

Геометрические интерпретации.

<p>Геометрической основой решения может служить неравенство треугольника: для любых точек A, B, C плоскости выполняется неравенство $AC - BC \leq AB \leq AC + BC$, причем равенство может достигаться только в случае, когда точки лежат на одной прямой.</p> <p>Напомним, что расстояние между точками $A(x_a; y_a)$ и $B(x_b; y_b)$ на координатной плоскости вычисляется по формуле</p> $AB = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$	<p><i>Пример.</i> Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.</p> <p><i>Решение:</i> рассмотрим точку $A(0;1)$ и $B(1;0)$. Пусть точка $M(x; y)$, тогда $MA = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$, $MB = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.</p> <p>По неравенству треугольника $MA + MB \geq AB$, поэтому данное выражение принимает наименьшее значение в том случае, когда точка M принадлежит отрезку AB.</p> $MA + MB = AB$ <p>В этом случае $AB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$</p> <p><i>Ответ:</i> $\sqrt{2}$</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Задача 1.

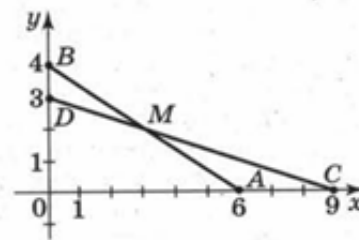
Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-6)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = 2\sqrt{13} \\ \sqrt{(x-9)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 3\sqrt{10} \end{cases}$$

Решение: Рассмотрим на координатной плоскости точки $M(x; y)$, $A(6;0)$, $B(0,4)$, $C(9;0)$, $D(0,3)$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} MA &= \sqrt{(x-6)^2 + y^2}; MB = \sqrt{x^2 + (y-4)^2}; \\ MC &= \sqrt{(x-9)^2 + y^2}; MD = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}; \\ AB &= 2\sqrt{13}; CD = 3\sqrt{10} \end{aligned}$$



Решить систему означает найти все такие точки $M(x; y)$, для каждой из которых

$$MA + MB = AB;$$

$$MC + MD = CD$$

То есть точка M принадлежит одновременно отрезку AB и отрезку CD , значит является точкой пересечения прямых (AB) и (CD) .

$$(AB): y = -\frac{2}{3}x + 4$$

$$(CD): y = -\frac{1}{3}x + 3$$

$$-\frac{2}{3}x + 4 = -\frac{1}{3}x + 3$$

$$x = 3;$$

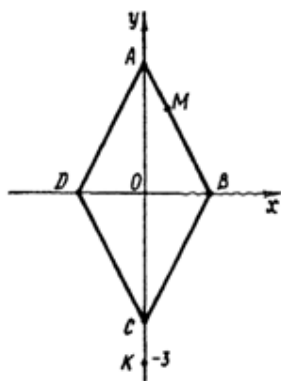
$$y = -\frac{2}{3} \cdot 3 + 4 = 2$$

Ответ: $(3;2)$

Задача 2.

Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$, если $2|x| + |y| = 2$

Решение:



Графиком уравнения $2|x| + |y| = 2$ является ромб $ABCD$. Пусть $M(x; y)$ - некоторая точка ромба. Тогда данное выражение можно интерпретировать как «сумма длин отрезков MO и MK », где $O(0;0)$ – начало координат, точка $K(0;-3)$.

Рассмотрим треугольник $МОК$, по неравенству треугольника $МО + МК \geq ОК = 3$ (равенство достигается, если точка M совпадает с точкой C). Тогда наименьшее значение выражения равно 3.

Не трудно показать, что $МК \leq АК; МО \leq АО;$
 $МК + МО \leq АО + АК = 7$

(равенство достигается, если точки M и A совпадают). Тогда наибольшее значение равно 7.

Ответ: 3 и 7.

Геометрической основой решения могут служить **метрические теоремы геометрии** (теорема Пифагора, теорема косинусов, теорема синусов). Идея геометрического решения возникает исходя из вида выражений, стоящих под знаками корней, например, выражение $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-y^2} + \sqrt{9-z^2} + \sqrt{16-t^2}$ напоминает теорему Пифагора, а выражение $\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2}$ напоминает теорему косинусов.

Пример. Доказать, что для положительных a, b, c выполняется неравенство

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

Решение: рассмотрим отрезки OA, OB, OC такие, что

$$OA = a, OB = b, OC = c,$$

$$\angle AOB = 60^\circ, \angle BOC = 60^\circ$$

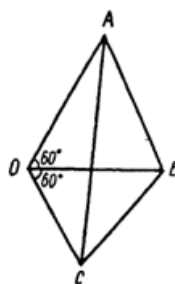
Тогда по теореме косинусов

$$AB = \sqrt{a^2 - ab + b^2},$$

$$BC = \sqrt{b^2 - bc + c^2},$$

$$AC = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

Так как для треугольника ABC (по неравенству треугольника) $AC \leq AB + BC$, то неравенство доказано.

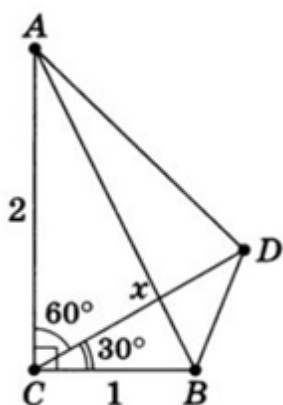


Задача 3.

Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}$

Решение: заметим, что если $x < 0$, то $y(-x) > y(x)$, значит достаточно рассмотреть положительные значения x .

Преобразуем выражение: $y = \sqrt{x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ + 2^2} + \sqrt{x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ + 1}$



Рассмотрим два треугольника с общей стороной $CD = x$.

Пусть точки А и В лежат в разных полуплоскостях относительно CD.

В треугольнике ACD : $AC = 2$; $\angle ACD = 60^\circ$.

В треугольнике BCD : $BC = 1$; $\angle BCD = 30^\circ$

По теореме косинусов $AD = \sqrt{x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ + 2^2}$;
 $BD = \sqrt{x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ + 1^2}$

По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{5}$

Интерпретируем выражение $y = \sqrt{x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ + 2^2} + \sqrt{x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ + 1}$ как сумму $AD + BD$, а по неравенству треугольника (для треугольника ABD)
 $AD + BD \geq AB = \sqrt{5}$.

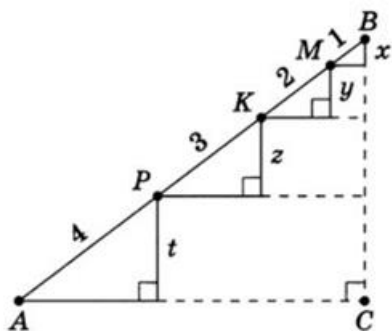
Наименьшее значение равно $\sqrt{5}$ и будет достигаться, если точка D лежит на отрезке AB.

Ответ: $\sqrt{5}$

Задача 4.

Найдите положительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ \sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-y^2} + \sqrt{9-z^2} + \sqrt{16-t^2} = 8 \end{cases}$$



Решение:

Рассмотрим прямоугольные треугольники с гипотенузами $BM = 1$, $MK = 2$, $KP = 3$, $PA = 4$, и катетами равными x ; y ; z ; t , сумма длин которых равна 6.

Тогда сумма длин других катетов $\sqrt{1-x^2}; \sqrt{4-y^2}; \sqrt{9-z^2}; \sqrt{16-t^2}$ по условию равна 8.

Расположим эти прямоугольные треугольники цепочкой (как показано на рисунке). Построим до прямоугольного треугольника, в котором $AC=8$ и $BC=6$, тогда $AB=10$. Заметим, что $4+3+2+1=10$, т.е. точки A, P, K, M, B лежат на одной прямой AB.

Проведем через точки P, K, M прямые параллельные AC. По теореме о пропорциональных отрезках сторона BC разделится в отношении 1:2:3:4, т.е. $x = 0,6$; $y = 1,2$; $z = 1,8$; $t = 2,4$

Ответ: (0,6; 1,2; 1,8; 2,4)

Задача 5.

Найдите все неотрицательные решения системы уравнений
$$\begin{cases} 2\sqrt{3} \sin x = 2 \sin y = \sqrt{3} \sin z \\ x + y + z = \pi \end{cases}$$

Решение:

Первое уравнение равносильно уравнению
$$\frac{\sin x}{1} = \frac{\sin y}{\sqrt{3}} = \frac{\sin z}{2}.$$

Заметим, что если одна из переменных принимает значение 0, то значения двух других это 0 и π . Пусть $x > 0; y > 0; z > 0$. Рассмотрим прямоугольный треугольник с углами x, y, z и (по теореме синусов) противолежащими им сторонами 1; $\sqrt{3}$; 2. По обратной теореме Пифагора такой треугольник прямоугольный, тогда его углы известны:
 $z = 90^\circ; y = 60^\circ; x = 30^\circ$

Ответ: $z = 90^\circ; y = 60^\circ; x = 30^\circ$

Во многих задачах, связанных с доказательством неравенств или поиском экстремальных значений, эффективно применяется следствие из определения **скалярного произведения векторов**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|, \text{ которое}$$

справедливо в декартовой системе координат любой размерности.

Помимо это используется тот факт, что модуль суммы n векторов не превосходит суммы их модулей, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда все векторы сонаправлены.

Напомним, что если

$$\vec{a} \{x_a; y_a\}; \vec{b} \{x_b; y_b\}, \text{ то } |\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

$$\text{и } \vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b.$$

Для доказательства ряда тригонометрических тождеств бывает полезен следующий факт: пусть O – центр правильного n -угольника

$A_1 A_2 \dots A_n$, тогда

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_n} = \vec{0}$$

Пример. Найдите наибольшее значение выражения

$$A = \sin x \cdot \cos y \cdot \cos z + \cos x \cdot \sin y \cdot \sin z.$$

Решение:

В декартовой системе координат рассмотрим векторы $\vec{m} \{ \sin x; \cos x \}$ и

$\vec{n} \{ \cos y \cdot \cos z; \sin y \cdot \sin z \}$. Тогда

$$\begin{aligned} A &= \vec{m} \cdot \vec{n} \leq |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| = \\ &= \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} \cdot \sqrt{\cos^2 y \cdot \cos^2 z + \sin^2 y \cdot \sin^2 z} \leq \\ &\leq \sqrt{\cos^2 z + \sin^2 z} = 1 \end{aligned}$$

Значение 1 может достигаться, например, при

$$x = 0; y = z = \frac{\pi}{2}$$

Ответ: 1

Задача 6.

Найдите $\sin 9^\circ + \sin 49^\circ + \sin 89^\circ + \dots + \sin 329^\circ$

Решение:

В декартовой системе координат рассмотрим единичную окружность и точки $P_9; P_{49}; \dots; P_{329}$, полученные из точки $P_0(0;1)$ при повороте с центром в начале координат против часовой стрелки на угол $9^\circ; 49^\circ; 89^\circ; \dots 329^\circ$

Они являются вершинами правильного девятиугольника, поэтому

$$\overrightarrow{OP_9} + \overrightarrow{OP_{49}} + \dots + \overrightarrow{OP_{329}} = \vec{0}.$$

Искомая сумма синусов является суммой проекций этих векторов на ось ординат, значит она равна нулю. (Аналогично сумма косинусов равна нулю).

Ответ: 0.

Напомним, что **расстояние между точками** в трехмерном пространстве вычисляется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Сфера с центром $D(a;b;c)$ и радиусом R задается уравнением

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \text{ а}$$

уравнение плоскости α имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ где } \vec{n}\{A; B; C\} -$$

вектор нормали к плоскости α . Кроме того, если $M(x_0; y_0; z_0)$, то

расстояние от точки до плоскости α вычисляется по формуле

$$|M; \alpha| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример. Известно, что $9x^2 + 16y^2 + 144z^2 = 169$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $6x - 4y + 24z$.

Решение: рассмотрим вектор $\vec{m}\{3x; 4y; 12z\}$, его длина $|\vec{m}| = \sqrt{9x^2 + 16y^2 + 144z^2} = \sqrt{169} = 13$.

Рассмотрим вектор $\vec{n}\{2; -1; 2\}$, $|\vec{n}| = 3$.

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 6x - 4y + 24z \leq |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| = 13 \cdot 3 = 39.$$

Равенство достигается когда \vec{m} и \vec{n} сонаправлены, т.е. $\frac{3x}{2} = \frac{4y}{-1} = \frac{12z}{2} > 0$;

$x = 4z$; $y = 1,5z$; $z > 0$. Подставим в уравнение

$$9(4z)^2 + 16(1,5z)^2 + 144z^2 = 169, \text{ получаем}$$

$$x = \frac{26}{9}; y = \frac{13}{12}; z = \frac{13}{18}.$$

Ответ: 39

Задача 7.

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}.$$

Решение:

Заметим, что $(1;1;1)$ является решением системы. Докажем, что других решений нет.

В декартовой системе координат уравнение $x + y + z = 3$ задает плоскость, а уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ задает сферу с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{3}$.

Расстояние от начала координат до этой плоскости будет равно $\frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{3}$, значит плоскость касается сферы, поэтому данная система не может иметь более одного решения.

Ответ: (1;1;1)

Задача 8.

Известно, что $x + 2y + 3z = 1$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $x^2 + y^2 + z^2$?

Решение:

В декартовой системе координат уравнение $x + 2y + 3z = 1$ задает плоскость, а выражение $x^2 + y^2 + z^2$ равно квадрату расстояния от начала координат до точки $M(x; y; z)$.

Если точка M лежит в данной плоскости, тогда наименьшее значение $x^2 + y^2 + z^2$ достигается тогда, когда точка $M(x; y; z)$ является основанием перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат.

Расстояние от начала координат до плоскости найдем по формуле: $\frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$.

Тогда наименьшее значение $x^2 + y^2 + z^2$ равно квадрату расстояния, т.е. $\frac{1}{14}$.

(Проводя аналогию с предыдущей задачей, получим, что сфера с центром в начале координат и радиусом $\frac{1}{\sqrt{14}}$ касается заданной плоскости).

Ответ: $\frac{1}{14}$