

Если на некотором множестве функция $f(x)$ строго возрастает, а функция $g(x)$ строго убывает, то уравнение вида $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня (утверждение выполняется и в случае нестрогой монотонности одной из функций).

Утверждение позволяют обосновывать единственность решения уравнения в тех случаях, когда свести его к простейшему не удастся, но удастся подобрать корень.

Доказательство: Если $g(x)$ строго убывает, то $-g(x)$ строго возрастает, тогда $u(x) = f(x) - g(x)$ монотонно возрастает как сумма двух возрастающих. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ свелось к уравнению $u(x) = 0$. Предположим, что последнее уравнение имеет более одного корня, например x_1 и x_2 . Пусть $x_1 < x_2$. В силу монотонности $u(x)$ тогда $u(x_1) < u(x_2)$, что противоречит условию $u(x_1) = 0 = u(x_2)$.

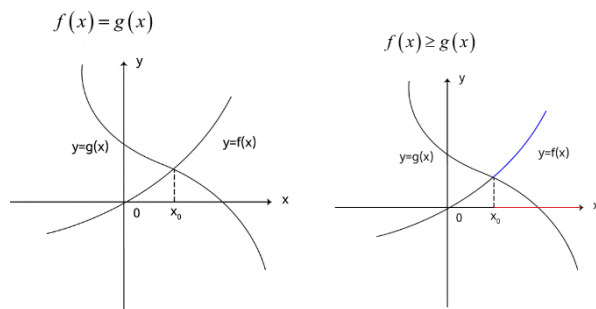
Решите уравнение $x^3 + 7\sqrt[3]{6x-7} + 6 = 0$

Решение:

Перепишем уравнение в виде

$$x^3 + 6 = -7\sqrt[3]{6x-7}$$

В левой части уравнения стоит монотонно возрастающая функция на всей числовой прямой, в правой части монотонно убывающая функция при всех значениях x , тогда, если уравнение имеет решение, то оно единственное. Заметим, что $x = 1$ является решением.



Ответ: $x = 1$

Если функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает), то уравнение вида $f(x) = x$ и $f(f(x)) = x$ и $f(f(\dots f(x)\dots)) = x$ имеют одно и то же множество корней.

Доказательство: Пусть x_0 является корнем уравнения $f(x) = x$, т.е. $f(x_0) = x_0$. Тогда $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$. Обратно, пусть число x_0 является корнем уравнения $f(f(x)) = x$, т.е. $f(f(x_0)) = x_0$. Докажем, что $f(x_0) = x_0$. Пусть это не так, тогда либо $f(x_0) > x_0$, либо $f(x_0) < x_0$.

В силу монотонного возрастания функции $f(x)$ из неравенства $f(x_0) > x_0$ следует, что $f(f(x_0)) > f(x_0)$, что противоречит $f(f(x_0)) = x_0$. Аналогично из неравенства $f(x_0) < x_0$ в силу монотонности $f(x)$ следует, что $f(f(x_0)) < f(x_0)$, что противоречит $f(f(x_0)) = x_0$. Значит, наше предположение неверное, и $f(x_0) = x_0$.

Решите уравнение $x^3 - 7\sqrt[3]{7x-6} + 6 = 0$

Решение:

Перепишем уравнение в виде $\sqrt[3]{7x-6} = \frac{x^3+6}{7}$.

Возведем обе части в куб.

$$7x-6 = \left(\frac{x^3+6}{7}\right)^3; \quad x = \frac{\left(\frac{x^3+6}{7}\right)^3 + 6}{7}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x^3+6}{7}$,

возрастающую на всей числовой прямой.

Полученное уравнение имеет вид $f(f(x)) = x$, которое имеет то же множество решений, что и уравнение $f(x) = x$. Откуда

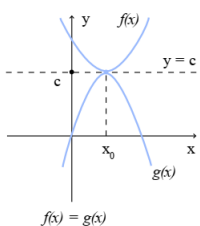
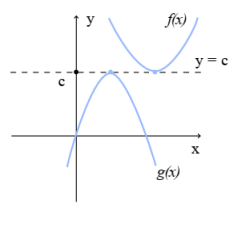
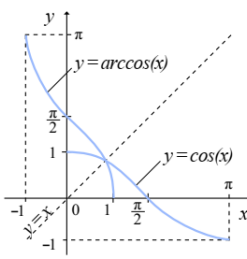
$$\frac{x^3+6}{7} = x; \quad x^3 - 7x + 6 = 0.$$

$$x^3 - x - 6x + 6 = 0$$

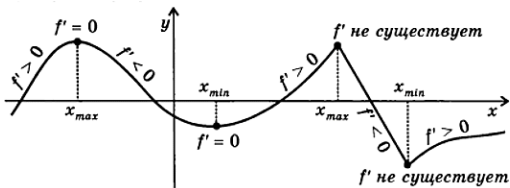
$$x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x - 6) = 0$$

$$(x-1)(x+3)(x-2) = 0$$

<p>Если функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает), то $f(a)=f(b)$ тогда и только тогда, когда $a=b$</p>	<p>Решите уравнение $x^9 - (2x+1)^3 - 16\sqrt[3]{2x+1} + 16x = 0$</p> <p><i>Решение:</i> Перепишем уравнение в виде $(x^3)^3 + 16\sqrt[3]{x^3} = (2x+1)^3 + 16\sqrt[3]{2x+1}$</p> <p>Рассмотрим функцию $f(t) = t^3 + 16 \cdot \sqrt[3]{t}$, монотонно возрастающую на всей числовой прямой (как сумма двух возрастающих). Уравнение можно переписать как $f(x^3) = f(2x+1)$. В силу монотонного возрастания $f(t)$, равенство будет выполняться в том и только том случае, когда $x^3 = 2x+1$.</p> $x^3 - 2x - 1 = 0$ $x^3 - x - x - 1 = 0$ $x(x^2 - 1) - (x+1) = 0$ $(x+1)(x^2 - x - 1) = 0$ $(x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$
<p>Если $\max f(x) = c$ и $\min g(x) = c$, то уравнение $f(x) = g(x)$ (как и неравенство $f(x) \leq g(x)$) имеет то же множество решений, что и система</p> $\begin{cases} f(x) = c \\ g(x) = c \end{cases}$ <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">   </div> <p>Ограниченность функций:</p> $ \sin x \leq 1; \quad \cos x \leq 1;$ $ a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2};$ $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \arccos x \leq \pi;$ $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \operatorname{arcctg} x \leq \pi$	<p>Решите уравнение $2^{x^3-1} + 2^{1-x^3} = 2 - \arccos(\sqrt[3]{x})$</p> <p><i>Решение:</i> Показательная функция всегда положительна. В левой части уравнения стоит сумма взаимнообратных величин, воспользуемся неравенством Коши $a + \frac{1}{a} \geq 2 \ (a > 0)$, тогда левая часть не меньше 2, а равенство возникает при $2^{x^3-1} = 2^{1-x^3} = 1$, т.е. $x = 1$</p> <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>Так как $0 \leq \arccos(\sqrt[3]{x}) \leq \pi$, то правая часть не больше 2, а равенство возникает при $\arccos(\sqrt[3]{x}) = 0$, т.е. единственное решение $x = 1$</p> </div> </div> <p><i>Ответ:</i> $x = 1$</p>

<p>Алгебраические выражения, которые не меняются при подстановке вместо переменной кого-либо алгебраического выражения от этой переменной, называется инвариантным относительно такой подстановки. Здесь два термина замена и подстановка будем считать синонимами. Выражение $f(x) + f(c - x)$ не меняется при замене x на $c - x$, значит инвариантно относительно замены. Выражение $f(x) + f\left(\frac{c}{x}\right)$ при допустимых значениях инвариантно относительно подстановки x на $\frac{c}{x}$.</p> <p>Примером инвариантности является четность (нечетность), например, если функция $f(x)$ является четной, то $f(x) = 0$ инвариантно относительно замены x на $-x$.</p>	<p>Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственный корень.</p> <p><i>Решение:</i></p> <p>Заметим, что если x_0 – корень, то и $(-x_0)$ – корень. Для единственности решения необходимо, чтобы выполнялось условие $x_0 = -x_0$, т.е. $x_0 = 0$.</p> <p>Найдем все значения параметра a, при которых число 0 является корнем уравнения.</p> $-2a \sin(1) + a^2 = 0; \quad a(a - 2 \sin 1) = 0;$ $\begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \sin 1 \end{cases}$ <p>Остается проверить, будет ли $x = 0$ единственным при найденных значениях параметра a или нет.</p> <p>Пусть $a = 0$, тогда $x^2 = 0$ и его единственным решением является $x = 0$.</p> <p>Пусть $a = 2 \sin 1$, тогда</p> $x^2 - 2(2 \sin 1) \sin(\cos x) + (2 \sin 1)^2 = 0$ $x^2 + 4 \sin^2 1 = 4 \sin 1 \cdot \sin(\cos x)$ <p>Полученное уравнение стандартными методами не решить. Применим свойства монотонным и ограниченных функций.</p> <p>$-1 \leq \cos x \leq 1$, а на отрезке $[-1; 1]$ функция $y = \sin t$ монотонно возрастает и принимает свое наибольшее значение при $t = 1$, поэтому правая часть уравнения</p> $4 \sin 1 \cdot \sin(\cos x) \leq 4 \sin 1 \cdot \sin 1 = 4 \sin^2 1$ <p>Но левая часть уравнения $x^2 + 4 \sin^2 1 \geq 4 \sin^2 1$. Тогда уравнение имеет решение только в случае, когда $x^2 + 4 \sin^2 1 = 4 \sin^2 1$, откуда $x = 0$ единственное решение.</p> <p><i>Ответ:</i> 0; $2 \sin 1$</p>
<p>Будем называть функциональными такие уравнения, где наряду с алгебраическими выражением от переменной x есть и неизвестное алгебраическое выражение от переменной x.</p> <p>Такие уравнения не предполагают инвариантность всего уравнения, для их решения достаточно инвариантности какой-то пары алгебраических выражений относительно некоторой замены переменных. Типичным примером такого уравнения является следующее: $r \cdot f(x) + q \cdot f(c - x) = p(x)$.</p>	<p>Найдите корни уравнения $f(x) = 31$, если $x \neq 0$ и $2f(x) + f\left(\frac{4}{x}\right) = 6x$.</p> <p><i>Решение:</i></p> <p>Заметим, что $f(x)$ и $f\left(\frac{4}{x}\right)$ инвариантны относительно замены x на $\frac{4}{x}$. Тогда получим второе уравнение $2f\left(\frac{4}{x}\right) + f(x) = 6 \cdot \frac{4}{x}$.</p> <p>Решая систему из двух уравнений</p>

<p>Поскольку $f(x)$ и $f(c-x)$ инвариантны относительно замены x на $c-x$, то можно получить еще одно уравнение $r \cdot f(c-x) + q \cdot f(x) = p(c-x)$ и рассматривать исходное уравнение как систему из этих двух уравнений.</p>	$\begin{cases} 2f(x) + f\left(\frac{4}{x}\right) = 6x \\ 2f\left(\frac{4}{x}\right) + f(x) = 6 \cdot \frac{4}{x} \end{cases}$ <p>Получим $f(x) = 4x - \frac{8}{x}$.</p> <p>Осталось решить уравнение $4x - \frac{8}{x} = 31$, т.е.</p> $4x^2 - 31x - 8 = 0$, корнями которого являются $x = -\frac{1}{4}; \quad x = 8$ <p>Ответ: $x = -\frac{1}{4}; \quad x = 8$</p>
<p>Применение производной для исследования функции.</p> <p style="text-align: center;">МОНОТОННОСТЬ ЭКСТРЕМУМЫ</p>  <p><i>Замечание.</i> Приведенные условия являются только достаточными условиями монотонности, но не являются необходимыми. Например, функция $y = x^3$ возрастает во всей области определения, хотя ее производная $y' = 3x^2$ обращается в нуль при $x = 0$.</p>	<p>Решите уравнение</p> $x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{1 + \sqrt{x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1}} = 4x$ <p><i>Решение:</i></p> <p>Перепишем уравнение в виде</p> $(4x - x^2)(1 + \sqrt{x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1}) = 3\sqrt{3}$ $(4x - x^2)\left(1 + \sqrt{(4x - x^2)^2 + 1}\right) = \sqrt{3}\left(1 + \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}\right)$ <p>Рассмотрим функцию $f(t) = t(1 + \sqrt{t^2 + 1})$, возрастающую на всей числовой оси. Последнее можно доказать, найдя производную.</p> $f'(t) = 1 \cdot (1 + \sqrt{t^2 + 1}) + t \cdot \frac{2t}{2\sqrt{t^2 + 1}} =$ $= 1 + \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0$ <p>В силу возрастания функции $y = f(t)$ равенство $f(a) = f(b)$ выполняется тогда и только тогда, когда $a = b$. В нашем случае $(4x - x^2) = \sqrt{3}$</p> <p>Получаем уравнение $x^2 - 4x + \sqrt{3} = 0$, откуда $x = 2 \pm \sqrt{4 - \sqrt{3}}$.</p> <p>Ответ: $x = 2 - \sqrt{4 - \sqrt{3}}$ и $x = 2 + \sqrt{4 - \sqrt{3}}$</p>

Задачи для самостоятельного решения:

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2x(x-2)+3} + 2\sqrt[3]{3x(x-2)+4} + \dots + (n-1)\sqrt[n]{nx(x-2)+n+1} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2x(x-2)+3}} + \frac{2}{\sqrt[3]{3x(x-2)+4}} + \dots + \frac{n-1}{\sqrt[n]{nx(x-2)+n+1}}$$

2. Решите уравнение $1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^8}}}} = \frac{1}{x^{16}}$

3. Найдите значение параметра a , при котором уравнение

$$x^{2022} - 2x^{2024} + x^4 - 2x^2 + 3 = 2a + \cos 3x \text{ имеет нечетное число различных решений.}$$

4. Известно, что числа a, b, c, d – положительные, а сумма всех действительных корней уравнений $ax^{321} + bx^{300} + cx^{100} + d = 0$ и $dx^{321} + cx^{221} + bx^{21} + a = 0$ равна $-2,9$. Найдите эти корни.

Решение задач:

Задача 1. Решите уравнение

$$\sqrt{2x(x-2)+3} + 2\sqrt[3]{3x(x-2)+4} + \dots + (n-1)\sqrt[n]{nx(x-2)+n+1} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2x(x-2)+3}} + \frac{2}{\sqrt[3]{3x(x-2)+4}} + \dots + \frac{n-1}{\sqrt[n]{nx(x-2)+n+1}}$$

Решение:

Выделим полный квадрат в каждом из подкоренных выражений.

$$nx(x-2)+n+1 = nx^2 - 2nx + n + 1 = n(x-1)^2 + 1. \text{ Тогда } \sqrt[n]{n(x-1)^2 + 1} \geq 1.$$

Тогда

$$\sqrt{2(x-1)^2 + 1} + 2\sqrt[3]{3(x-1)^2 + 1} + \dots + (n-1)\sqrt[n]{n(x-1)^2 + 1} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2(x-1)^2 + 1}} + \frac{2}{\sqrt[3]{3(x-1)^2 + 1}} + \dots + \frac{n-1}{\sqrt[n]{n(x-1)^2 + 1}}$$

Левая часть уравнения не меньше, чем $1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ (как сумма

арифметической прогрессии). А правая часть не больше, чем $\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \dots + \frac{(n-1)}{1} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Следовательно, левая и правая часть равны $\frac{n(n-1)}{2}$, что возможно только при $x = 1$.

Ответ: $x = 1$

Задача 2. Решите уравнение $1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^8}}}} = \frac{1}{x^{16}}$

Решение: Обозначим $t = \frac{1}{x^{16}}$, где $t > 0$, получим уравнение $1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{t}}} = t$.

Рассмотрим функцию $f(t) = 1 + \sqrt{t}$, она возрастает на своей области определения.

Уравнение можно записать в виде $f(f(f(f(t)))) = t$. В силу монотонного возрастания функции $f(t)$, это уравнение имеет то же множество решений, что и уравнение $f(t) = t$, т.е. уравнение $1 + \sqrt{t} = t$.

Единственным положительным корнем этого квадратного относительно \sqrt{t} уравнения является $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, тогда $\sqrt{t} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, значит $\frac{1}{x^8} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, т.е. $x^8 = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$, следовательно

$$x = \sqrt[8]{\frac{2}{\sqrt{5}+1}} = \sqrt[8]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

Ответ: $x = \sqrt[8]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

Задача 3. Найдите значение параметра a , при котором уравнение $x^{2022} - 2x^{2024} + x^4 - 2x^2 + 3 = 2a + \cos 3x$ имеет нечетное число различных решений.

Решение: Уравнение инвариантно относительно замены x на $(-x)$, т.е. если x_0 – решение, то и $(-x_0)$ – решение. Чтобы число решений было нечетным, среди решений должен быть $x = 0$. Подставим $x = 0$ и найдем значение параметра $3 = 2a + 1$, $a = 1$.

Ответ: $a = 1$

Задача 4. Известно, что числа a, b, c, d – положительные, а сумма всех действительных корней уравнений $ax^{321} + bx^{300} + cx^{100} + d = 0$ и $dx^{321} + cx^{221} + bx^{21} + a = 0$ равна $-2,9$. Найдите эти корни.

Решение:

В силу положительности коэффициентов a, b, c, d ни одно из данных уравнений не имеет положительных корней.

Пусть x_0 – корень первого уравнения $ax_0^{321} + bx_0^{300} + cx_0^{100} + d = 0$. Разделим обе части на

$$x_0^{321} \text{ и запишем полученный результат в виде } d\left(\frac{1}{x_0}\right)^{321} + c\left(\frac{1}{x_0}\right)^{221} + b\left(\frac{1}{x_0}\right)^{21} + a = 0.$$

Отсюда следует, что $\frac{1}{x_0}$ – корень второго уравнения.

Но функция $y = dx^{321} + cx^{221} + bx^{21} + a$ монотонно возрастает на всей числовой оси и принимает как положительные, так и отрицательные значения, тогда уравнение $dx^{321} + cx^{221} + bx^{21} + a = 0$ имеет единственный корень.

Так как корни уравнений являются взаимно обратными отрицательными числами, сумма которых равна $-2,9$, то

$$x_0 + \frac{1}{x_0} = -2,9$$

$$x_0^2 + 2,9x_0 + 1 = 0$$

$$x_0 = -2,5; -0,4$$

Ответ: $-2,5; -0,4$

Домашнее задание:

1. Решите уравнение $4 \sin 3x + 3 \cos 4x = 7$
2. Найдите все интервалы вида $(k; k+1)$, где k – целое число, содержащее нули

$$\text{функции } f(x) = \left((x^3 - 1) - 1 \right)^3 - 1$$

3. Найдите все значение параметра a , при каждом из которых уравнение $\sin^{14} x + (a - 3 \sin x)^7 + \sin^2 x + a = 3 \sin x$ имеет хотя бы один корень.
4. В течение одной рабочей недели цена на нефть менялась каждый день на одно и то же число процентов a ($1 \leq a \leq 50$) по сравнению с предыдущей ценой, причем в понедельник и среду она уменьшалась, а во вторник, четверг и пятницу — увеличивалась. Могла ли к субботе цена на нефть увеличиться на 11% по сравнению с первоначальной ценой?