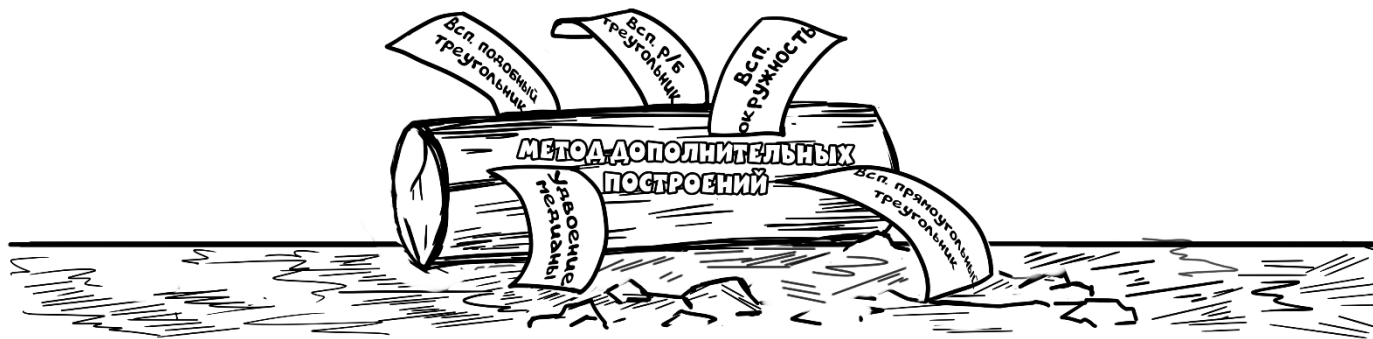


Дополнительные построения

Приемы решения геометрических задач

Подход: введение в чертеж дополнительных линий - так называемых дополнительных построений.

Построения, вводящие новые углы и новые отрезки, иногда приводят к появлению геометрических фигур, и, соответственно, появлению возможностей использовать формулы, свойства и теоремы, связанные с ними.



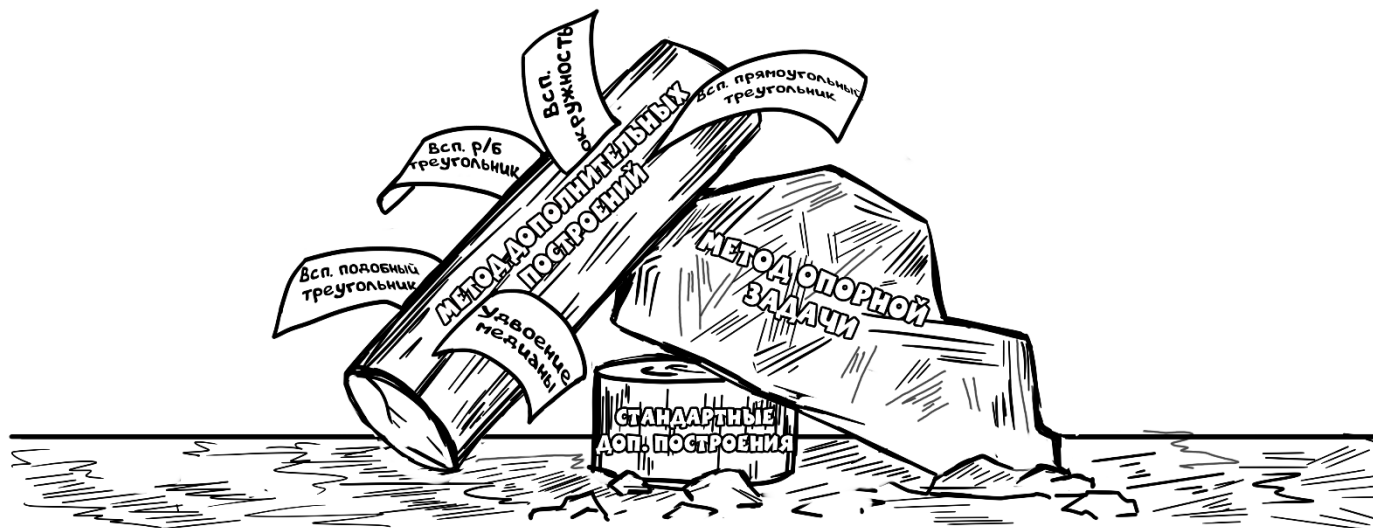
Подход: Опорная задача как пример рационального решения с применением метода дополнительных построений.

Задача может служить не только целью, но и средством обучения. Идея метода - учиться решать задачи с помощью опорных (ключевых).



Подход: В знакомых конфигурациях применить изученные (стандартные) дополнительные построения.

Стандартные построения как составной элемент в опорной задаче.



Что считать стандартным дополнительным построением – это вопрос предварительной договоренности.

Чем больше мы знаем стандартных дополнительных построений, тем уверенней решаем задачи. Для каждого стандартного построения есть одна или несколько опорных (ключевых) задач.

Проведение в трапеции отрезка, параллельного одной из ее боковых сторон или диагоналей, с целью **получения треугольника и параллелограмма** и применения свойств этих фигур.

Проведение перпендикуляров, высот, проведение радиусов окружности в точки касания и т. п. с целью получения **прямоугольных треугольников**.

Построение **параллелограмма**, если задана медиана треугольника, с целью применения свойств параллелограмма.

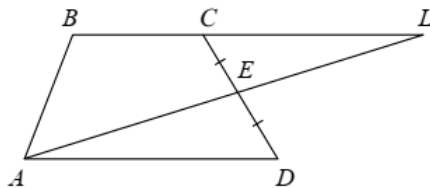
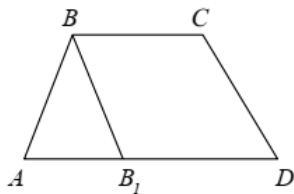
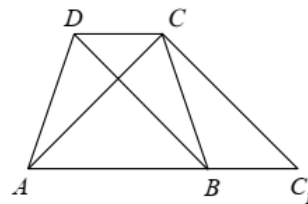
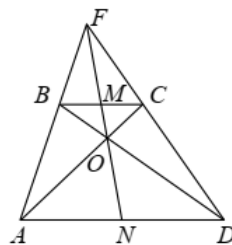
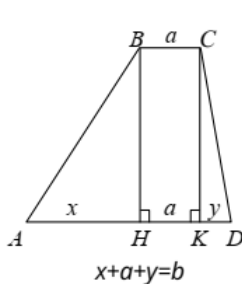
Построение **вспомогательной окружности** с целью применения свойств хорд, касательных и углов.

Построение **равнобедренного треугольника** с целью применения его свойств.

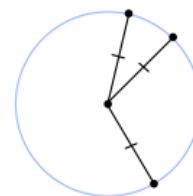
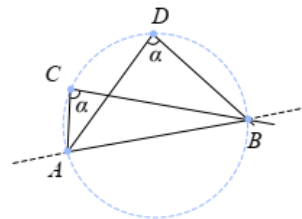
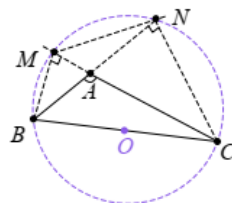
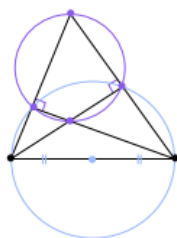
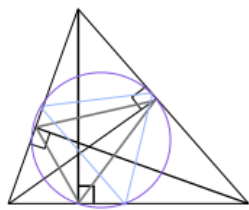
Проведение в многоугольнике отрезка, параллельного одной из его сторон, с целью **применения подобия** (в частности, проведение средней линии, если в условии задана середина отрезка).

Стандартные дополнительные построения в трапеции.

Проведение в трапеции отрезка, параллельного одной из ее боковых сторон или диагоналей, с целью **получения треугольника и параллелограмма** и применения свойств этих фигур.

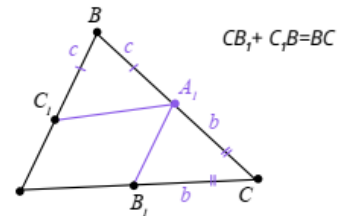
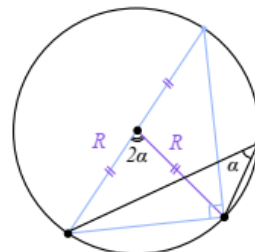
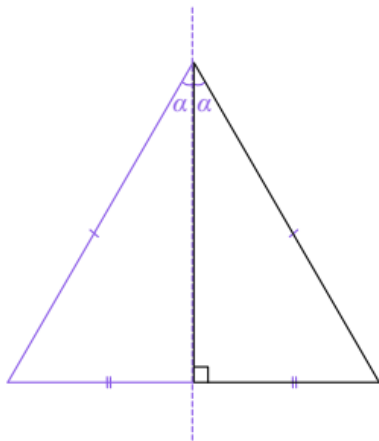


Стандартные дополнительные построения вспомогательной окружности.



Построение **вспомогательной окружности** с целью применения свойств хорд, касательных и углов.

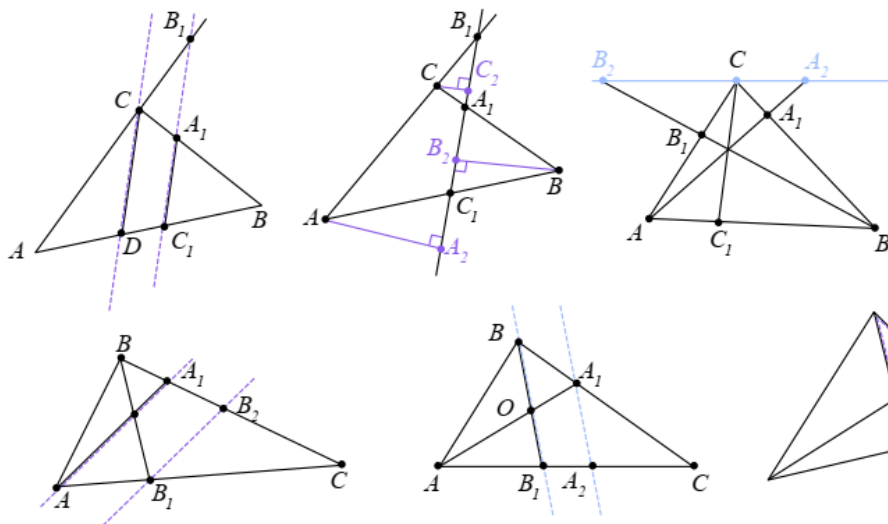
Стандартные дополнительные построения равнобедренного треугольника.



Построение **равнобедренного**
треугольника с целью
применения его свойств.

Стандартные дополнительные построения в задачах с пропорциональными отрезками.

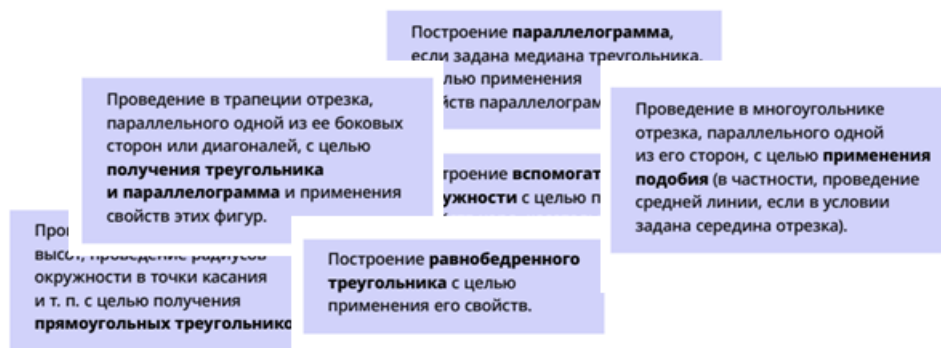
Чем больше мы знаем стандартных дополнительных построений, тем уверенней решаем задачи.



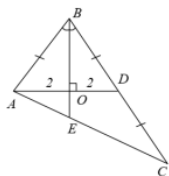
Проведение в многоугольнике отрезка, параллельного одной из его сторон, с целью **применения подобия** (в частности, проведение средней линии, если в условии задана середина отрезка).

В связи с полученным многообразием стандартных построений и опорных задач можно говорить о поиске рационального решения?

Каждому стандартному построению соответствует одна или несколько опорных (ключевых) задач.



Особенность стандартных дополнительных построений:
Четкие способы и цели построения, взаимозаменяемость, ограниченность конкретной геометрической конфигурацией.



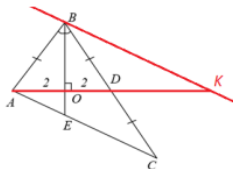
В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC .

Приступая к решению задачи, сразу замечаем, что треугольник ABD равнобедренный, так как биссектриса BO является высотой. Поэтому $AO = OD = 2$ и $AB = BD$, так что $BC = 2AB$. Далее решение можно продолжить по-разному.

Дополнительное построение прямой, параллельной стороне треугольника, с целью появления подобных треугольников:

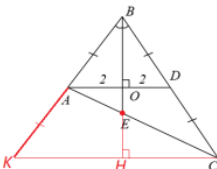
Через вершину B проведем прямую, параллельную стороне AC , продлим медиану AD до пересечения с этой прямой в точке K .

Для применения основного свойства биссектрис и подобия треугольников.



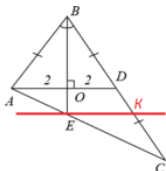
Дополнительное построение отрезка, равного данному, с целью появления равнобедренного треугольника:

На продолжении BA за точку A отложим отрезок $AK = AB$. Для применения свойств медиан треугольника и теоремы о средней линии треугольника.



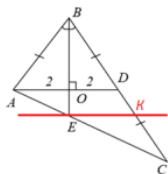
Дополнительное построение прямой, параллельной биссектрисе, с целью появления условий для применения теоремы Фалеса:

Через точку E проведем прямую AK , параллельную AD . Для применения основного свойства биссектрис и теоремы о пропорциональных отрезках (обобщенной теоремы Фалеса).



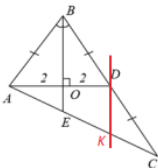
Дополнительное построение прямой, параллельной биссектрисе, с целью появления подобных треугольников:

Через точку E проведем прямую AK , параллельную AD . Для применения основного свойства биссектрис и подобия треугольников.



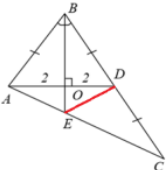
Дополнительное построение прямой, параллельной биссектрисе, с целью появления средней линии:

Через точку D проведем прямую DK , параллельную BE . Для применения основного свойства биссектрис и теоремы о средней линии треугольника.



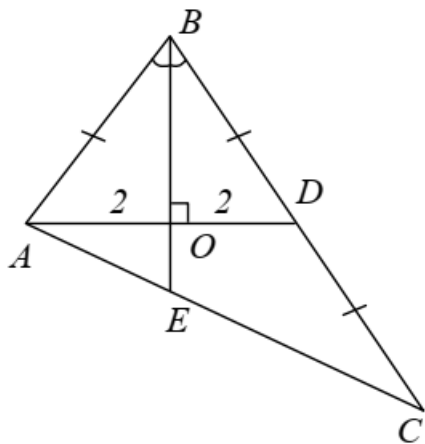
Дополнительное построение отрезка с целью появления равновеликих треугольников:

Построим отрезок ED . Для применения отношения площадей треугольников.



Решите задачу, используя дополнительное построение.

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC .



Приступая к решению задачи, сразу замечаем, что треугольник ABD равнобедренный, так как биссектриса BO является высотой.

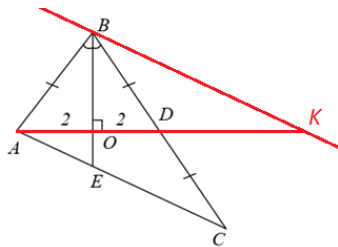
Поэтому $AO = OD = 2$ и $AB = BD$, так что $BC = 2AB$.

Далее решение можно продолжить по-разному:

Решите задачу, используя дополнительное построение.

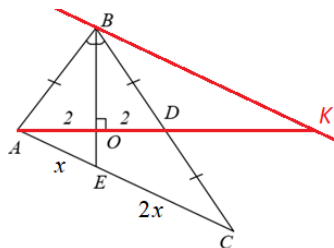
В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC.

Через вершину B проведем прямую, параллельную стороне AC, продлим медиану AD до пересечения с этой прямой в точке K.

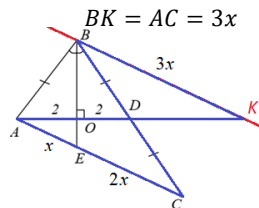


По основному свойству биссектрис:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$$

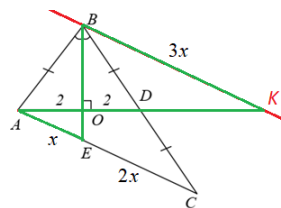


Признаки равенства треугольников, равенство накрест лежащих углов, равенство вертикальных углов:
 $\triangle ADC = \triangle KDB$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам).



Признаки подобия треугольников, равенство накрест лежащих углов, равенство вертикальных углов:
 $\triangle AOE \sim \triangle KOB$ (по двум углам)

$$\frac{BO}{OE} = \frac{BK}{AE} = \frac{3x}{x} = \frac{3}{1}$$



$$BE = BO + OE = 3y + y = 4, y = 1$$

$$BO = 3; OE = 1$$

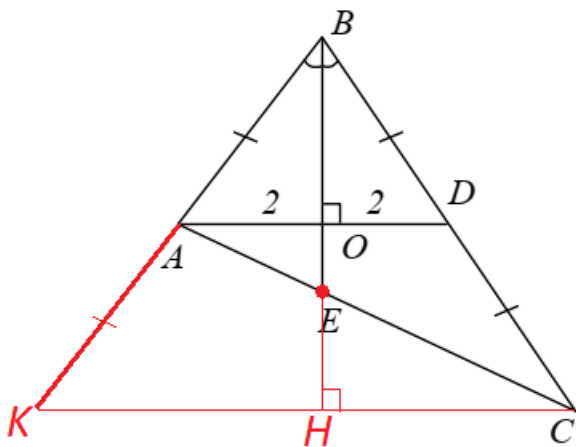
Теорема Пифагора:

$$AB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}; AE = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$BC = 2AB = 2\sqrt{13}; AC = 3AE = 3\sqrt{5}$$

Решите задачу, используя дополнительное построение.

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC .



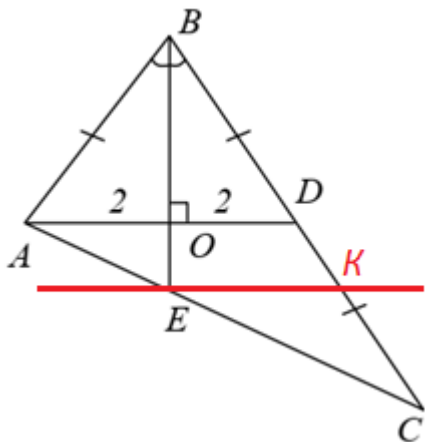
Дополнительное построение отрезка, равного данному, с целью появления равнобедренного треугольника:

На продолжении BA за точку A отложим отрезок $AK=AB$.

Для применения свойств медиан треугольника и теоремы о средней линии треугольника.

Решите задачу, используя дополнительное построение.

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC .



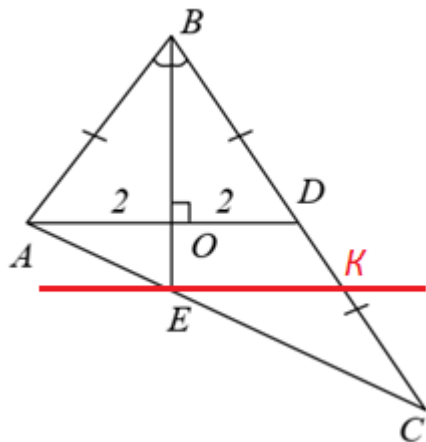
Дополнительное построение прямой, параллельной медиане, с целью появления условий для применения теоремы Фалеса:

Через точку E проведем прямую AK , параллельную AD .

Для применения основного свойства биссектрис и теоремы о пропорциональных отрезках (обобщенной теоремы Фалеса).

Решите задачу, используя дополнительное построение.

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC .



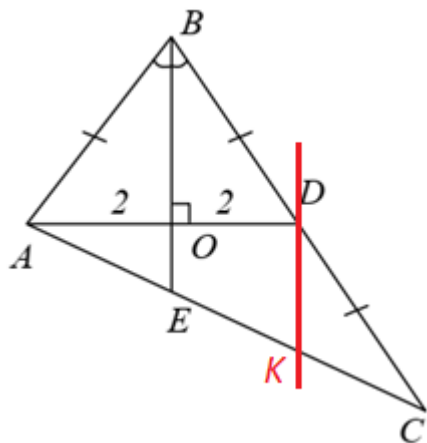
Дополнительное построение прямой, параллельной чевиане, с целью появления подобных треугольников:

Через точку E проведем прямую AK , параллельную AD .

Для применения основного свойства биссектрис и подобия треугольников.

Решите задачу, используя дополнительное построение.

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC .



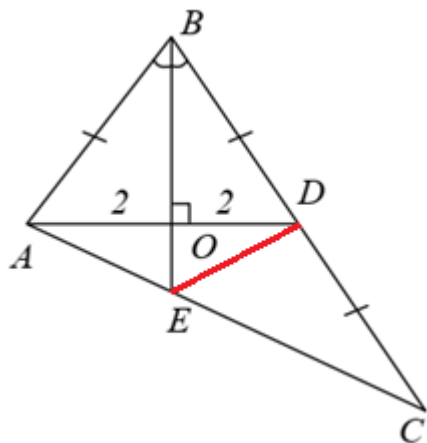
Дополнительное построение прямой, параллельной
чевиане, с целью появления подобных треугольников:

Через точку D проведем прямую DK , параллельную BE .

Для применения основного свойства биссектрис и
теоремы о средней линии треугольника.

Решите задачу, используя дополнительное построение.

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC .



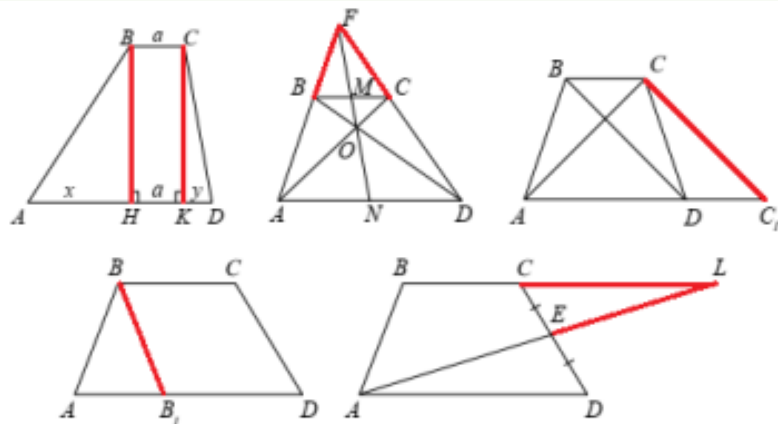
Дополнительное построение отрезка с целью появления равновеликих треугольников:

Построим отрезок ED .

Для применения отношения площадей треугольников.

Решите задачу, используя стандартное дополнительное построение.

Для трапеции имеется ряд стандартных дополнительных построений.



Задачи:

Углы при одном из оснований трапеции равны 20° и 70° , а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 2. Найдите длины оснований трапеции, если длина средней линии этой трапеции равна 4.

Точка E — середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Найдите площадь треугольника ECD , если площадь трапеции равна 12.

Задача ЕГЭ 2017 год

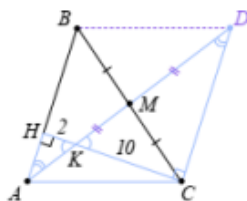
Основания трапеции равны 4 и 9, а ее диагонали равны 5 и 12.

- Докажите, что диагонали перпендикулярны.
- Найдите площадь трапеции.

Решите задачу, используя стандартное дополнительное построение.

Стандартные дополнительные построения в треугольнике.

Удвоение медианы с целью появления параллелограмма и применения его свойств.

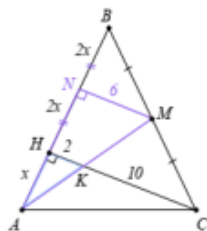


Задачи:

Найдите площадь треугольника, если его две стороны равны 1 и $\sqrt{15}$, а медиана третьей стороны равна 2.

Медиана AM и высота CH остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке K . Известно, что $CK = 10$, $KH = 2$. Найдите отношение $AH:HB$.

Построение прямой, параллельной стороне или чевиане треугольника с целью применения подобия, теоремы о средней линии, теоремы Фалеса и т.д.



Задачи:

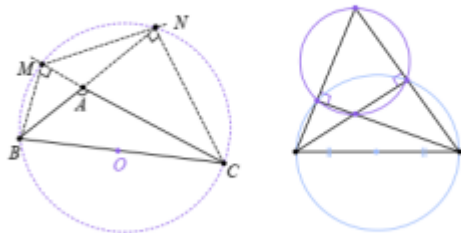
В треугольнике ABC известно, что $AB = 4$, $\angle ABC = 120^\circ$, медиана $BM = 2$. Найдите BC .

Найдите площадь остроугольного треугольника ABC , если известно, что $\angle BAC = 45^\circ$, $AB = 4\sqrt{2}$, а медиана $AM = \sqrt{29}$.

Решите задачу, используя стандартное дополнительное построение.

Вспомогательная окружность.

Построение вспомогательной окружности с целью применения свойств хорд, касательных и углов.



Задачи:

В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN . Найдите длину отрезка MN , если $BC = 12$, $\angle BAC = 120^\circ$

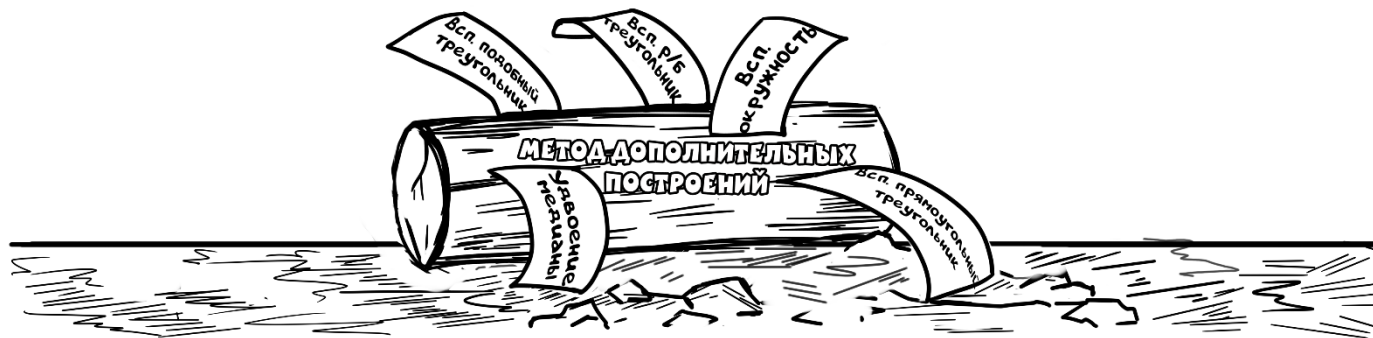
Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . На катете BC выбрана произвольная точка M . Из точки M проведен перпендикуляр MN на гипотенузу AB . Докажите, что $\angle ANC = \angle AMC$

Задача для самостоятельного решения (ЕГЭ 2020 год).

На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причем $AC_1 : C_1B = 8 : 3$, $BA_1 : A_1C = 1 : 2$, $CB_1 : B_1A = 3 : 1$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D .

а) Докажите, что ADA_1B_1 — параллелограмм.

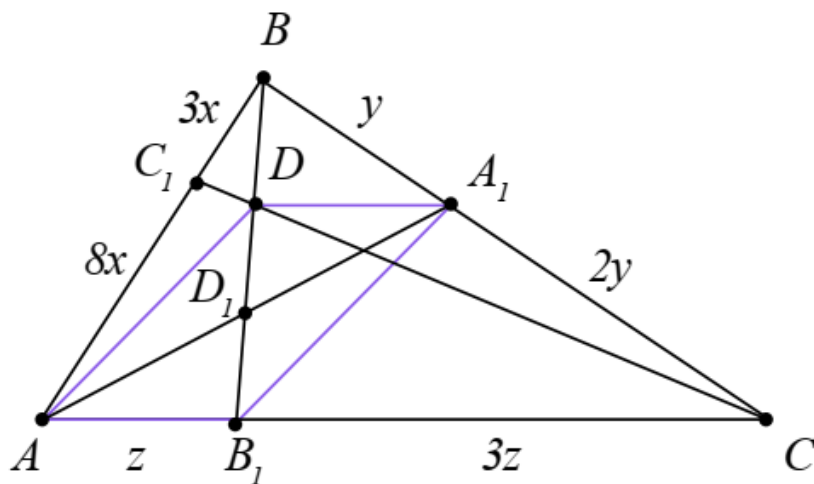
б) Найдите CD , если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC = 28$, $BC = 18$.



На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причем $AC_1 : C_1B = 8 : 3$, $BA_1 : A_1C = 1 : 2$, $CB_1 : B_1A = 3 : 1$.
Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D .

а) Докажите, что ADA_1B_1 — параллелограмм.

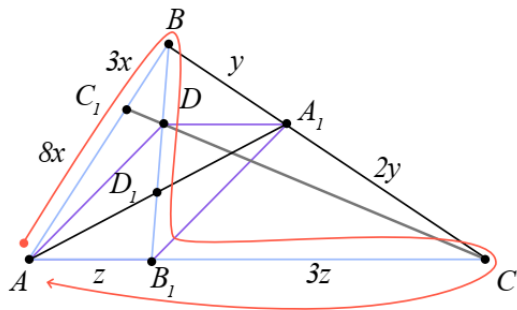
б) Найдите CD , если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC = 28$, $BC = 18$.



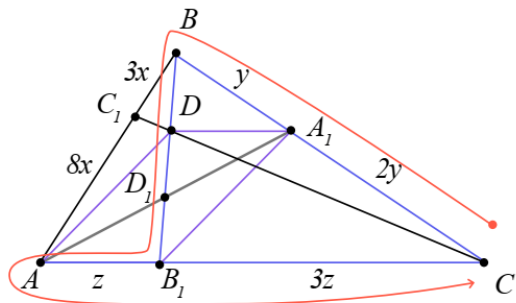
$$\frac{8x}{3x} \cdot \frac{y}{2y} \cdot \frac{3z}{z} \neq 1$$

По теореме Менелая.

$$\frac{8x}{3x} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{3z}{4z} = 1 \quad \frac{BD}{DB_1} = \frac{1}{2}$$



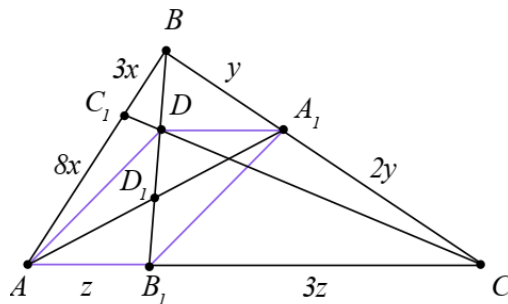
По теореме Менелая.



$$\frac{8x}{3x} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{3z}{4z} = 1 \quad \frac{BD}{DB_1} = \frac{1}{2}$$

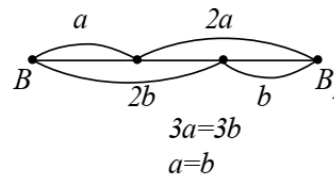
$$\frac{2y}{y} \cdot \frac{BD_1}{D_1B_1} \cdot \frac{z}{4z} = 1 \quad \frac{BD_1}{D_1B_1} = \frac{2}{1}$$

По теореме Менелая.

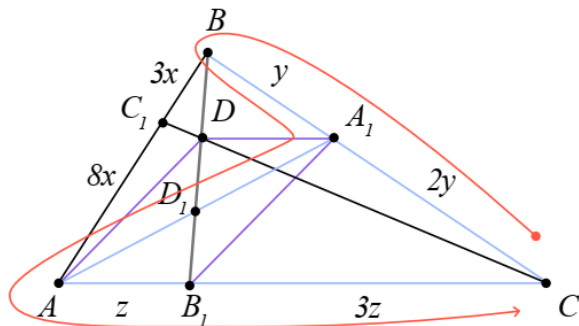


$$\frac{8x}{3x} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{3z}{4z} = 1 \quad \frac{BD}{DB_1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2y}{y} \cdot \frac{BD_1}{D_1B_1} \cdot \frac{z}{4z} = 1 \quad \frac{BD_1}{D_1B_1} = \frac{2}{1}$$



По теореме Менелая.

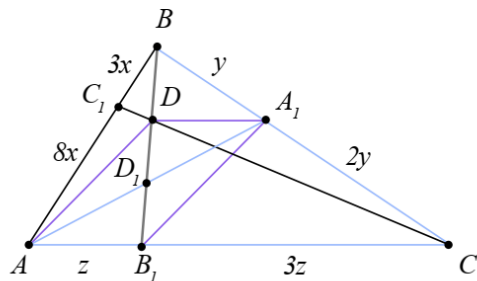


$$\frac{8x}{3x} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{3z}{4z} = 1 \quad \frac{BD}{DB_1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2y}{y} \cdot \frac{BD_1}{D_1B_1} \cdot \frac{z}{4z} = 1 \quad \frac{BD_1}{D_1B_1} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{3z}{z} \cdot \frac{AD_1}{D_1 A_1} \cdot \frac{y}{3y} = 1 \quad \frac{AD_1}{D_1 A_1} = 1$$

По теореме Менелая.



$$\frac{8x}{3x} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{3z}{4z} = 1 \quad \frac{BD}{DB_1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2y}{y} \cdot \frac{BD_1}{D_1B_1} \cdot \frac{z}{4z} = 1 \quad \frac{BD_1}{D_1B_1} = \frac{2}{1}$$

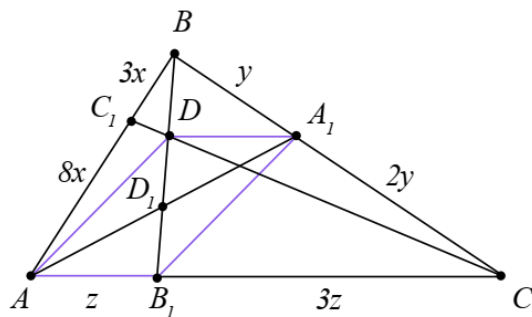
$$\frac{3z}{z} \cdot \frac{AD_1}{D_1A_1} \cdot \frac{y}{3y} = 1 \quad \frac{AD_1}{D_1A_1} = 1$$

$$AD_1 = D_1A_1$$

$$DD_1 = D_1B_1$$

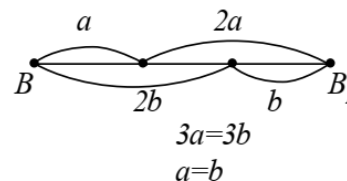
Диагонали точкой пересечения делятся пополам, тогда ADA_1B_1 — параллелограмм.

По теореме Менелая и подобие треугольников.

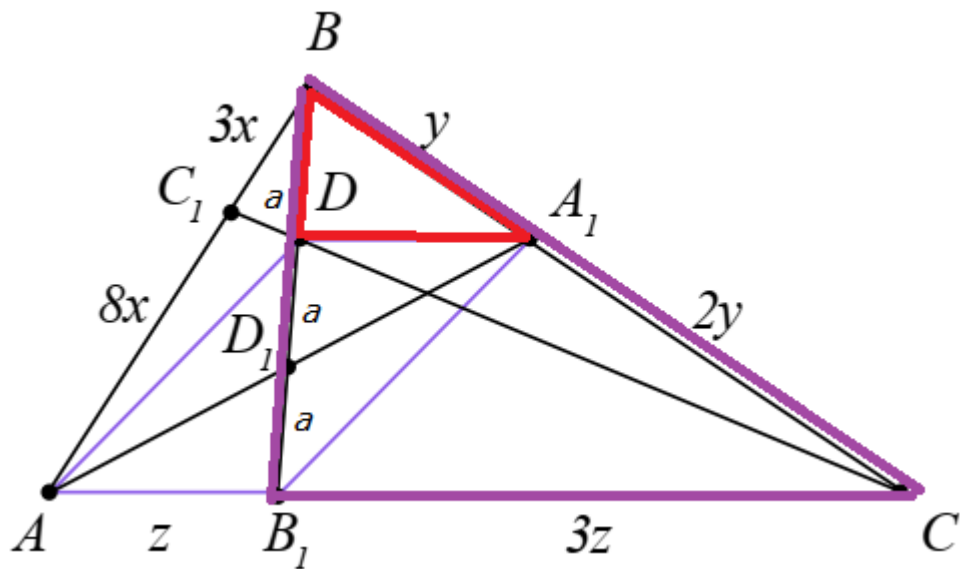


$$\frac{8x}{3x} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{3z}{4z} = 1 \quad \frac{BD}{DB_1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2y}{y} \cdot \frac{BD_1}{D_1B_1} \cdot \frac{z}{4z} = 1 \quad \frac{BD_1}{D_1B_1} = \frac{2}{1}$$



По теореме Менелая и подобие треугольников.



Дополнительное построения прямой, параллельной стороне треугольника.

Решение.

а) Проведём через точку B прямую, параллельную прямой AC . Пусть эта прямая пересекает прямую CC_1 в точке T (см. рис.). Тогда треугольники ACC_1 и BTC_1 подобны по двум углам, значит,

$$\frac{BT}{AC} = \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{10}{21}.$$

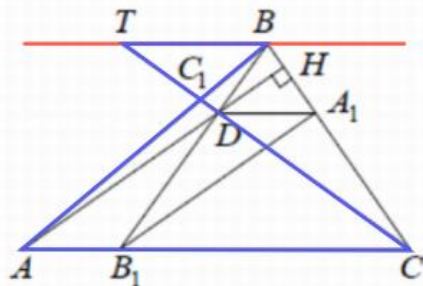
Треугольники B_1CD и BTB_1 также подобны по двум углам, следовательно,

$$\frac{BD}{DB_1} = BT : CB_1 = \frac{10AC}{21} : \frac{5AC}{7} = \frac{2}{3} = \frac{BA_1}{A_1C}.$$

Таким образом, прямая A_1D параллельна прямой AC . Значит, треугольники DBA_1 и B_1BC подобны, следовательно,

$$DA_1 = \frac{BA_1}{BC} \cdot B_1C = \frac{2}{5} \cdot \frac{5AB_1}{2} = AB_1.$$

Значит, в четырёхугольнике ADA_1B_1 противоположные стороны равны и параллельны, следовательно, он является параллелограммом.



Дополнительное построения прямой, параллельной стороне треугольника.

Решение.

а) Проведём через точку B прямую, параллельную прямой AC . Пусть эта прямая пересекает прямую CC_1 в точке T (см. рис.). Тогда треугольники ACC_1 и BTC_1 подобны по двум углам, значит,

$$\frac{BT}{AC} = \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{10}{21}.$$

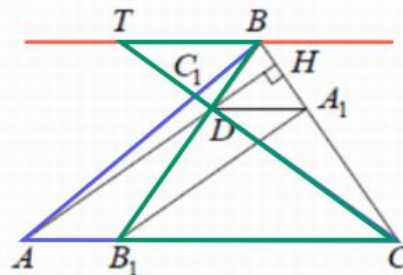
Треугольники B_1CD и $BT D$ также подобны по двум углам, следовательно,

$$\frac{BD}{DB_1} = BT : CB_1 = \frac{10AC}{21} : \frac{5AC}{7} = \frac{2}{3} = \frac{BA_1}{A_1C}.$$

Таким образом, прямая A_1D параллельна прямой AC . Значит, треугольники DBA_1 и B_1BC подобны, следовательно,

$$DA_1 = \frac{BA_1}{BC} \cdot B_1C = \frac{2}{5} \cdot \frac{5AB_1}{2} = AB_1.$$

Значит, в четырёхугольнике ADA_1B_1 противоположные стороны равны и параллельны, следовательно, он является параллелограммом.



Дополнительное построения прямой, параллельной стороне треугольника.

Решение.

а) Проведём через точку B прямую, параллельную прямой AC . Пусть эта прямая пересекает прямую CC_1 в точке T (см. рис.). Тогда треугольники ACC_1 и BTC_1 подобны по двум углам, значит,

$$\frac{BT}{AC} = \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{10}{21}.$$

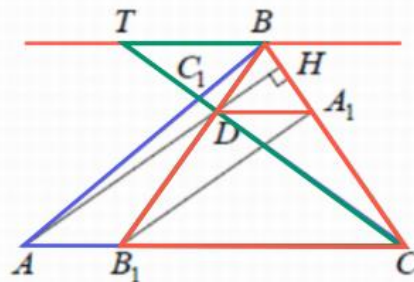
Треугольники B_1CD и BDT также подобны по двум углам, следовательно,

$$\frac{BD}{DB_1} = BT : CB_1 = \frac{10AC}{21} : \frac{5AC}{7} = \frac{2}{3} = \frac{BA_1}{A_1C}.$$

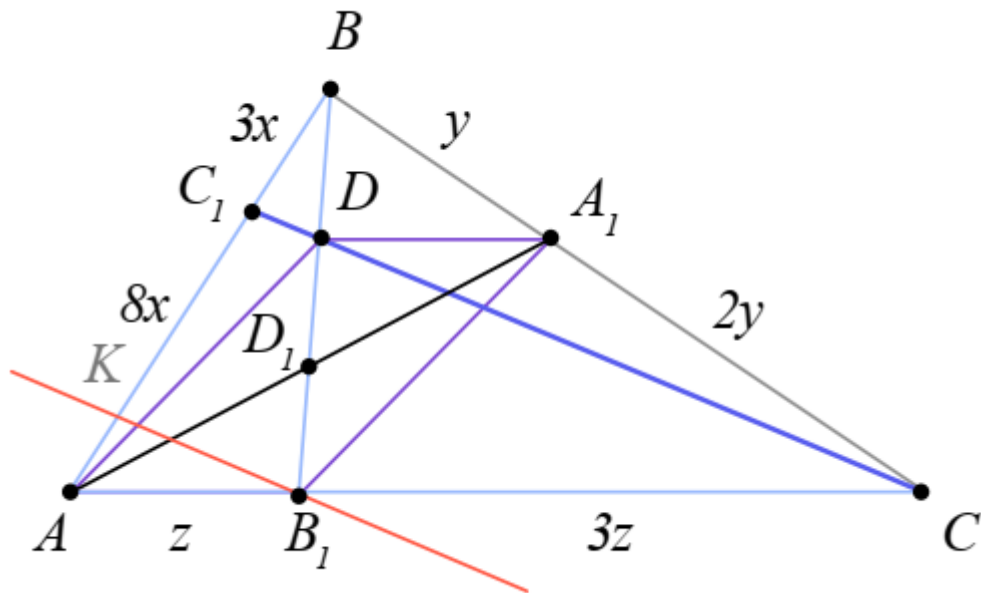
Таким образом, прямая A_1D параллельна прямой AC . Значит, треугольники DBA_1 и B_1BC подобны, следовательно,

$$DA_1 = \frac{BA_1}{BC} \cdot B_1C = \frac{2}{5} \cdot \frac{5AB_1}{2} = AB_1.$$

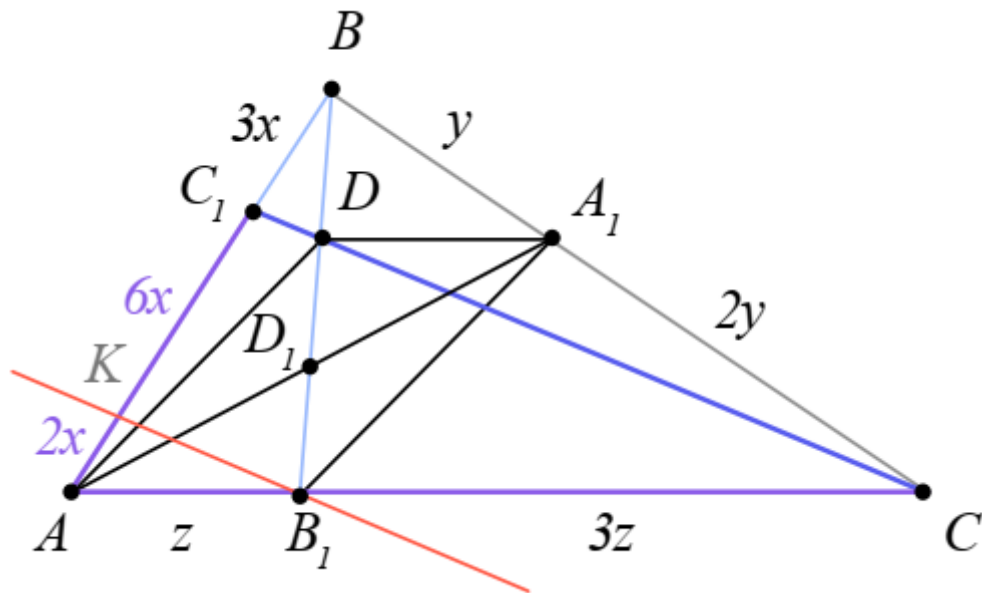
Значит, в четырёхугольнике ADA_1B_1 противоположные стороны равны и параллельны, следовательно, он является параллелограммом.



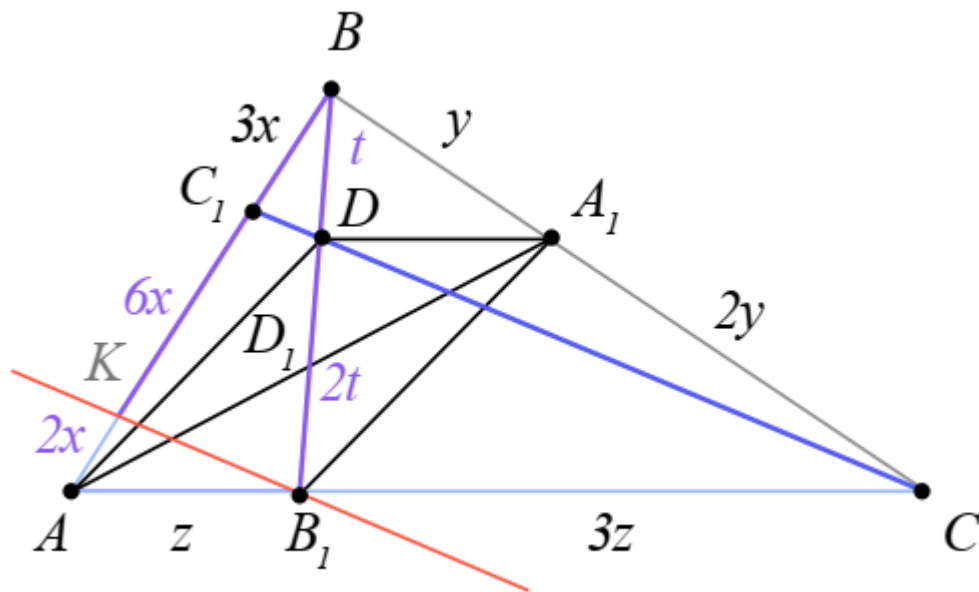
Дополнительное построения прямой, параллельной чевиане треугольника.



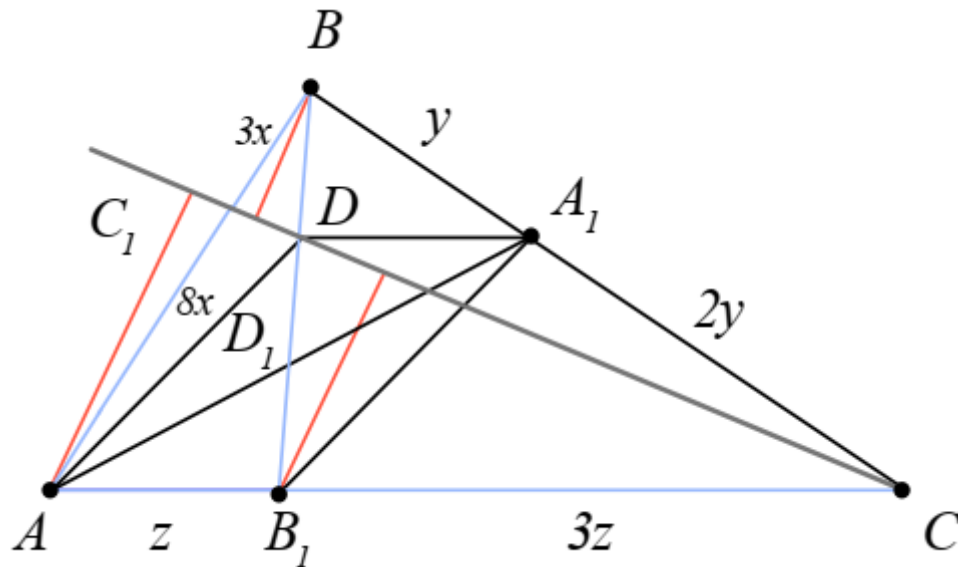
Дополнительные построения прямой, параллельной чевиане треугольника.



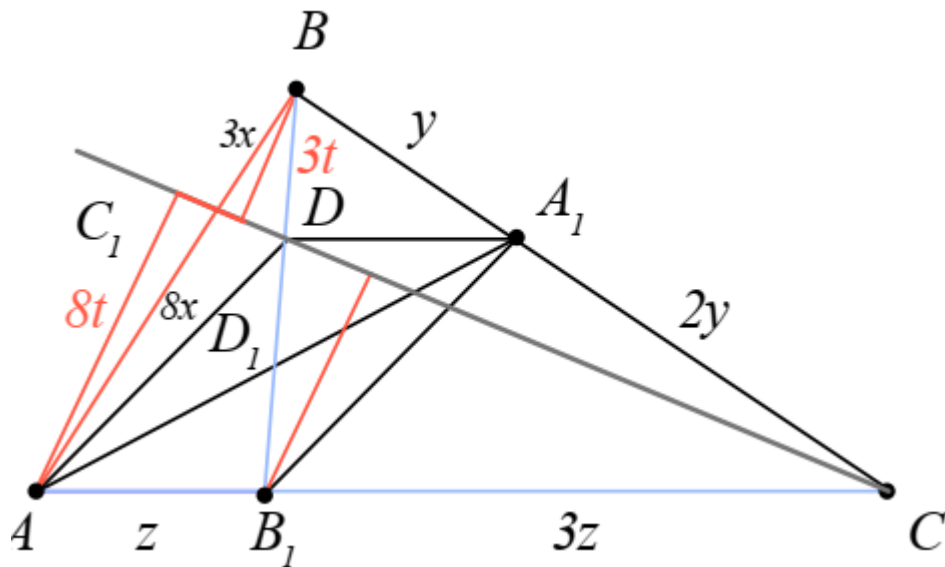
Дополнительные построения прямой, параллельной чевиане треугольника.



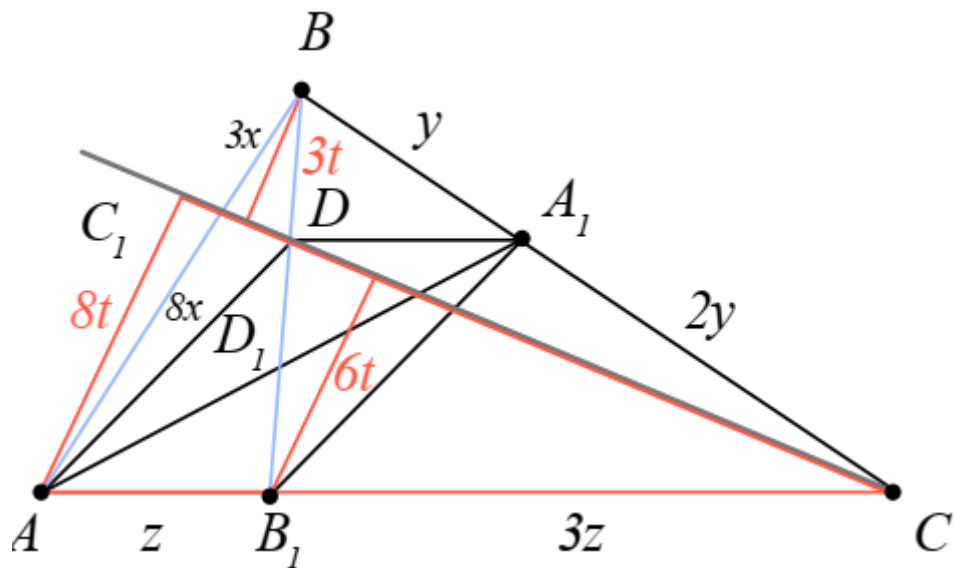
*Дополнительные построения перпендикуляров к
чевиане треугольника.*



*Дополнительное построения перпендикуляров к
чевиане треугольника.*



Дополнительное построения перпендикуляров к чевиане треугольника.



Домашнее задание.

Задача 1

На стороне CD трапеции $ABCD$ отмечена точка M , которая является серединой этой стороны.

а) Докажите, что $S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

б) На стороне CD отмечена точка K , такая, что $S_{BKC} = \frac{1}{2} S_{AKD}$ причем $AD = 2BC$.

Расстояние от точки D до прямой AB равно 10. Найдите расстояние от точки K до стороны AB .

Задача 2

Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 6MB$ и $2DN = 3CN$.

а) Докажите, что $AD = 3BC$.

б) Найдите длину отрезка MN , если радиус окружности равен $\sqrt{105}$.

Задача 3

На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки K , L , M , причем $AK : KB = 2 : 3$, $BL : LC = 1 : 2$, $CM : MA = 3 : 1$. Отрезки KL и BM пересекаются в точке O .

а) Докажите, что $BO = OM$.

б) Найдите площадь треугольника KOB если $AB = 10$, $BC = 8$, $AC = 4$

Задача 4

В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH , из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC .

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 2$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 4.