

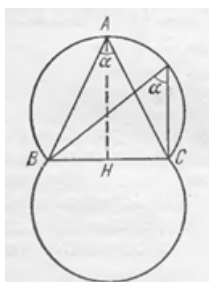
Разминка: Можно ли в круге радиуса 10 поместить 400 точек так, чтобы расстояние между каждыми двумя было больше 1?

Решение: В круг радиуса 10 нельзя поместить 400 кругов диаметра 1, не налегающих друг на друга, так как сумма их площадей $400 \cdot \frac{\pi}{4}$ равна площади круга $100 \cdot \pi$.

1. Дан треугольник ABC . Где в его плоскости надо выбрать точку M , чтобы сумма радиусов окружностей, описанных около треугольников ABM и BCM , была наименьшей?

Решение: Диаметры окружностей, о которых говорится в условии, не могут быть меньше хорд AB и BC соответственно. Точка M – основание высоты BM треугольника ABC (прямой угол опирается на диаметр).

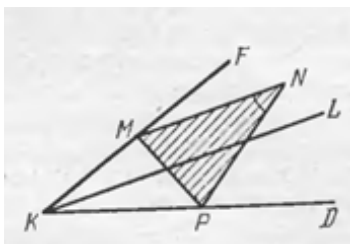
2. Докажите, что среди всех треугольников с данным основанием a и углом α при вершине, противолежащей основанию, наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.



Решение: Геометрическое место вершин треугольников, имеющих данное основание и данный угол при вершине, противолежащей основанию, – это дуги сегментов, вмещающих угол α .

Среди таких треугольников равнобедренный имеет наибольшую высоту AH .

3. Дан угол K . Двумя отрезками MN и NP длины 1 отрежьте от него четырехугольник $KMNP$ наибольшей площади.



Ответ: Отрезки следует расположить так, чтобы их общая точка лежала на биссектрисе угла, а перпендикуляры к их серединам проходили через вершину угла.

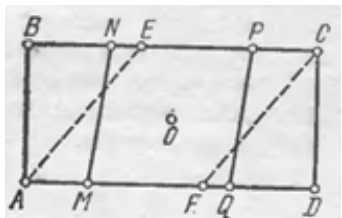
Решение:

Площадь четырехугольника $KMNP$ равна сумме или разности площадей треугольников KMP и MNP . Будем двигать треугольник

MNP так, чтобы вершины M и P скользили по сторонам угла. Тогда площадь треугольника MNP не меняется. При этом площадь четырехугольника достигает максимума одновременно с площадью треугольника KMP , т.е. тогда, когда треугольник KMP станет равнобедренным ($KM=KP$).

Точка N окажется на биссектрисе KL угла K . Значит задача сведена к случаю, когда точка N лежит на KL . В этом случае площадь четырехугольника $KMNP$ равна сумме площадей равных треугольников NKP и MKN с основаниями $NP=MN=1$. Эти треугольники имеют наибольшую площадь, когда они равнобедренные, т.е. $KM=KN=KP$.

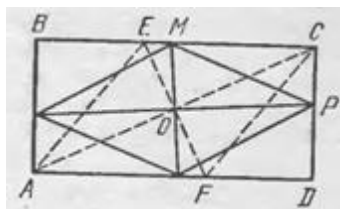
4. Как из прямоугольника вырезать ромб наибольшей площади?



Ответ: Наибольшую площадь имеет ромб, одна из диагоналей которого совпадает с диагональю прямоугольника, а концы другой лежат на сторонах прямоугольника.

Решение: Пусть $AECF$ – ромб, указанный в ответе. Докажем, что всякий другой ромб имеет меньшую площадь. Пусть $ABCD$ – данный

прямоугольник, AD и BC – его большие стороны, и пусть в прямоугольник помещен некоторый ромб.



Через центр прямоугольника проведем прямые, параллельные диагоналям ромба, до пересечения со сторонами прямоугольника в точках M, N, P, Q . Получим новый ромб $MNPQ$, площадь которого не меньше площади исходного ромба и вершины которого лежат на сторонах $ABCD$. Докажем, что площадь ромба $MNPQ$ не больше площади ромба $AECF$.

Когда все вершины ромба $MNPQ$ лежат на больших сторонах прямоугольника, это верно, поскольку ромбы имеют одинаковую высоту AB (рисунок 1), а сторона MN меньше AE (?!). Когда все вершины этого ромба лежат на разных сторонах прямоугольника, это верно потому, что диагонали ромба соответственно меньше диагоналей ромба $AECF$ (рисунок 2, $MO < EO$, $PO < CO$).

5. Дан выпуклый многоугольник M , который можно разрезать на 1292 квадрата площади 1. Какое наибольшее и наименьшее значение может иметь периметр этого многоугольника?

Сумма углов выпуклого n -угольника: $S_{\text{углов}} = 180^\circ \cdot (n - 2)$

Каждая вершина выпуклого многоугольника « M » является вершиной не более, чем одного квадрата: $S_{\text{углов}} = 90^\circ \cdot n$

$$180^\circ \cdot (n - 2) = 90^\circ \cdot n$$

$$n = 4$$

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$ стороны многоугольника

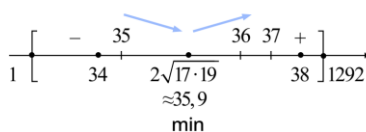
$$1 \leq a, b \leq 1292 \quad P = 2(a + b) = 2 \left(a + \frac{1292}{a} \right)$$

$$S = a \cdot b = 1292$$

$$b = \frac{1292}{a} \quad \text{Рассмотрим} \quad f(a) = a + \frac{1292}{a} \quad 1 \leq a \leq 1292$$

Найдем наибольшее и наименьшее значение $f(a) = a + \frac{1292}{a}$ при $1 \leq a \leq 1292$

$$f'(a) = 1 + \frac{1292}{a^2} = 0; \quad a = \pm \sqrt{1292}$$



$$f(34) = 34 + \frac{1292}{34} = 72;$$

$$f(38) = 38 + \frac{1292}{38} = 72;$$

$$1292 = 2^2 \cdot 17 \cdot 19$$

$$34 = 17 \cdot 2$$

$$38 = 19 \cdot 2$$

$$P_{\text{наим}} = 2 \cdot \left(a + \frac{1292}{a} \right) = 2 \cdot 72 = 144$$

$$f(1) = f(1292) = 1293$$

$$P_{\text{наиб}} = 2 \cdot \left(a + \frac{1292}{a} \right) = 2 \cdot 1293 = 2586$$

Ответ: Наименьшее значение 144, например, в прямоугольнике со сторонами 34 и 38; наибольшее значение 2586, например, в прямоугольнике со сторонами 1 и 1292

6. Длины диагоналей граней $ABCD$, ABB_1A_1 , ADD_1A_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выражаются различными целыми числами. Какой наименьшей может быть сумма этих чисел?

Решение:

Ни одна из рассматриваемых диагоналей не может иметь длину 1. Действительно, невозможно равенство $AB_1 = 1$, так как в треугольнике $AB_1 D_1$, в котором сторона $B_1 D_1 = BD$, должно выполняться неравенство

$$AB_1 > |AD_1 - B_1 D_1| \geq 1. \text{ Аналогично доказывается для других диагоналей.}$$

Таким образом, наименьшая длина одной из шести диагоналей должна быть не меньше 2. Нетрудно установить существование параллелепипеда, у которого 6 диагоналей рассматриваемых граней равны 2, 3, 4, 5, 6, 7. Например, одновременно могут выполняться следующие равенства:

$$AB_1 = 2, AC = 4, AD_1 = 6, A_1 B = 3, A_1 D = 5, BD = 7$$

Тогда наименьшая сумма длин граней $ABCD$, ABB_1A_1 , ADD_1A_1 равна 27.

Ответ: 27