

В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH , из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

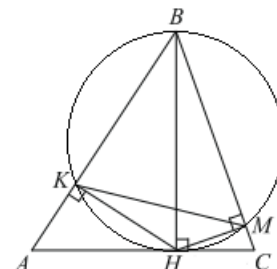
- Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC .
- Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 2$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 4.

Решение.

а) Рассмотрим треугольники ABH и HVK . Они подобны по двум углам (прямоугольные и угол B – общий). Тогда углы BAH и KHB равны как сходственные углы в подобных треугольниках.

Рассмотрим четырёхугольник $BKHM$: в нем $\angle BKH + \angle BMH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, следовательно, около четырёхугольника $BKHM$ можно описать окружность.

Углы KHB и KMB — вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу, следовательно, они равны. Таким образом, $\angle BAC = \angle KHB = \angle KMB$. Треугольники ABC и MBK подобны по двум углам.



б) Найдем какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника MBK . Так как по доказанному утверждению в первом пункте задачи эти треугольники подобны, то их площади относятся как квадрат коэффициента подобия. Найдем коэффициент подобия треугольников ABC и MBK .

Из прямоугольного треугольника BKH находим, что $BK = BH \cdot \sin \angle KHB$.

По теореме синусов для треугольника ABC справедливо равенство $2R = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$, откуда $BC = 2R \cdot \sin \angle BAC$. Так как

$$\angle KHB = \angle BAC, \text{ получаем: } k = \frac{BC}{BK} = \frac{2R}{BH} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4.$$

Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия, т.е. $S_{\triangle ABC} = 16 \cdot S_{\triangle MBK}$, тогда $S_{AKMC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle MBK} = 15 \cdot S_{\triangle MBK}$.

$$\text{Значит } \frac{S_{\triangle MBK}}{S_{AKMC}} = \frac{1}{15}.$$

Ответ: 1:15

Задача 16 ЕГЭ 2014 года

