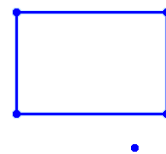
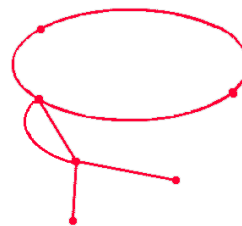
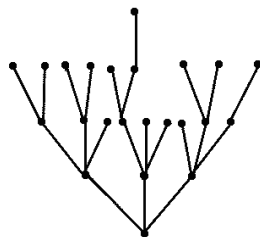


## Немного про теорию графов. Часть 1.

- Основателем теории графов считается Леонард Эйлер. Именно он в середине XVIII века впервые сформулировал знаменитую задачу о Кенигсбергских мостах, о которой мы с вами позднее поговорим.
- Что же такое граф?

- Графом** называется непустое множество точек и множество отрезков, оба конца которых принадлежат заданному множеству точек.



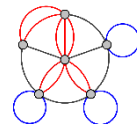
- Точки называются **вершинами** графа,
- а соединяющие линии – **рёбрами**.
- В принципе, на этом определение графа и заканчивается, однако можно ввести множество дополнительных условий и ограничений, уточняя определение.

- Будем называть **классическим** такой граф, в котором выполнено несколько условий:

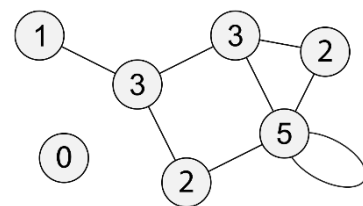
- каждое ребро соединяет ровно две вершины;
- между любыми двумя вершинами проведено не более одного ребра (иными словами, нет кратных ребер);
- нет петель – ребер, начинающихся и заканчивающихся в одной и той же вершине.



- Граф, в котором есть кратные ребра и/или петли, называют **псевдографом**. Псевдограф без петель называют графом с кратными ребрами или **мультиграфом**. В дальнейшем мы будем рассматривать только **классические** графы, если не будет оговорено противное.
- Раздел, изучающий классические графы, называется классической теорией графов. Именно с ней мы с вами и познакомимся.



- Идея №1.** Для использования теории графов при решении задач необходимо сперва ввести сам граф, с которым вы будете далее работать – то есть, четко сформулировать, что есть вершины, а что есть ребра!
- Для работы с графами – будь то изучение их свойств, или какое-либо сравнение – нам потребуется числовая характеристика. Проще всего ввести таковую оказывается для вершин графа.
- Степенью вершины** будем называть количество ребер, соединенных с этой вершиной.
- Степень вершины – или натуральное число, или 0.
- Если степень вершины равна 0, то такая вершина называется **изолированной**.



- В классическом графе степень вершины всегда меньше количества вершин графа.**
- Теорема (об одинаковых степенях).** В любом графе всегда найдутся хотя бы две вершины с одинаковой степенью.
- (Раз степень вершины – это количество ребер, выходящих из нее, то получается, что каждое ребро увеличивает степень двух вершин. Эта мысль приводит нас к первому важному факту теории графов, исторически известному как...

- Лемма о рукопожатиях.** Сумма степеней всех вершин графа четна.

**Доказательство.** Степень вершины – это количество выходящих из нее ребер. Тогда сумма степеней всех вершин – это количество концов ребер, которых у каждого ребра по две штуки, чтд.

- К какой же теореме тогда относится эта лемма?

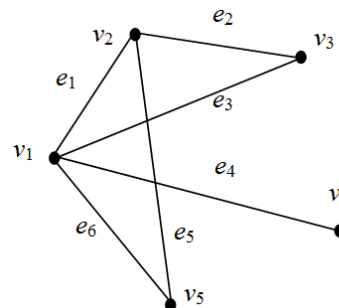
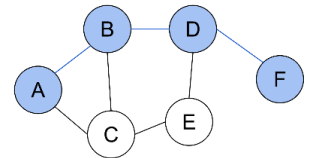
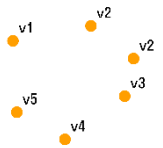
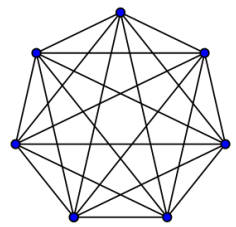
**Теорема (о сумме степеней вершин).** Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу его ребер.

Из этой теоремы также оказывается полезно вывести...

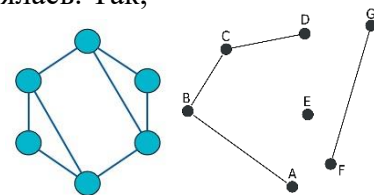
- Следствие:** количество вершин с нечетной степенью – четно.

- Идея №2.** Эта теорема работает только в одну сторону! Если сумма степеней вершин графа четна, это еще не означает, что такой граф действительно существует.

- **Полным** графом называют граф, в котором проведены все возможные ребра, или, иными словами, степень каждой вершины максимальна. Полный граф обозначают  $K_n$ , где  $n$  – количество вершин.
- **В графе с  $n$  вершинами не может быть больше ребер, чем в соответствующем полном графе.**
- **Пустым** графом (или **нуль-графом**) называют граф, в котором нет ни одного ребра, или, иными словами, степени всех вершин равны 0.
- **Идея №3.** Зачем вообще изначально вводили графы? Для решения различных задач о способах добраться из пункта А в пункт Б по имеющимся дорогам.
- Будем называть **путем** в графе последовательность **смежных ребер**, позволяющую добраться из одной вершины до другой.
- **Смежными** называют ребра, имеющие общую вершину.
- Если же начало и конец пути совпали, то такой путь называют **циклическим**.
- **Цепь** – такой путь, в котором каждое ребро встречается не более одного раза.
- **Цикл** – такой циклический путь, в котором каждое ребро встречается не более одного раза.
- Можно также потребовать, чтобы и вершины встречались в цепи не более одного раза. Такую цепь называют **простой цепью**. Аналогично вводят и **простой цикл**.
- Здесь очень важно понимать, что, хоть теории графов уже вот-вот стукнет 300 лет, терминология до сих пор не совсем устоялась. Так, иногда путь называют маршрутом, а цепь – путем:) Поэтому, для простоты, давайте просто договоримся, что под «путем» будем понимать цепь.
- Граф называют **связным**, если между любыми двумя его вершинами есть путь. В противном случае граф называют **несвязным**.
- **Компонентой связности** несвязного графа называют такой его **подграф**, в котором есть путь между любыми двумя его вершинами и нет пути до любой из вершин, в этот подграф не вошедших. Иными словами, если есть вершина  **$x$** , из которой можно добраться до вершины  **$y$** , входящей в компоненту связности  **$G_1$** , то и вершина  **$x$**  принадлежит этой компоненте.
- **Подграфом** называют часть графа  **$G$** , в которую входят некоторые вершины этого графа и некоторые из его ребер, проходящих между выбранными вершинами.
- Изолированная вершина является компонентой связности.
- Некоторые выводы:



$G(V, E)$  – граф  
 $v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_1e_1v_2e_5v_5$  или  
 $v_1v_2v_3v_1v_2v_5$  – маршрут  
 $v_1v_2v_3v_1v_5$  – цепь  
 $v_1v_3v_2v_5$  – простая цепь  
 $v_1v_3v_2v_5v_1$  – простой цикл



Графы – это замечательные математические объекты, с помощью, которых можно решать непростые математические (и не только!) задачи на “удобном” языке.

В математике даже есть специальный раздел, который так и называется: «**Теория графов**».

И мы начинаем знакомиться с теорией графов!

Наш диалог о графах продолжится!

До новых графовстреч!