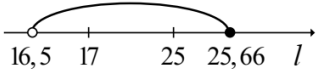
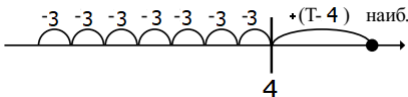
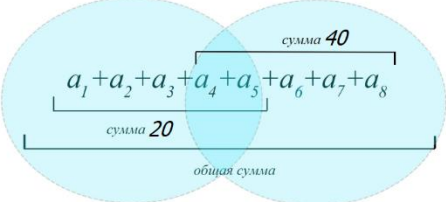


На доске написаны числа.

На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4 , а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8 .

- а) Сколько чисел написано на доске?
- б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
- в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?
- г) Какое наибольшее положительное число может быть среди них?
- д) После стирания на доске осталось только 8 различных положительных чисел. Найдите наибольшее возможное среднее арифметическое оставшихся чисел, если среднее арифметическое пяти наименьших из них равно 4 , а среднее арифметическое пяти наибольших равно 8 .

В задачах со средним арифметическим надо рассмотреть сумму набора.	Пусть k — положительных чисел, l — отрицательных чисел, m — нулей. Тогда $4k - 8l + 0 \cdot m = -3(k + l + m)$ сумма набора этих чисел.
Соображения делимости левой и правой частей уравнения.	Левая часть уравнения делится на 4. $(k + l + m) : 4$ $40 < (k + l + m) < 48$ а) <i>Ответ:</i> на доске написано 44 целых числа.
Для оценки можно отбрасывать положительные (отрицательные) слагаемые.	$4k - 8l + 0 \cdot m = -3(k + l + m)$ $4k - 8l = -3k - 3l - 3m$ $7k + 3m = 5l$ $m \geq 0$ $7k \leq 5l$ б) <i>Ответ:</i> отрицательных чисел больше, чем положительных.
Можно решить в общем виде уравнение в целых числах с последующим перебором решений. Для сокращения перебора использовать оценки сверху и снизу.	Всего чисел 44 $4k - 8l + 0 \cdot m = -3(k + l + m)$ $4k - 8l = -3 \cdot 44$ $k - 2l = -33$ $k = 2l - 33$ $(k; l) = (2l - 33; l), l \in \mathbb{Z}$ Отметим, что чем больше отрицательных, тем больше положительных! Всего чисел 44 $k > 0$ $k + l = 2l - 33 + l \leq 44$ $2l - 33 > 0$ $3l \leq 77$ $l > \frac{33}{2} = 16,5$ $l \leq \frac{77}{3} \approx 25,66$  наибольшее количество положительных чисел $k = 2l - 33 = 2 \cdot 25 - 33 = 17$ в) <i>Ответ:</i> наибольшее количество положительных чисел 17. Например, на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число -8 и два раза написан 0.

<p>Среднее арифметическое чисел можно интерпретировать как точку равновесия в весах.</p>	<p>Наибольшее возможное положительное число получим в случае, когда количество положительных чисел наибольшего и все числа, кроме одного, равны единице (наименьшему положительному целому числу).</p>  <p>Наибольшее количество положительных чисел 17, тогда</p> $16 \cdot (4 - 1) = T - 4$ $T = 52$ <p>г) <i>Ответ:</i> наибольшее положительное число 52. Например, на доске написано число 52, 16 раз написано число 1, 25 раз написано число -8 и два раза написан 0.</p>
<p>Идея наименьшей возможной суммы.</p>	 <p>Общая сумма $(20 + 40) - (a_4 + a_5)$</p> <p>Чем меньше сумма $(a_4 + a_5)$, тем больше общая сумма.</p> <p>Наименьшая возможная – это сумма последовательных чисел:</p> $a_1 + (a_1 + 1) + (a_1 + 2) + (a_1 + 3) + (a_1 + 4) = 5a_1 + 10 \leq 20$ $a_1 \leq 2$ <p>Подбираем слагаемые так, чтобы $(a_4 + a_5)$ была наименьшей.</p> $2 + 3 + 4 + 5 + 6$ $(a_4 + a_5) = (5 + 6) = 11, \text{ тогда } (20 + 40) - (a_4 + a_5) = 60 - 11 = 49$ <p><i>Ответ:</i> наибольшее среднее арифметическое $\frac{49}{10} = 4,9$, что достигается, например, при $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 14$.</p> <p>Тогда, исходный набор положительных чисел мог быть, например, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 14</p> <p>Всего 15 чисел, где стерли три единицы и четыре двойки.</p>

Задачи для самостоятельного решения.

- На доске написано 30 чисел: десять «5», десять «4» и десять «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно A , среднее арифметическое чисел во второй группе равно B . (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу). Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{A+B}{2}$.
- В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день. Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 5. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?
- На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 5, или на цифру 9. Сумма написанных чисел равна 3008. Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 5, может быть на доске?

Задача 1

На доске написано 30 чисел: десять «5», десять «4» и десять «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно A , среднее арифметическое чисел во второй группе равно B . (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу). Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{A+B}{2}$.

Решение: Понятно, что среднее арифметическое любой группы не превосходит пяти, тогда если в одной из групп будут находиться одни пятерки, то такая группа будет иметь наибольшее возможное среднее арифметическое для группы.

Если в группе количество «3» больше количества «5», то среднее арифметическое группы меньше 4. Наибольшее возможное среднее арифметическое для такой группы в случае, когда вторая группа состоит из одной пятерки, а в первой группе все остальные числа.

$$A = \frac{9 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 3}{29} = \frac{115}{29} = 3\frac{28}{29}; B = 5; \frac{A+B}{2} = \frac{\frac{115}{29} + 5}{2} = 4\frac{14}{29}$$

Ответ: $4\frac{14}{29}$ в случае, когда в одной группе одна «5», а в другой группе все остальные числа.

Задача 2

В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день. Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 5. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

Решение:

Если сумма чисел, записанных в первый день равна 5, то количество чисел, записанных в первый день, не превосходит 5. Тогда возможны варианты 4 дня, 3 дня, 2 дня.

Если 4 дня, то в последний день количество чисел либо 2, либо 1, и наибольшее значение суммы будет 10 при двух пятерках. Тогда в предыдущий день наибольшая возможная сумма 9, что достигается, например, при 3 тройках. Тогда во второй день наибольшая сумма 8, что достигается, например, при четырех двойках. И в первый день стоит 5 единиц.

Если 3 дня, то в последний день наибольшее значение будет при трех пятерках, сумма которых 15. Тогда во второй день сумма может быть 14, а чисел может быть 4, что достигается, например, при 3,4,3,4. В первый день сумма всегда равна 5, например, при пяти единицах.

Если два дня, то в последний день могут быть четыре пятерки, сумма равна 20, а в первый день опять пять единиц.

1 день	чисел ≤ 5 , сумма = 5	11111	11111	11111
2 день	чисел ≤ 4 , сумма ≥ 6	2222	3434	5555
3 день	чисел ≤ 3 , сумма ≥ 7	333	555	
4 день	чисел ≤ 2 , сумма ≥ 8	55		
сумма		32	34	25

Ответ: 34, например, в первый день пять единиц, во второй день 3434, в третий день три пятерки.

Задача 3

На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 5, или на цифру 9. Сумма написанных чисел равна 3008. Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 5, может быть на доске?

Решение:

Наименьшая сумма k различных чисел с последней цифрой 5:

$$5 + 15 + 25 + \dots + (5 + 10 \cdot (k - 1)) = \frac{5 + (5 + 10 \cdot (k - 1))}{2} \cdot k = 5k^2$$

Наименьшая сумма $30 - k$ различных чисел с последней цифрой 9:

$$9 + 19 + 29 + \dots + (9 + 10 \cdot (30 - k - 1)) = \frac{9 + (9 + 10 \cdot (29 - k))}{2} \cdot (30 - k) = 5k^2 - 304k + 4620$$

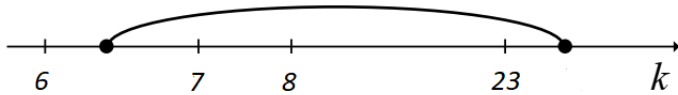
Наименьшая сумма различных чисел с последней цифрой 5 и 9:

$$5k^2 + 5k^2 - 304k + 4620 = 10k^2 - 304k + 4620 \leq 3008$$

$$10k^2 - 304k + 1612 \leq 0$$

$$5k^2 - 152k + 806 \leq 0$$

$$k_{1,2} = \frac{152 \pm \sqrt{152^2 - 4 \cdot 5 \cdot 806}}{10} = \frac{152 \pm 6\sqrt{194}}{10}$$



Перебираем случаи:

$$k = 7$$

Последняя цифра суммы 7 чисел с последней цифрой 5: $7 \cdot 5 = 3\text{5}$

Последняя цифра суммы 23 чисел с последней цифрой 9: $23 \cdot 9 = 20\text{7}$

Последняя цифра суммы 30 чисел: $5 + 7 = 1\text{2}$

По условию последняя цифра суммы 30 чисел это 8, получили противоречие.

$$k = 8$$

Последняя цифра суммы 8 чисел с последней цифрой 5: $8 \cdot 5 = 3\text{0}$

Последняя цифра суммы 22 чисел с последней цифрой 9: $22 \cdot 9 = 19\text{8}$

Последняя цифра суммы 30 чисел: $0 + 8 = \text{8}$

Противоречия нет, строим пример.

$$\begin{aligned} &5 + 15 + 25 + 35 + \dots + (5 + 10 \cdot 7) + 9 + 19 + 29 + \dots + (9 + 10 \cdot 21) = \\ &= \frac{5 + 75}{2} \cdot 8 + \frac{9 + 219}{2} \cdot 22 = 320 + 2508 = 2828 \end{aligned}$$

$$3008 - 2828 = 180$$

Ответ: 8 чисел, оканчивающихся на 5, например, 5, 15, 25, 35...75, 9, 19, 29...399