

Самостоятельная графомания.

1. На вечеринке собралось 24 человека. Гость считается <i>интровертом</i> , если у него не более трех знакомых среди остальных гостей. Оказалось, что у каждого гостя не менее трёх знакомых-интровертов. Какое количество интровертов могло быть на вечеринке? (Приведите все ответы и докажите, что других нет)	Лемма о рукопожатиях
2. В городе Джентльвилле живут 15 джентльменов, любые двое из которых либо дружат, либо враждуют. В какой-то момент каждый джентльмен попросил каждого из своих друзей послать открытку ненависти каждому из своих врагов (джентльмен А просит джентльмена В послать открытку всем врагам джентльмена В). Каждый из джентльменов выполнил все просьбы; при этом он посылал каждому из своих врагов такое количество открыток, сколько раз его об этом просили. Какое наибольшее количество открыток могло быть послано?	
3. Грани куба $5 \times 5 \times 5$ разбиты на клетки со стороной 1. Каждую клетку покрасили в красный, жёлтый или зелёный цвет так, что клетки, имеющие общую сторону, покрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество красных клеток могло быть?	Двудольный граф. Определение: граф называется двудольным, если множество его вершин можно так разбить на два подмножества (доли), чтобы каждое ребро соединяло вершины из разных подмножеств.
4. Чемпионат по футболу проходил в два круга. В каждом круге каждая команда сыграла с каждой один матч (за победу даётся три очка, за ничью одно, за поражение ноль). Оказалось, что все команды вместе набрали в первом круге 60% от общей суммы всех очков за два круга. Известно также, что победитель чемпионата набрал во втором круге в 30 раз меньше очков, чем все команды вместе в первом круге. Сколько команд участвовало в турнире?	
5. Про натуральные числа X , Y и Z известно, что они различны и не превосходят 100. Мы можем выписать любую последовательность $\{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$, содержащую все натуральные числа от 1 до 100. Какое наименьшее число последовательностей нужно выписать, чтобы среди них наверняка имелаась такая, в которой два или три подряд идущих члена принадлежат множеству $\{X; Y; Z\}$?	
6. Промежуток из одного или несколько подряд идущих дней назовём нечётным, если нечётное число из этих дней были дождливыми. Каково наибольшее возможное число нечётных промежутков в июле?	
7. В группе из 80 человек некоторые знакомы друг с другом (знакомства взаимны). Известно, что в группе есть человек, который знает ровно 1 из оставшихся, человек, который знает ровно 2 из оставшихся, ..., человек, который знает ровно 54 из оставшихся. Докажите, что в группе есть три человека, каждые два из которых знакомы.	