

Параллельность и отношение отрезков.

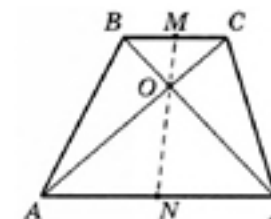
Точка C лежит на прямой AB	$\vec{AC} = k \cdot \vec{AB}$ при некотором k
Точка C делит отрезок AB в отношении $AC : CB = m : k$	$k \cdot \vec{AC} = m \cdot \vec{CB}$ ($k > 0, m > 0$)
$ABCD$ — параллелограмм	$\vec{AB} = \vec{DC}$
M — середина AB	$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ для любой точки O
Точка M делит отрезок AB в отношении $AM : MB = m : k$	$\vec{OM} = \frac{k}{k+m} \cdot \vec{OA} + \frac{m}{k+m} \cdot \vec{OB}$ для любой точки O
M — точка пересечения медиан треугольника ABC	$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ для любой точки O

Условие принадлежности трех точек одной прямой и четырех точек одной плоскости.

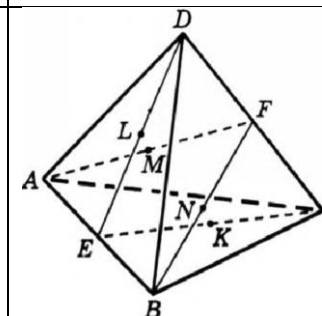
Пусть точка C лежит на прямой AB , точка O не лежит на этой прямой и имеет место равенство $\vec{OC} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB}$.
Тогда $\alpha + \beta = 1$.

Пусть теперь точка D лежит в плоскости ABC , точка O не лежит в этой плоскости и имеет место равенство
 $\vec{OD} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OC}$.
Тогда $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

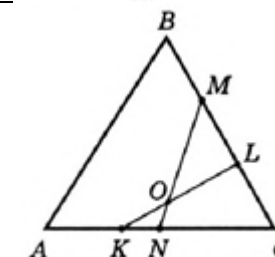
Доказать, что середины оснований и точка пересечения диагоналей трапеции лежат на одной прямой.



В тетраэдре $ABCD$ точки E и F — середины ребер AB и CD . Доказать, что середины отрезков CE , DE , AF и BF являются вершинами параллелограмма.



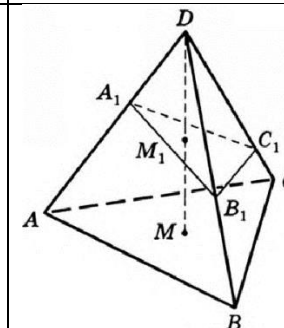
Точки K, L, M на сторонах AC, BC, AB треугольника ABC таковы, что $\frac{AK}{KC} = \frac{CL}{LB} = \frac{BM}{MC} = \frac{1}{2}$, N — середина стороны AC . Найти отношение, в котором точка пересечения отрезков KL и MN делит отрезок KL .

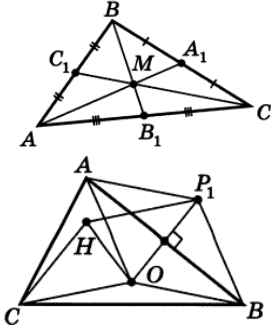
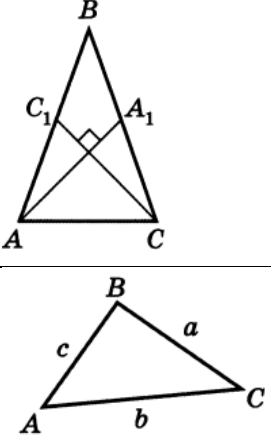


Точки A_1, B_1, C_1 на ребрах AD, BD, CD правильной треугольной пирамиды $DABC$ таковы, что

$$A_1D = \frac{2}{5}AD, \quad B_1D = \frac{3}{5}BD, \quad C_1D = \frac{4}{5}CD.$$

В каком отношении высота пирамиды, проведенная из вершины D , делится плоскостью $A_1B_1C_1$?



<p>Векторные свойства, связанные с замечательными точками треугольника. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1 и CC_1, которые пересекаются в точке M, тогда $\vec{AM} + \vec{BM} + \vec{CM} = \vec{0}$.</p> <p>В $\triangle ABC$ точка L есть точка пересечения биссектрис треугольника, где $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$, тогда для любой точки E справедливо векторное тождество</p> $\vec{EL} = \frac{a \cdot \vec{EA} + b \cdot \vec{EB} + c \cdot \vec{EC}}{a + b + c}.$ <p>В $\triangle ABC$ точка H — точка пересечения высот (ортоцентр), точка O — центр описанной окружности, тогда $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.</p>	<p>В любом треугольнике ABC центр описанной окружности, ортоцентр и центроид (или центр масс) лежат на общей прямой.</p>	
<p>Применение свойств скалярного произведения.</p> $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = \vec{a} ^2$ <p>Для ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b}:</p> $\cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} }.$ <p>Для нахождения скалярного произведения двух векторов можно обойтись без знания косинуса угла между ними, если известна длина третьего вектора, являющегося суммой или разностью исходных векторов.</p> $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2}$ $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$	<p>Найдите косинус угла, лежащего против основания равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.</p> <p>Для треугольника ABC, в котором $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, R — радиус описанной окружности, докажите справедливость следующих неравенств:</p> $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$ $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$	

Задачи для самостоятельного решения:

- Докажите, что середины оснований трапеции и точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны, лежат на одной прямой.
- Точка O — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, а точка H такова, что $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$. Докажите, что H — ортоцентр $\triangle ABC$.
- Для треугольника ABC , в котором $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, R — радиус описанной окружности. Докажите, что $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C \leq \frac{3}{2}$.