причём его угол, лежащий против наибольшей стороны A_2B_2, равен 90°. Следовательно, диаметр описанной окружности треугольника $A_2B_2C_2$, а значит, и треугольника ABC, равен гипотенузе треугольника $A_2B_2C_2$, т. е. 26, а искомый радиус равен 13.</p>
6	 <p>Равенство нужных углов следует из того, что $\angle COM = \angle CAB = \alpha$.</p>
7	 <p>Из треугольника COM по теореме Пифагора $OC^2 = OM^2 + CM^2$. По свойству \S $OM = \frac{1}{2}AH$.</p> <p>Получим, что $R^2 = \frac{AH^2}{4} + \frac{a^2}{4}$, $4R^2 = AH^2 + a^2$.</p>