

На стороне CD трапеции $ABCD$ отмечена точка M , которая является серединой этой стороны.

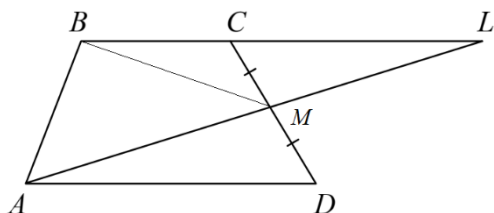
а) Докажите, что $S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

б) На стороне CD отмечена точка K , такая, что $S_{BKC} = \frac{1}{2} S_{AKD}$ причем $AD = 2BC$.

Расстояние от точки D до прямой AB равно 10. Найдите расстояние от точки K до стороны AB .

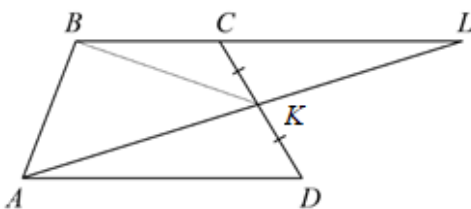
Решение:

а) Первый пункт задачи – это известная 25 задача ОГЭ. Существует много разных подходов для доказательства утверждения пункта а). Можно, например, заметить, что площадь треугольника $S_{ABM} = S_{ABCD} - S_{BCM} - S_{ADM} = \frac{AD+BC}{2} \cdot 2h - \frac{1}{2} BC \cdot h - \frac{1}{2} AD \cdot h$.



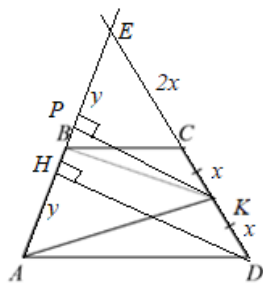
А можно воспользоваться стандартным дополнительным построением в трапеции. Если дана середина боковой стороны трапеции, то проведем прямую, содержащую середину боковой стороны и вершину трапеции до пересечения с основанием трапеции в точке L . Треугольники CML и DMA равны по стороне и двум прилежащим

углам, значит $AM = ML$ и $AD = CL$. Тогда площадь треугольника ABL равна площади трапеции $ABCD$, а BM является медианой в треугольнике ABL . Медиана делит площадь пополам, тогда площадь треугольника AMB половина площади треугольника ABL , а значит и половина площади трапеции $ABCD$, которая равновеликая с треугольником ABL .



б) По условию BC в два раза меньше AD , и площадь BKC в два раза меньше площади AKD . Если вспомнить, что площади треугольников, имеющие равные высоты, относятся как основания, то можно сделать вывод, что расстояние от точки K до прямой BC равно расстоянию от точки K до прямой AD , а значит точка K является серединой стороны CD

(например, по теореме Фалеса), т.е. совпадает с точкой M .



Расстояние от точки до прямой – это длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую. Опустим перпендикуляры KP и DH на прямую AB . Отметим, что перпендикуляры из точек K и D на прямую AB не обязаны попасть на сторону трапеции, они могут упасть на продолжение стороны. Тогда вполне закономерно воспользоваться еще одним дополнительным построением для трапеции, продлить боковые стороны трапеции до пересечения в точке E .

Далее рассуждать можно по-разному. Можно, например, заметить подобие прямоугольных треугольников KPE и DHE с общим углом E . Причем, коэффициент подобия равен отношению $EK:ED=3:4$. Тогда найдем длину KP :

$$KP = \frac{3}{4} \cdot DH = \frac{30}{4} = 7,5.$$

Можно рассуждать иначе. Отметим, что BC – средняя линия треугольника AED , так как она параллельна AD и равна половине AD . Средняя линия отсекает четверть площади исходного треугольника AED , т.е. площадь трапеции $ABCD$ составляет три четверти от площади треугольника AED . Одновременно, DH является высотой треугольника AED , опущенную на сторону AE , а KP является высотой треугольника AKB , про который в первом пункте задачи мы выяснили, что его площадь в два раза меньше площади трапеции. Тогда приравняем выражения для площадей:

$$S_{ABCD} = \frac{3}{4} S_{AED} = 2S_{AKB}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} AD \cdot 2y \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} KP \cdot y \right)$$

$$\frac{3}{4} AD = KP$$

$$KP = \frac{3 \cdot 10}{4} = 7,5$$

Ответ: 7,5