

Разные приемы при решении неравенств.

Преобразования.

Докажем неравенство между средним арифметическим и геометрическим: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$,

где $a \geq 0; b \geq 0$. Равенство при $a = b$.

$$\text{Действительно, } \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Выделение полного квадрата.

Пусть дан квадратный трехчлен $x^2 + px + q$. Преобразование

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} \text{ называется выделением полного квадрата по}$$

переменной x .

Пример. Пусть a, b, c, d - вещественные числа. Доказать, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a + b + c) \cdot d.$$

Решение:

Выделим последовательно полные квадраты по переменным a, b, c

Выделим полный квадрат по переменной a .

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - a \cdot d - b \cdot d - c \cdot d = \left(a - \frac{d}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}d^2 + b^2 + c^2 - b \cdot d - c \cdot d =$$

Выделим полный квадрат по переменной b .

$$= \left(a - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}d^2 + c^2 - c \cdot d =$$

Выделим полный квадрат по переменной c .

$$= \left(a - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}d^2 \geq 0$$

Отметим, что сумма квадратов неотрицательна.

Максимальное число.

Пусть требуется доказать неравенство для какого-либо набора переменных, например, для a_1, a_2, \dots, a_n . Во многих случаях бывает полезно рассмотреть максимальное среди чисел a_1, a_2, \dots, a_n

Пример. Пусть вещественные числа $a, b, c \in [0; 1]$. Доказать, что

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

Решение:

Можно считать, что a - максимальное среди чисел a, b, c . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} - 2 &\leq \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{bc+1} + \frac{c}{bc+1} - 2 = \\ &= \frac{a+b+c-2bc-2}{bc+1} = \frac{(b-1)(1-c) + (a-1) - bc}{bc+1} \leq 0 \end{aligned}$$

так как в числителе сумма отрицательных слагаемых, а знаменатель дроби положительный.

Введение вспомогательных переменных.

В некоторых неравенствах удачный выбор новых переменных значительно облегчает доказательство.

Пример: Пусть $a, b, c > 0$. Доказать, что $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Решение:

Обозначим $b+c = x, c+a = y, a+b = z$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{1}{2} \left(\frac{x+z-y}{y} + \frac{y+x-z}{z} + \frac{z+y-x}{x} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) - 3 \right) \geq \frac{1}{2} (2+2+2+3) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

В последнем переходе воспользовались неравенством Коши между средним арифметическим и средним геометрическим.

Тригонометрическая замена.

Суть тригонометрической подстановки состоит в том, что переменные, входящие в условия задачи выражения, рассматриваются как значения некоторых тригонометрических функций.

Пример. Найти наибольшее значение выражения $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$, где $x, y \in [-1; 1]$.

Решение:

Из-за условия $x, y \in [-1; 1]$ становится ожидаемой подстановка

$$x = \cos \alpha, y = \cos \beta, \alpha, \beta \in [0; \pi].$$

Тогда $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \cos \alpha \cdot \sin \beta + \cos \beta \cdot \sin \alpha = \sin(\alpha + \beta) \leq 1$. Равенство достигается при $x = 1, y = 0$.

Ответ: 1.

Промежуточная оценка.

При оценке некоторой суммы бывает полезно оценить каждое слагаемое в отдельности.

Пример. Докажите неравенство $1 < \frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} < 2$

для любых положительных a, b, c, d .

Решение:

Оценим снизу каждое слагаемое, входящее в левую часть.

$$\frac{a}{d+a+b} > \frac{a}{d+a+b+c}; \quad \frac{b}{a+b+c} > \frac{b}{a+b+c+d};$$
$$\frac{c}{b+c+d} > \frac{c}{b+c+d+a}; \quad \frac{d}{c+d+a} > \frac{d}{c+d+a+b}$$

Сложив эти четыре слагаемых, получим

$$\frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} > \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

Оценим сверху каждое слагаемое, входящее в левую часть.

Для этого сначала заметим, что для любого $x > 0$ и $0 < a < b$ верно $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$.

Действительно, домножим, на общий положительный знаменатель, перенесем в одну часть и приведем подобные слагаемые.

$$\frac{a}{b} - \frac{a+x}{b+x} < 0$$

$$(b+x)a - (a+x)b = ba + ax - ab - bx = x(a-b) < 0$$

Что верно, так как $0 < a < b$.

Тогда

$$\frac{a}{d+a+b} < \frac{a+c}{d+a+b+c}; \quad \frac{b}{a+b+c} < \frac{b+d}{a+b+c+d};$$

$$\frac{c}{b+c+d} < \frac{c+a}{b+c+d+a}; \quad \frac{d}{c+d+a} < \frac{d+b}{c+d+a+b}$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\begin{aligned} & \frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} < \\ & < \frac{(a+c) + (b+d) + (c+a) + (d+b)}{a+b+c+d} = 2 \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Пусть a, b – вещественные числа. Доказать, что $a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$
2. Пусть a, b, c – положительные числа. Доказать, что $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$
3. Пусть a, b, c – стороны треугольника. Доказать, что $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$
4. Докажите неравенство $-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$ для любых положительных x, y .

Решение задач для самостоятельного решения.

Задача 1.

Пусть a, b – вещественные числа. Доказать, что $a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$

Решение:

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} - \sqrt{3} = \left(b + \frac{1}{2a}\right)^2 + a^2 + \frac{3}{4a^2} - \sqrt{3} = \left(b + \frac{1}{2a}\right)^2 + \left(a - \frac{\sqrt{3}}{2a}\right)^2 \geq 0$$

Задача 2.

Пусть a, b, c – положительные числа. Доказать, что $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$

Первый способ:

Можно считать, что a – минимальное из чисел a, b, c .

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a) = \\ = (b-c)^2(b+c-a) + a(c-a)(b-a) \geq 0 \end{aligned}$$

Второй способ:

Без ограничения общности можно считать, что $a \leq b \leq c$.

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2b - ab^2 - b^2c - bc^2 - c^2a - ca^2 = \\ = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(a+c) = \\ = abc - (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \end{aligned}$$

Обозначим $a+b-c = x_1$; $a+c-b = x_2$; $b+c-a = x_3$; Если какое-то из $x_1; x_2; x_3$ не положительно, то неравенство очевидно. Пусть числа $x_1; x_2; x_3$ положительны, тогда $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) \geq 2\sqrt{x_1 \cdot x_2} \cdot 2\sqrt{x_2 \cdot x_3} \cdot 2\sqrt{x_3 \cdot x_1} = 8x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

Задача 3. Пусть a, b, c – стороны треугольника. Доказать, что

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Решение:

Обозначим $a+b-c = x_1$; $a+c-b = x_2$; $b+c-a = x_3$;

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_2+x_3}{x_1} + \frac{x_3+x_1}{x_2} + \frac{x_1+x_2}{x_3} \right) =$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда} &= \frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_2}{x_3} \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} \right) + \left(\frac{x_3}{x_1} + \frac{x_1}{x_3} \right) + \left(\frac{x_3}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} \right) \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} (2+2+2) = 3 \end{aligned}$$

Задача 4. Докажите неравенство $-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$ для любых положительных x, y .

Решение:

Выполним тригонометрическую замену. Пусть $x = \operatorname{tg} \alpha$; $y = \operatorname{tg} \beta$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} &= \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)} = \\ &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \sin 2(\alpha + \beta) \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos^2 \beta} \end{aligned}$$

Исходное неравенство переписывается в виде $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \sin 2(\alpha + \beta) < \frac{1}{2}$, т.е. $|\sin 2(\alpha + \beta)| < 1$, что верно.

Задача 5. Пусть a, b, c – положительные числа; $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$. Доказать,

$$\text{что } \max(a, b, c) - \min(a, b, c) \leq \sqrt{\frac{4}{3}(p^2 - 3q)}$$

Решение:

Без ограничения общности можно считать, что $a \leq b \leq c$

Обозначим $b - a = x_1$; $c - b = x_2$.

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}(p^2 - 3q) &= \frac{4}{3}\left((a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)\right) = \\ &= \frac{2}{3}\left((x_1+x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2\right)\end{aligned}$$

Итак, требуется доказать, что $x_1 + x_2 \leq \sqrt{\frac{4}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2)}$

Возводим обе части в квадрат и переносим все в правую часть, получим

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2) - (x_1 + x_2)^2 &= \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 - \frac{2}{3}x_1 \cdot x_2 = \\ &= \frac{1}{3}(x_1 - x_2)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Домашнее задание.

1. Пусть a, b, c - вещественные числа. Доказать, что

$$a^4 + b^4 + c^4 + 1 \geq (ab^2 - a + c + 1) \cdot 2a$$

2. Пусть вещественные числа $a, b, c \in [0; 1]$. Доказать, что

$$2(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a) \leq 3$$

3. Даны числа x, y , удовлетворяющие условию $x^8 + y^8 \leq 1$. Докажите неравенство

$$x^{12} - y^{12} + 2x^6y^6 \leq \frac{\pi}{2}$$

Решение домашнего задания.

1. Пусть a, b, c - вещественные числа. Доказать, что

$$a^4 + b^4 + c^4 + 1 \geq (ab^2 - a + c + 1) \cdot 2a$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + 1 - 2a^2b^2 + 2a^2 - 2ac - 2a = (b^2 - a^2)^2 + (c - a)^2 + (a - 1)^2 \geq 0$$

2. Пусть вещественные числа $a, b, c \in [0; 1]$. Доказать, что

$$2(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a) \leq 3$$

Покажем, что $0 \leq 3 - 2(a^3 + b^3 + c^3) + (a^2b + b^2c + c^2a)$.

Можно считать, что a - максимальное из чисел a, b, c . Рассмотрим два случая:

пусть $b \geq c$, тогда

$$\begin{aligned} 3 - 2(a^3 + b^3 + c^3) + (a^2b + b^2c + c^2a) &= \\ = 2(1 - a^3) + (1 - b^3) + b(a^2 - b^2) + c^2(a - c) + c(b^2 - c^2) &\geq 0 \end{aligned}$$

пусть $c \geq b$, тогда

$$\begin{aligned} 3 - 2(a^3 + b^3 + c^3) + (a^2b + b^2c + c^2a) &= \\ = 2(1 - a^3) + b^2(c - b) + b(a^2 - b^2) + (1 - c^3) + c^2(a - c) &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Даны числа x, y , удовлетворяющие условию $x^8 + y^8 \leq 1$. Докажите неравенство

$$x^{12} - y^{12} + 2x^6y^6 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Решение:

Заметим, что переменные x, y везде в четной степени, тогда достаточно рассмотреть только неотрицательные x, y .

Если положим $x^6 = u, y^6 = v$, то $x^{12} - y^{12} + 2x^6y^6 = u^2 - v^2 + 2uv$.

Конечно, нам бы хотелось сделать тригонометрическую подстановку, если взять u за косинус некоторого угла, а v за синус этого же угла, то разность квадратов будет косинусом двойного угла, а удвоенное произведение синусом двойного угла. Но, для этого должно было бы выполняться условие $u^2 + v^2 = 1$, а у нас условие $u^{\frac{4}{3}} + v^{\frac{4}{3}} \leq 1$.

Тогда скажем, что для любого числа $0 \leq k \leq 1$ верно $k(\sin^2 t + \cos^2 t) \leq 1$ и положим

$$x = \sqrt[6]{k \cos t} \text{ и } y = \sqrt[6]{k \sin t}, \text{ где } 0 \leq k \leq 1, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

По условию $1 \geq x^8 + y^8 = k^{\frac{4}{3}} \left(\cos^{\frac{4}{3}} t + \sin^{\frac{4}{3}} t \right) \geq k^{\frac{4}{3}} (\cos^2 t + \sin^2 t) = k^{\frac{4}{3}}$. Тогда

$$\begin{aligned}
 x^{12} - y^{12} + 2x^6 y^6 &= k^2 \cos^2 t - k^2 \sin^2 t + 2k \sin t \cdot k \cos t = k^2 (\cos^2 t - \sin^2 t + 2 \sin t \cos t) \leq \\
 1. \quad &\leq \cos 2t + \sin 2t = \sqrt{2} \sin \left(2t + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$