

Домашнее задание:

1. Решите уравнение $4\sin 3x + 3\cos 4x = 7$
2. Найдите все интервалы вида $(k; k+1)$, где k — целое число, содержащее нули функции $f(x) = ((x^3 - 1) - 1)^3 - 1$
3. Найдите все значение параметра a , при каждом из которых уравнение $\sin^{14} x + (a - 3\sin x)^7 + \sin^2 x + a = 3\sin x$ имеет хотя бы один корень.
4. В течение одной рабочей недели цена на нефть менялась каждый день на одно и то же число процентов a ($1 \leq a \leq 50$) по сравнению с предыдущей ценой, причем в понедельник и среду она уменьшалась, а во вторник, четверг и пятницу — увеличивалась. Могла ли к субботе цена на нефть увеличиться на 11% по сравнению с первоначальной ценой?

Решение домашнего задания:

Решите уравнение $4\sin 3x + 3\cos 4x = 7$

$$\begin{aligned} \sin 3x \leq 1 \\ \cos 4x \leq 1 \end{aligned} \quad \begin{cases} \sin 3x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 4x = 2\pi k \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{aligned} \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} &= \frac{\pi k}{2} \\ 1 + 4n &= 3k \\ k &= \frac{1+4n}{3} = n + \frac{1+n}{3} \\ 1+n &= 3t, \quad t \in \mathbb{Z} \\ n &= 3t-1 \\ k &= \frac{1+4n}{3} = 4t-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi(3t-1)}{3} = \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} + 2\pi t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi t, t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$

Найдите все интервалы вида $(k; k+1)$, где k — целое число, содержащее нули функции

$$f(x) = ((x^3 - 1) - 1)^3 - 1$$

Рассмотрим функцию $g(x) = x^3 - 1$ — строго возрастающая на всей числовой оси.

Функция $f(x) = g(g(g(x)))$ — строго возрастающая на всей числовой оси.

Следовательно уравнение $f(x) = 0$ может иметь только одно решение.

Заметим, что $f(1) = ((1-1)^3 - 1)^3 - 1 = -2 < 0$; $f(2) = ((8-1)^3 - 1)^3 - 1 > 0$

Ответ: интервал существует только один — (1; 2).

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sin^{14} x + (a - 3 \sin x)^7 + \sin^2 x + a = 3 \sin x$ имеет хотя бы один корень.

$$\begin{aligned} f(\sin^2 x) &= f(3 \sin x - a) & \bullet \quad (\sin^2 x)^7 + \sin^2 x &= (3 \sin x - a)^7 + 3 \sin x - a \\ \sin^2 x &= 3 \sin x - a & f(t) &= t^7 + t \\ \sin x &= z, -1 \leq z \leq 1 & \bullet \quad \text{В силу монотонного возрастания} \\ z^2 - 3z + a &= 0 & \text{функции } f(t) \\ D &= 9 - 4 \cdot a \geq 0 & f(t_1) = f(t_2) \Leftrightarrow t_1 = t_2 \\ a &\leq \frac{9}{4} & t_1 = (\sin^2 x); t_2 = (3 \sin x - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 \leq z \leq 1 & & -1 \leq \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4a}}{2} \leq 1 & & 1 \leq \sqrt{9 - 4a} \leq 5 \\ z^2 - 3z + a = 0 & & -2 \leq 3 \pm \sqrt{9 - 4a} \leq 2 & & 1 \leq 9 - 4a \leq 25 \\ D = 9 - 4 \cdot a \geq 0 & & -5 \leq \pm \sqrt{9 - 4a} \leq -1 & & -8 \leq -4a \leq 16 \\ a \leq \frac{9}{4} & & -5 \leq -\sqrt{9 - 4a} \leq -1 & & -2 \leq -a \leq 4 \\ & & & & -4 \leq a \leq 2 \end{aligned}$$



Ответ: $a \in [-4; 2]$

В течение одной рабочей недели цена на нефть менялась каждый день на одно и то же число процентов a ($1 \leq a \leq 50$) по сравнению с предыдущей ценой, причем в понедельник и среду она уменьшалась, а во вторник, четверг и пятницу — увеличивалась. Могла ли к субботе цена на нефть увеличиться на 11% по сравнению с первоначальной ценой?

Пусть A — исходная цена на нефть (до колебаний).

Введем обозначение:

$$x = \frac{a}{100}; \frac{1}{100} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Тогда к субботе цена на нефть составит: $A \cdot (1 - x)^2 \cdot (1 + x)^3$

$$(A \cdot (1 - x)^2 \cdot (1 + x)^3 = ? = 1,11 \cdot A)$$

$$((1 - x)^2 \cdot (1 + x)^3 = 1,11)?$$

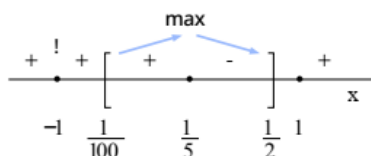
Рассмотрим функцию $f(x) = (1 - x)^2 \cdot (1 + x)^3 = (1 - x^2)^2 (1 + x)$

Найдем множество значений функции при: $\frac{1}{100} \leq x \leq \frac{1}{2}$

Возьмем производную функции:

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x^2 - 1)^2 (x + 1))' = \\ &= 2(x^2 - 1) \cdot 2x \cdot (x + 1) + (x^2 - 1)^2 = \\ &= (x^2 - 1)(4x^2 + 4x + x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(5x^2 + 4x - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2 - 1\right)^2 \left(\frac{1}{5} + 1\right) = 1,10592$$



$$f(x) < 1,11$$

Ответ:
не могла увеличиться на 11%