

Задачи для самостоятельного решения.

Все представленные здесь задачи были в заключительных этапах олимпиады СПбГУ 2012-2018гг.

1. Положительные числа a, b, c таковы, что $ab + bc + ac$ больше abc в шесть раз. Найдите наименьшее значение выражения $(a + b)(b + c)(a + c)$.

Ответ: 1.

2. Даны вещественные числа $x, y, z \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите максимальное значение выражения $A = \sin(x - y) + \sin(y - z) + \sin(z - x)$

Ответ: $\sqrt{2} - 1$

3. Даны положительные числа a, b, c, d . Найдите минимальное значение выражения

$$A = \left(a + \frac{1}{b}\right)^3 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^3 + \left(c + \frac{1}{d}\right)^3 + \left(d + \frac{1}{a}\right)^3$$

Ответ: 32

4. Даны вещественные числа $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0; 1)$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt[4]{1-x_1} + \dots + \sqrt[4]{1-x_n}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x_1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{x_n}}}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Даны числа x, y , удовлетворяющие условию $x^8 + y^8 \leq 2$. Докажите неравенство $x^2 y^2 + |x^2 - y^2| \leq \frac{\pi}{2}$.

6. Найдите наименьшее значение выражения $\left(\sqrt{4+x^8} - 2y^2 + 1\right)^2 + \left(\sqrt{4+y^8} - 2x^2 + 1\right)^2$

Ответ: 2