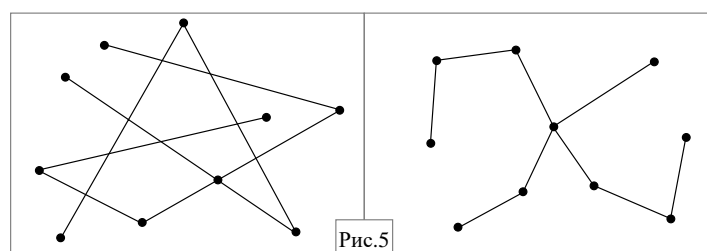
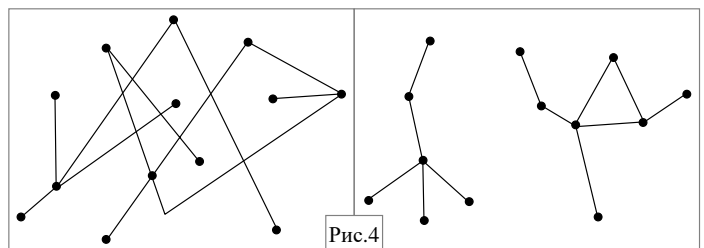
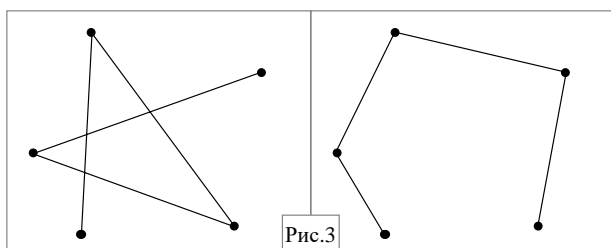
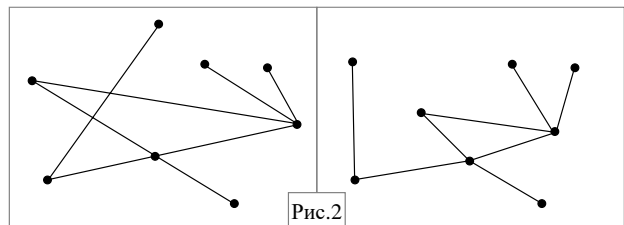
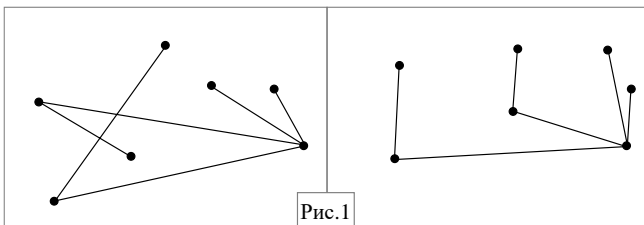


Графы. Деревья.

<p>Теорема (об одинаковых степенях).</p> <p>В любом графе всегда найдутся хотя бы две вершины с одинаковой степенью.</p>	<p>Теорема (свойства деревьев):</p> <p>а) В дереве с n вершинами ровно $n-1$ ребро. б) Если в связном графе $n-1$ ребро, то это – дерево.</p>
<p>Лемма о рукопожатиях.</p> <p>Сумма степеней всех вершин графа чётна.</p>	<p>Теорема (об эйлеровом пути). Если в графе есть эйлеров путь, в нем ровно две нечетных вершины (то есть вершины с нечетной степенью).</p>
<p>Теорема (о сумме степеней вершин). Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу его ребер.</p> <p>Следствие: количество вершин с нечетной степенью – четно.</p>	<p>Теорема (об эйлеровом цикле). Если в графе есть эйлеров цикл, в нем все вершины – четные.</p>
<p>В графе с n вершинами не может быть больше ребер, чем в соответствующем полном графе.</p>	<p>Теорема (об эйлеровом графе). Граф является эйлеровым, если в нем не более двух нечетных вершин.</p>

1. Какие из этих графов являются деревьями?



2. В некоторой стране 30 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы по оставшимся дорогам из каждого города можно было проехать в каждый?
3. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.
4. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×200 клеток. Какое наибольшее число веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?
5. Можно ли раскрасить ребра куба в два цвета так, чтобы по ребрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую?
6. У Царя Гвидона было 5 сыновей. Среди его потомков 100 имели каждый ровно по 3 сына, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?
7. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?
8. Деревни некоторой языческой страны соединены дорогами так, что от любой деревни можно добраться до любой другой не проходя ни через какую деревню дважды, причём сделать это можно единственным способом. В каждой деревне живет свое племя туземцев. Каждое племя поклоняется одному из трёх идолов: Камню, Ножницам или Бумаге. Известно, что Камень сильнее Ножниц, Ножницы сильнее Бумаги, а Бумага сильнее Камня. Каждое племя желает, чтобы их идол был не слабее, чем идол любого из соседствующих с ними племен. С этой целью каждый вечер ровно в 20:24 каждое племя смотрит на своих соседей и, если обнаруживает соседа с более сильным идолом, меняет свои верования, начиная поклоняться этому более сильному идолу. Верно ли, что рано или поздно все племена начнут верить в одного и того же идола?