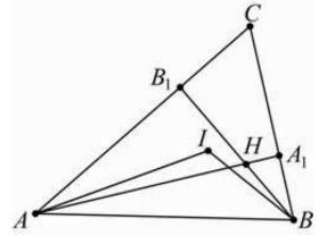


### Решения:

1. Две вершины, центр вписанной окружности и точка пересечения высот остроугольного треугольника лежат на одной окружности. Найдите угол при третьей вершине.

#### Решение:

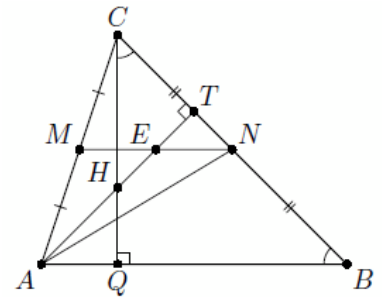
- Рассмотрим треугольник  $ABC$ , в котором проведены высоты  $AA_1$  и  $BB_1$ . Пусть точка  $H$  — точка пересечения высот, точка  $I$  — центр вписанной окружности.
- Сумма углов четырёхугольника  $A_1HB_1C$  равна  $360^\circ$ . Получаем  $\angle AHB = \angle A_1HB_1 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle C = 180^\circ - \angle C$ .
- По теореме о сумме углов треугольника имеем соотношения  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  (для треугольника  $ABC$ ) и  $\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \angle AIB = 180^\circ$  (для треугольника  $ABI$ ). Отсюда
$$\angle AIB = 180^\circ - \frac{\angle A + \angle B}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle C}{2} \Rightarrow \angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}.$$
- Точки  $A, B, H$  и  $I$  лежат на одной окружности. Так как треугольник  $ABC$  остроугольный, точки  $H$  и  $I$  лежат по одну сторону от хорды  $AB$ , то есть вписанные углы  $AIB$  и  $AHB$  опираются на одну и ту же дугу. Значит,  $\angle AIB = \angle AHB$ , откуда  $90^\circ + \frac{\angle C}{2} = 180^\circ - \angle C$ , а значит  $\angle C = 60^\circ$ .



2. В треугольнике  $ABC$  точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AC$  и  $BC$  соответственно. Известно, что точка пересечения медиан треугольника  $AMN$  является точкой пересечения высот треугольника  $ABC$ . Найдите угол  $ABC$ .

#### Решение:

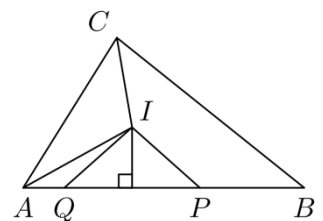
- Пусть  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ . Тогда высота  $AT$  треугольника  $ABC$  содержит медиану треугольника  $AMN$ , то есть пересекает отрезок  $MN$  в его середине — точке  $E$ .
- Треугольники  $ETN$  и  $ATB$  подобны (см. рис.), следовательно,  $TN : TB = TE : TA = EN : AB = 1 : 4$ . Следовательно,  $CT = \frac{BT}{2}$ .
- Поскольку  $H$  — точка пересечения медиан треугольника  $AMN$ ,  $EH = \frac{AE}{3} = ET$ . Следовательно,  $HT = \frac{AT}{2}$ .
- Значит, прямоугольные треугольники  $CTH$  и  $ATA$  подобны, и  $\angle TCH = \angle TBA$ . Но  $CH$  — часть высоты  $CQ$  треугольника  $ABC$ , поэтому эти равные углы являются острыми углами прямоугольного треугольника  $CQB$ .



3. На стороне  $AB$  неравнобедренного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AC = AP$  и  $BC = BQ$ . Серединный перпендикуляр к отрезку  $PQ$  пересекает биссектрису угла  $C$  в точке  $R$  (внутри треугольника). Докажите, что  $\angle ACB + \angle PRQ = 180^\circ$ .

#### Решение:

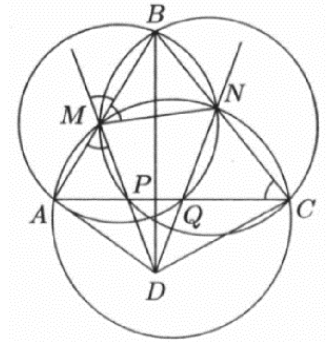
- Отметим на биссектрисе угла  $C$  точку  $I$  — точку пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ . Тогда  $AC = AP$  и  $\angle CAI = \angle PAI$ , поэтому треугольники  $ACI$  и  $API$  равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно,  $IP = IC$  и  $\angle API = \angle ACI = \frac{\angle ACB}{2}$ .
- Аналогично доказывается, что  $IQ = IC$ . Стало быть,  $IP = IQ$  и точка  $I$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $PQ$ . Но тогда она совпадает с точкой  $R$ , поскольку является точкой пересечения тех же прямых.
- Тогда  $\angle PRQ = \angle PIQ = 180^\circ - 2\angle API = 180^\circ - \angle ACB$ .



4. На сторонах  $AB$  и  $BC$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно. Отрезки  $MD$  и  $ND$  пересекают диагональ  $AC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Оказалось, что четырёхугольники  $BMPC, BNQA, AMNC$  вписанные. Докажите, что  $\angle BDN$  и  $\angle BDM$  равны.

**Решение:**

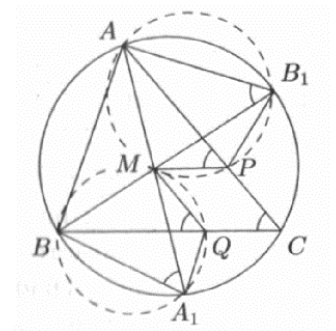
- Так как четырёхугольник  $BMPC$  – вписанный, то
- $\angle AMP = 180^\circ - \angle PMB = \angle BCP$ .
- Так как четырёхугольник  $AMNC$  – вписанный, то
- $\angle NMB = 180^\circ - \angle AMN = \angle ACN$ .
- Рассмотрим угол, вертикальный с углом  $AMP$ .
- Получаем, что  $MB$  – биссектриса внешнего угла  $\triangle MDN$ .
- Аналогично  $NB$  – тоже биссектриса внешнего угла  $\triangle MDN$ .
- Как известно, биссектрисы двух внешних углов и биссектриса третьего угла треугольника пересекаются в одной точке (**центре вневписанной окружности!**). (Вспоминаем элементарные теоремы и замечательные точки, связанные с треугольником).
- Следовательно,  $DB$  – биссектриса  $\angle MDN$ , то есть  $\angle BDN$  и  $\angle BDM$  равны.



5. В  $\triangle ABC$  продолжения медиан из вершин  $A$  и  $B$  пересекают описанную около  $\triangle ABC$  окружность в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. На стороне  $AC$  выбрана точка  $P$ , а на стороне  $BC$  – точка  $Q$  так, что  $AP = 2PC$ ,  $BQ = 2QC$ . Докажите, что  $\angle APB_1 = \angle BQA_1$

**Решение:**

- Пусть  $M$  – точка пересечения медиан.
- Как известно, медианы делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины.
- Точки  $P$  и  $Q$  делят соответствующие стороны треугольника тоже в отношении 2:1.
- Значит  $MP \parallel BC$ ,  $MQ \parallel AC$ . Тогда  $\angle BQM = \angle BCA = \angle MPA$  (как соответствующие углы).
- Кроме того,  $\angle BA_1M = \angle BCA = \angle BB_1A$  (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу  $AB$ ).
- Заметим, что из точек  $A_1$  и  $Q$  отрезок  $BM$  виден под одним углом, значит четырёхугольник  $BMQA_1$  – вписанный.
- Аналогично четырёхугольник  $AB_1PM$  – вписанный.
- Наконец, в силу равенства вписанных углов и равенства вертикальных углов получаем:
- $\angle BQA_1 = \angle BMA_1 = \angle AMB_1 = \angle APB_1$ .



6. В  $\triangle ABC$  вписанная окружность касается сторон  $AB$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Медиана  $\triangle ABC$  из вершины  $B$  пересекает отрезок  $PQ$  в точке  $R$ . Докажите, что  $\angle ARC$  – тупой.

**Решение:**

- Не умаляя общности, можно считать,  $AB \leq BC$ .
- Тогда медиана  $BM$  лежит между биссектрисой  $BL$  и стороной  $BC$ .
- $BL$  пересекает отрезок  $PQ$  в его середине.
- Так как  $\angle BRT$  – острый угол прямоугольного треугольника  $\triangle BTR$ , значит  $\angle MRT \geq 90^\circ$ .
- Далее, так как средняя линия четырёхугольника не превосходит полусуммы заключающих её сторон (равенство имеет место только в том случае, когда эти стороны параллельны), получаем, что
- $MR \leq MT < \frac{AP+CQ}{2} = \frac{AC}{2}$ , значит  $\angle ARC$  – тупой (медиана меньше половины стороны, к которой проведена).

