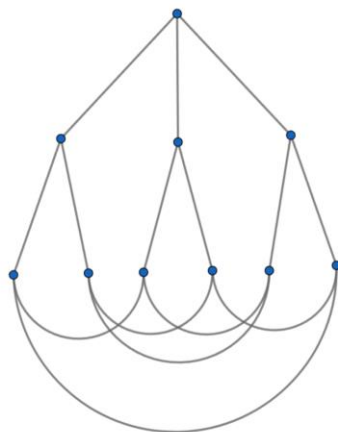


<p>На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Некоторые жители острова дружат друг с другом (дружба взаимна). Утром каждый житель острова заявил, что дружит с нечётным числом рыцарей. Вечером каждый житель острова заявил, что дружит с чётным числом лжецов. Может ли количество жителей этого острова быть равно 2025 ?</p>	<p>Лемма о рукопожатиях (чётность числа нечётных вершин)</p>
<p>В стране 400 городов. Некоторые из них соединены авиалиниями, а некоторые нет. Известно, что для любых 200 городов найдётся 300 пар городов, не соединённых авиалиниями. Какое наибольшее количество авиалиний может быть в стране?</p>	<p>Подсчет рёбер, неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим</p>
<p>Можно ли нарисовать треугольник и его 1) одну, 2) две медианы, не отрывая руки?</p>	<p>Эйлеров граф</p>

**Задача номер ноль:**

В графе степени всех вершин равны 3 и между любыми двумя вершинами существует путь длиной не более 2. Какое наибольшее число вершин может быть в этом графе?



Решение номера ноль:

Рассмотрим вершину А. Она соединена с тремя вершинами В, С и D. Получается, что все остальные вершины должны быть соединены с какой-то из вершин В, С или D иначе между ними и А не будет пути длиной не более 2. Вершины В, С, D могут быть соединены суммарно не более чем с 6 вершинами помимо А. Значит, всего не более 10 вершин.

Решения:

- 1) Рассмотрим граф, каждая вершина — рыцарь либо лжец. Ребро — дружба. Утренняя подгруппа:  $p$ -р говорит о том, что количество рыцарей чётно (каждый рыцарь дружит хотя бы с 1, значит, все вершины  $p$  вошли в этот подграф) - из вершин-рыцарей исходит нечётное количество рёбер. Вечерняя подгруппа л-л говорит о том, что количество лжецов чётно. (Аналогичное рассуждение). Тогда всего вершин тоже чётное количество и их не может быть 2025.

Рассмотрим граф, в котором города — вершины, а авиалинии — рёбра. Рассмотрим подграф  $A$  из 200 вершин с наибольшим количеством рёбер и подграф  $B$  из оставшихся 200 вершин. Пусть вершина  $X$  из подграфа  $A$  соединена с наименьшим количеством вершин в этом подграфе ( $x$  вершин). Предположим, что в подграфе  $B$  имеется вершина  $Y$ , которая соединена с хотя бы  $x + 1$  вершиной из подграфа  $A$ . В таком случае вершину  $Y$  можно переместить в подграф  $A$  вместо вершины  $X$  и в нём будет больше авиалиний, что противоречит выбору подграфа  $A$ . Следовательно, любая вершина из подграфа  $B$  связана не более чем с  $x$  вершинами из подграфа  $A$ . Значит, между этими подграфами не более  $200x$  рёбер. Внутри же каждого из этих подграфов не более  $\frac{200 \cdot 199}{2} - 300 = 19600$  рёбер. Значит, всего в графе не более  $2 \cdot 19600 + 200x = 39200 + 200x$ . Как известно,  $x$  — это наименьшая степень вершины в подграфе  $A$ . Значит, в  $A$  не менее  $\frac{200x}{2} = 100x$  рёбер. С другой стороны, в этом подграфе не более 19600 рёбер, откуда  $x \leq 196$ . Теперь мы можем оценить количество рёбер в графе:  $39200 + 200x \leq 78400$ .

2)

Приведём пример на 78400 рёбер. Разбиваем города на 50 групп по 8 городов. Внутри групп между городами авиалиний нет, а между городами из разных групп — есть.  
 Пусть выбрано 200 городов так, что из них  $a_1$  город из первой группы,  $a_2$  из второй,  $\dots$ ,  $a_{50}$  — из 50-й. Тогда количество пар, не соединённых авиалиниями, будет не менее

$$\frac{a_1(a_1 - 1)}{2} + \frac{a_2(a_2 - 1)}{2} + \dots + \frac{a_{50}(a_{50} - 1)}{2} = \frac{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{50}^2) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{50})}{2} = \frac{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{50}^2) - 200}{2}$$

по неравенству между средним квадратическим и средним арифметическим

$$\frac{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{50}^2) - 200}{2} \geq \frac{800 - 200}{2} = 300$$

Мы показали, что для произвольного подграфа в примере выполняется условие задачи.

Ответ: 78400

Подсчет числа рёбер для 8-к :  $8 \cdot 49 \cdot 8 \cdot 50 / 2 = 78400$

$$0 \leq a_i \leq 8$$

Нужно уточнить применение неравенства о средних

- 3) 1) Это сделать нетрудно, обведя треугольник от вершины, из которой исходит медиана, до нее же и провести последний отрезок из конечной вершины — медиану.

2) Рассмотрим картинку как граф: вершины — точки пересечения отрезков, ребра — отрезки между точками (ближайшими на отрезке). И, следовательно, нам нужно найти эйлеров путь в таком графе, чтобы нарисовать картинку, не отрывая руки. Но в нашем графе ровно 4 вершины нечетной степени (а именно третьей), значит, в таком графе нет эйлерова пути (по нашей лемме).

Ответ: 1) Можно, 2) нельзя