

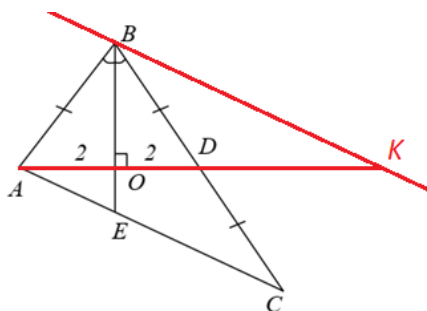
В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC .

Приступая к решению задачи, сразу замечаем, что треугольник ABD равнобедренный, так как биссектриса BO является высотой. Поэтому $AO = OD = 2$ и $AB = BD$, так что $BC = 2AB$. Далее решение можно продолжить по-разному.

Дополнительное построение прямой, параллельной стороне треугольника, с целью появления подобных треугольников:

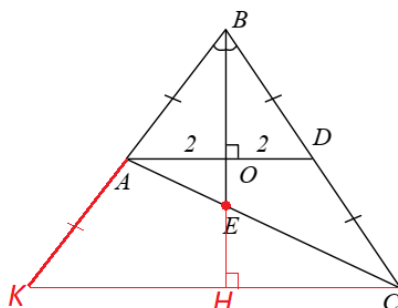
Через вершину B проведем прямую, параллельную стороне AC , продлим медиану AD до пересечения с этой прямой в точке K .

Для применения основного свойства биссектрис и подобия треугольников.



Дополнительное построение отрезка, равного данному, с целью появления равнобедренного треугольника:

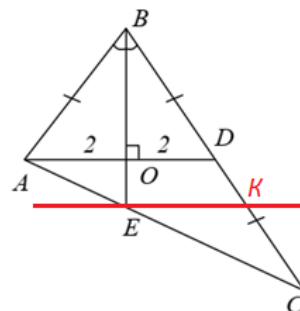
На продолжении BA за точку A отложим отрезок $AK = AB$. Для применения свойств медиан треугольника и теоремы о средней линии треугольника.



Дополнительное построение прямой, параллельной медиане, с целью появления условий для применения теоремы Фалеса:

Через точку E проведем прямую AK , параллельную AD .

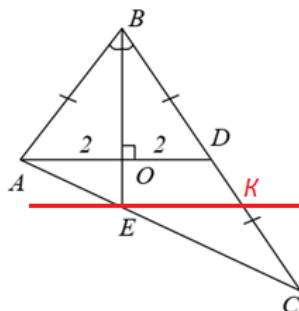
Для применения основного свойства биссектрис и теоремы о пропорциональных отрезках (обобщенной теоремы Фалеса).



Дополнительное построение прямой, параллельной медиане, с целью появления подобных треугольников:

Через точку E проведем прямую AK , параллельную AD .

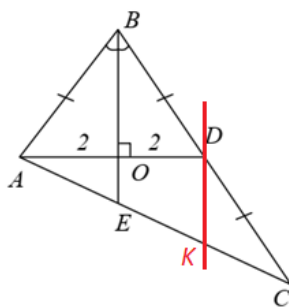
Для применения основного свойства биссектрис и подобия треугольников.



Дополнительное построение прямой, параллельной медиане, с целью появления средней линии:

Через точку D проведем прямую DK , параллельную BE .

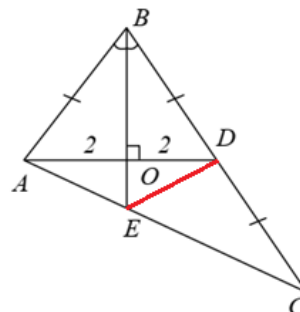
Для применения основного свойства биссектрис и теоремы о средней линии треугольника.



Дополнительное построение отрезка с целью появления равновеликих треугольников:

Построим отрезок ED .

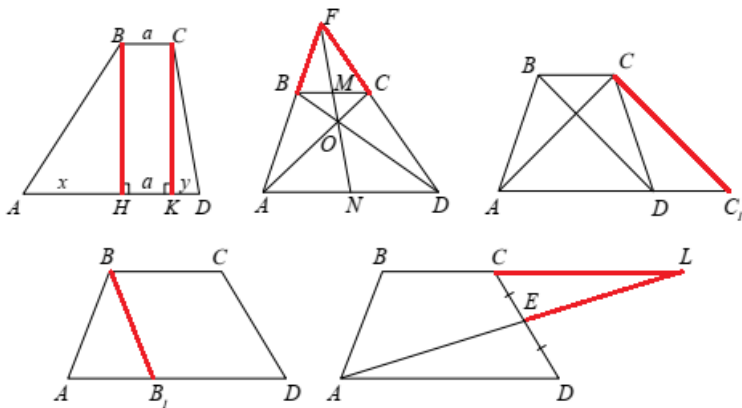
Для применения отношения площадей треугольников.



Продолжите решение задачи, используя дополнительные построения, представленные на рисунках.

Знакомые математические модели.

Для трапеции имеется ряд стандартных дополнительных построений.



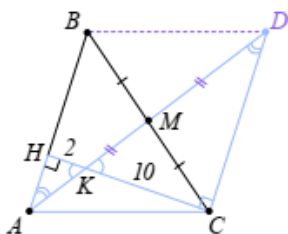
Задачи:

- Углы при одном из оснований трапеции равны 20° и 70° , а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 2.
- Найдите длины оснований трапеции, если длина средней линии этой трапеции равна 4.
- Точка E — середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Найдите площадь треугольника ECD , если площадь трапеции равна 12.
- Основания трапеции равны 4 и 9, а ее диагонали равны 5 и 12.
 - Докажите, что диагонали перпендикулярны.
 - Найдите площадь трапеции.

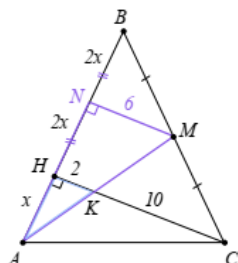
(Задача ЕГЭ 2017 год)

Стандартные дополнительные построения в треугольнике.

Удвоение медианы с целью появления параллелограмма и применения его свойств.



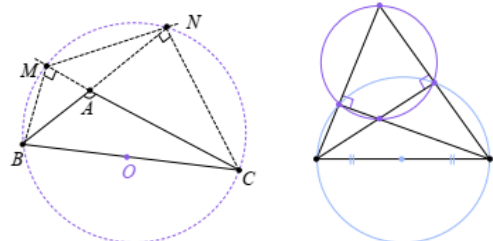
Построение прямой, параллельной стороне или чевиане треугольника с целью применения подобия, теоремы о средней линии, теоремы Фалеса и т.д.



- Найдите площадь треугольника, если его две стороны равны 1 и $\sqrt{15}$, а медиана третьей стороны равна 2.
- Медиана AM и высота CH остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке K . Известно, что $CK = 10$, $KH = 2$. Найдите отношение $AH:HB$ (двумя способами, смотри рисунки)
- В треугольнике ABC известно, что $AB = 4$, $\angle ABC = 120^\circ$, медиана $BM = 2$. Найдите BC .
- Найдите площадь остроугольного треугольника ABC , если известно, что $\angle BAC = 45^\circ$, $AB = 4\sqrt{2}$, а медиана $AM = \sqrt{29}$

Вспомогательная окружность.

Построение вспомогательной окружности с целью применения свойств хорд, касательных и углов.



- В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN . Найдите длину отрезка MN , если $BC = 12$, $\angle BAC = 120^\circ$
- Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . На катете BC выбрана произвольная точка M . Из точки M проведен перпендикуляр MN на гипотенузу AB . Докажите, что $\angle ANC = \angle AMC$

Задача для самостоятельного решения (ЕГЭ 2020 год). Предложите несколько способов решения задачи.

На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причем $AC_1 : C_1B = 8 : 3$, $BA_1 : A_1C = 1 : 2$, $CB_1 : B_1A = 3 : 1$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D .

а) Докажите, что ADA_1B_1 — параллелограмм.

б) Найдите CD , если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC = 28$, $BC = 18$.