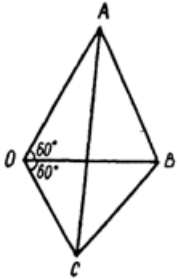
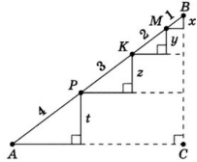


<p>Геометрической основой решения может служить <b>неравенство треугольника</b>: для любых точек А, В, С плоскости выполняется неравенство <math> AC - BC  \leq AB \leq AC + BC</math>, причем равенство может достигаться только в случае, когда точки лежат на одной прямой. Напомним, что расстояние между точками <math>A(x_a; y_a)</math> и <math>B(x_b; y_b)</math> на координатной плоскости вычисляется по формуле</p> $AB = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$	<p><i>Пример.</i> Найдите наименьшее значение выражения <math>\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}</math>.</p> <p><i>Решение:</i> рассмотрим точку <math>A(0;1)</math> и <math>B(1;0)</math>. Пусть точка <math>M(x; y)</math>, тогда <math>MA = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}</math>, <math>MB = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}</math>.</p> <p>По неравенству треугольника <math>MA + MB \geq AB</math>, поэтому данное выражение принимает наименьшее значение в том случае, когда точка <math>M</math> принадлежит отрезку <math>AB</math>.</p> $MA + MB = AB$ <p>В этом случае <math>AB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}</math></p> <p><i>Ответ:</i> <math>\sqrt{2}</math></p>	<p>1. Решите систему уравнений</p> $\begin{cases} \sqrt{(x-6)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = 2\sqrt{13} \\ \sqrt{(x-9)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 3\sqrt{10} \end{cases}$ <p>2. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения <math>\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+3)^2}</math>, если <math>2 x  +  y  = 2</math></p>
<p>Геометрической основой решения могут служить <b>метрические теоремы геометрии</b> (теорема Пифагора, теорема косинусов, теорема синусов).</p> <p>Идея геометрического решения возникает исходя из вида выражений, стоящих под знаками корней, например, выражение <math>\sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-y^2} + \sqrt{9-z^2} + \sqrt{16-t^2}</math> напоминает теорему Пифагора, а выражение <math>\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2}</math> напоминает теорему косинусов.</p>	<p><i>Пример.</i> Доказать, что для положительных <math>a, b, c</math> выполняется неравенство <math>\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}</math></p> <p><i>Решение:</i> рассмотрим отрезки <math>OA, OB, OC</math> такие, что <math>OA = a, OB = b, OC = c</math>, <math>\angle AOB = 60^\circ, \angle BOC = 60^\circ</math></p> <p>Тогда по теореме косинусов</p> $AB = \sqrt{a^2 - ab + b^2},$ $BC = \sqrt{b^2 - bc + c^2},$ $AC = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$  <p>Так как для треугольника <math>ABC</math> (по неравенству треугольника) <math>AC \leq AB + BC</math>, то неравенство доказано.</p>	<p>3. Найдите наименьшее значение функции <math>y = \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}</math></p> <p>4. Найдите положительные решения системы уравнений</p> $\begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ \sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-y^2} + \sqrt{9-z^2} + \sqrt{16-t^2} = 8 \end{cases}$  <p>5. Найдите все неотрицательные решения системы уравнений</p> $\begin{cases} 2\sqrt{3} \sin x = 2 \sin y = \sqrt{3} \sin z \\ x + y + z = \pi \end{cases}$

<p>Во многих задачах, связанных с доказательством неравенств или поиском экстремальных значений, эффективно применяется следствие из определения <b>скалярного произведения векторов</b></p> $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq  \vec{a} \cdot \vec{b}  \leq  \vec{a}  \cdot  \vec{b} ,$ <p>которое справедливо в декартовой системе координат любой размерности. Помимо это используется тот факт, что модуль суммы <math>n</math> векторов не превосходит суммы их модулей, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда все векторы сонаправлены.</p> <p>Напомним, что если <math>\vec{a}\{x_a; y_a\}; \vec{b}\{x_b; y_b\}</math>, то <math> \vec{a}  = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}</math> и <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b</math>.</p> <p>Для доказательства ряда тригонометрических тождеств бывает полезен следующий факт: пусть <math>O</math> – центр правильного <math>n</math>-угольника <math>A_1A_2...A_n</math>, тогда <math>\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + ... + \vec{OA_n} = \vec{0}</math></p>	<p><i>Пример.</i> Найдите наибольшее значение выражения <math>A = \sin x \cdot \cos y \cdot \cos z + \cos x \cdot \sin y \cdot \sin z</math>.</p> <p><i>Решение:</i> В декартовой системе координат рассмотрим векторы <math>\vec{m}\{\sin x; \cos x\}</math> и <math>\vec{n}\{\cos y \cdot \cos z; \sin y \cdot \sin z\}</math>. Тогда</p> $A = \vec{m} \cdot \vec{n} \leq  \vec{m}  \cdot  \vec{n}  =$ $= \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} \cdot \sqrt{\cos^2 y \cdot \cos^2 z + \sin^2 y \cdot \sin^2 z} \leq$ $\leq \sqrt{\cos^2 z + \sin^2 z} = 1$ <p>Значение 1 может достигаться, например, при <math>x = 0; y = z = \frac{\pi}{2}</math></p> <p><i>Ответ:</i> 1</p>	<p>6. Найдите <math>\sin 9^0 + \sin 49^0 + \sin 89^0 + ... + \sin 329^0</math></p>
<p>Напомним, что <b>расстояние между точками</b> в трехмерном пространстве вычисляется по формуле</p> $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ <p>Сфера с центром <math>D(a; b; c)</math> и радиусом <math>R</math> задается уравнением <math>(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2</math>, а уравнение плоскости <math>\alpha</math> имеет вид <math>Ax + By + Cz + D = 0</math>, где <math>\vec{n}\{A; B; C\}</math> – вектор нормали к плоскости <math>\alpha</math>. Кроме того, если <math>M(x_0; y_0; z_0)</math>, то <b>расстояние от точки до плоскости <math>\alpha</math></b> вычисляется по формуле <math> M; \alpha  = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}</math>.</p>	<p><i>Пример.</i> Известно, что <math>9x^2 + 16y^2 + 144z^2 = 169</math>. Найдите наибольшее возможное значение выражения <math>6x - 4y + 24z</math>.</p> <p><i>Решение:</i> рассмотрим вектор <math>\vec{m}\{3x; 4y; 12z\}</math>, его длина <math> \vec{m}  = \sqrt{9x^2 + 16y^2 + 144z^2} = \sqrt{169} = 13</math>.</p> <p>Рассмотрим вектор <math>\vec{n}\{2; -1; 2\}</math>, <math> \vec{n}  = 3</math>.</p> $\vec{m} \cdot \vec{n} = 6x - 4y + 24z \leq  \vec{m}  \cdot  \vec{n}  = 13 \cdot 3 = 39$ <p>Равенство достигается когда <math>\vec{m}</math> и <math>\vec{n}</math> сонаправлены, т.е.</p> $\frac{3x}{2} = \frac{4y}{-1} = \frac{12z}{2} > 0; x = 4z; y = 1,5z; z > 0$ <p>Подставим в уравнение <math>9(4z)^2 + 16(1,5z)^2 + 144z^2 = 169</math>, получаем</p> $x = \frac{26}{9}; y = \frac{13}{12}; z = \frac{13}{18}$ <p><i>Ответ:</i> 39</p>	<p>7. Решите систему уравнений <math>\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}</math>.</p> <p>8. Известно, что <math>x + 2y + 3z = 1</math>. Какое наименьшее значение может принимать выражение <math>x^2 + y^2 + z^2</math>?</p>