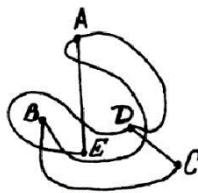
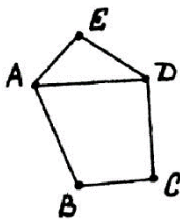
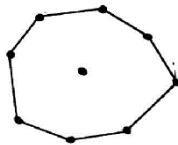
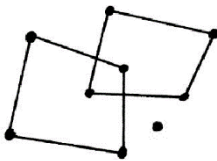


Немного про теорию графов. Часть 2.

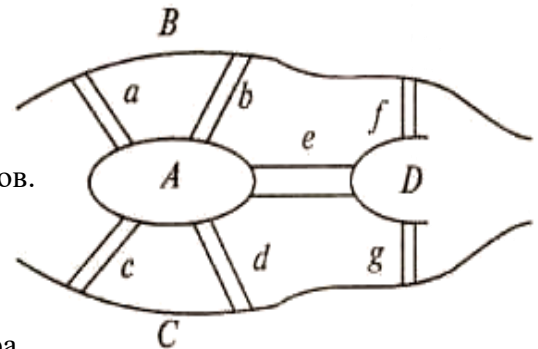
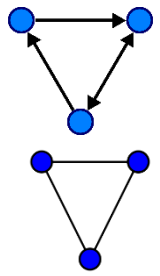
- В некоторых случаях на ребрах графа выбирается «направление движения» (например, когда на автомобильной дороге вводится одностороннее движение). При этом получается **ориентированный граф**. (Если направление движения по ребрам не определено, то граф называется **неориентированным**).
- Ориентированный граф** – граф, рёбрам которого присвоено направление.
- Неориентированный граф** – граф, ни одному ребру которого не присвоено направление.
- Два графа называются **изоморфными**, если у них
 - одинаковое число вершин (обозначим его n)
 - и вершины каждого из них можно занумеровать так числами от 1 до n , что в первом графе две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда вершины с такими же номерами во втором графе соединены.
- Пример изоморфных графов** (по определению):



- Пример неизоморфных графов** (разное число компонент связности):



- О знаменитой задаче о Кенигсбергских мостах, сформулированной Леонардом Эйлером в 1736 году.**
- Издавна среди жителей Кенигсберга была распространена такая загадка: как пройти по всем городским мостам (через реку Преголя), не проходя ни по одному из них дважды?
- Для решения этой задачи давайте переведем ее на язык графов.
- Острова здесь будут вершинами, а мосты – ребрами.
- Тогда как переформулируется сам вопрос задачи?
- Дан псевдограф без петель, как на рисунке.
- Существует ли в нем путь, проходящий по всем ребрам графа единожды?
- Эйлеровым путем** называется такой путь в графе, проходящий через каждое ребро графа ровно один раз. Аналогично вводится понятие **эйлерова цикла**.
- Если в графе существует эйлеров путь или цикл, то такой граф называют **эйлеровым** (или **уникурсальным**).
- Оказывается, и тут не все гладко – иногда эйлеровым называют только тот граф, в котором есть эйлеров цикл. Если же в графе есть эйлеров путь, то такой граф иногда называют **полуэйлеровым**.
- Итак, если граф уникурсален, то по всем его ребрам можно пройти, посещая каждое ровно один раз. Ничего не напоминает? Это задачи вида **«Нарисуйте картинку, не отрывая карандаша от бумаги»**.
- Идея №4.** Важно понимать, что хоть формальное определение эйлерова графа и не требует его связности, в случае несвязного графа речь идет о существовании соответствующих пути или цикла в каждой компоненте по отдельности, и об «неотрывании карандаша» речи уже не идет.
- Но когда граф является эйлеровым?** Оказывается, что, хоть само ограничение на путь и очень сильное, проверка существования такого пути весьма проста.



- Пусть в графе нашелся эйлеров путь. Давайте рассмотрим какую-нибудь из его внутренних вершин. По какому-то одному ребру мы в нее зашли, и по какому-то другому – вышли. Тем самым получается, что однократное посещение одной вершины «удаляет» два ребра. Что тогда можно сказать о степени данной вершины? Действительно, она должна быть четной! А что происходит у крайних (или конечных) вершин? Действительно, у них степень может быть нечетной.
- Теорема (об эйлеровом пути). Если в графе есть эйлеров путь, в нем ровно две нечетных вершины (то есть вершины с нечетной степенью).
- А что меняется в случае наличия эйлерова цикла? Действительно, крайние вершины совпадают, а значит, и у нее степень тоже четная.
- Теорема (об эйлеровом цикле). Если в графе есть эйлеров цикл, в нем все вершины – четные.
- А можно ли как-то объединить эти две теоремы в одну теорему про эйлеров граф?
- Теорема (об эйлеровом графе). Граф является эйлеровым, если в нем не более двух нечетных вершин.
- Замечание. В графе не может быть одной нечетной вершины!
- Итого: некоторые свойства графов:
 - В классическом графе степень вершины всегда меньше количества вершин графа.
 - Теорема (об одинаковых степенях). В любом графе с n вершинами, где $n \geq 2$, всегда найдутся хотя бы две вершины с одинаковой степенью.
 - Лемма (о рукопожатиях). В графе сумма степеней всех его вершин – число чётное.
 - Сумма степеней всех его вершин равна удвоенному числу рёбер графа.
 - Число нечётных вершин любого графа чётно.
 - Если в графе с n вершинами ($n > 2$) в точности две вершины имеют одинаковую степень, то в этом графе всегда найдётся либо в точности одна вершина степени 0, либо в точности одна вершина степени $n-1$.
 - Если полный граф имеет n вершин, то количество рёбер будет равно $\frac{n(n-1)}{2}$.
 - Если все вершины графа чётные, то можно, не отрывая карандаша от бумаги, начертить граф, при этом можно начинать с любой вершины графа и завершить его в той же вершине.
 - Граф с двумя нечётными вершинами возможно начертить одним росчерком, при этом следует начать с одной из двух нечётных вершин и завершить граф в другой.
 - Граф более чем двумя нечётными вершинами невозможно начертить одним росчерком.
 - ...

Итак, графы существуют везде, все мы неожиданно сталкивались с ними, когда рисуем или играем. Они встречаются на картах дорог, созвездий, при построении схем и чертежей. Графы лежат в основе многих компьютерных программ, которые делают возможными современную коммуникацию и технологические процессы. Графы способствуют развитию мышления как логического, так и абстрактного. При решении задач, наверное, нам не раз приходилось изображать объекты точками, соединять их отрезками или стрелками, при этом для решения задачи был использован специальный математический аппарат, а именно была применена теория графов. Исторически сложилось так, что теория графов зародилась двести с лишним лет назад именно в ходе решения головоломок. Толчок же к развитию теории графов получила сравнительно недавно на рубеже XIX–XX столетий, когда резко выросло число работ в области топологии и комбинаторики. Как отдельная математическая дисциплина теория графов была впервые представлена в 30 годы XX столетия.

Отличаясь простотой теоретических сведений, наглядностью и доступностью, теория графов может с пользой выступить в роли учителя уже на раннем этапе обучения. С помощью этой теории можно решить на доступном уровне ряд достаточно сложных задач.

Графо - продолжение следует...

До новых графо – встреч!

