

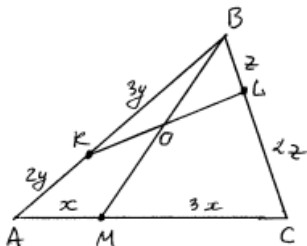
На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ , причем  $AK : KB = 2 : 3$ ,  $BL : LC = 1 : 2$ ,  $CM : MA = 3 : 1$ . Отрезки  $KL$  и  $BM$  пересекаются в точке  $O$ .

а) Докажите, что  $BO = OM$ .

б) Найдите площадь треугольника  $KOB$  если  $AB = 10$ ,  $BC = 8$ ,  $AC = 4$

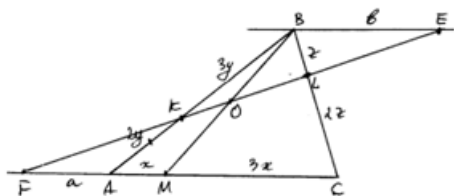
Решение:

Для доказательства утверждения пункта а) применим дополнительное построение с целью получения подобных треугольников. Можно либо через конец какого-то из отрезков проводить прямую, параллельную другому отрезку, либо проводить прямую, параллельную какой-то стороне треугольника. Через вершину  $B$  проведем прямую, параллельную  $AC$ , и через  $E$  обозначим точку пересечения этой прямой с прямой  $KL$ , пусть точка  $F$  – точка пересечения прямой  $KL$  с прямой  $AC$ . Получаем много подобных треугольников.



Из подобия треугольников  $KBE$  и  $KAF$  с коэффициентом подобия  $3:2$ , получаем

$$\frac{BE}{FA} = \frac{b}{a} = \frac{3}{2}, \text{ т.е. } b = \frac{3}{2}a$$



Из подобия треугольников  $LBE$  и  $LCF$  с коэффициентом

подобия  $1:2$ , получаем  $\frac{BE}{FC} = \frac{b}{a+4x} = \frac{1}{2}$ , откуда

$$a + 4x = 2b; a + 4x = 2 \cdot \frac{3}{2}a; x = \frac{1}{2}a.$$

И, наконец, из подобия треугольников  $OBE$  и  $OMF$  можно найти отношение  $BO$  к  $OM$ :

$$\frac{BO}{OM} = \frac{b}{a+x} = \frac{\frac{3}{2}a}{a+\frac{1}{2}a} = 1, \text{ значит точка } O \text{ – середина отрезка } BM, \text{ что и требовалось}$$

доказать.

б) Площадь треугольника  $ABC$  найдем по формуле Герона.

$$p = \frac{10+8+4}{2} = 11$$

$$S_{ABC} = \sqrt{11 \cdot (11-10) \cdot (11-8) \cdot (11-4)} = \sqrt{154}$$

Треугольник  $ABM$  имеет с треугольником  $ABC$  общую высоту, тогда их площади

относятся как основания  $1:4$ , т.е.  $S_{ABM} = \frac{\sqrt{154}}{4}$ . Треугольники  $ABM$  и  $KBO$  имеют общий

угол, тогда найдем отношение площадей этих треугольников:

$$\frac{S_{KBO}}{S_{ABM}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BK \cdot BO \cdot \sin \angle KBO}{\frac{1}{2} \cdot BA \cdot BM \cdot \sin \angle KBO} = \frac{3y \cdot BO}{5y \cdot 2BO} = \frac{3}{10}.$$

$$\text{Откуда } S_{KOB} = \frac{3}{10} S_{ABM} = \frac{3\sqrt{154}}{40}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\sqrt{154}}{40}$$